

基于路径积分法的输液管道随机动态响应分析

孙诣博, 魏 莎, 丁 虎, 陈立群

STOCHASTIC DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF PIPE CONVEYING FLUID BASED ON THE PATH INTEGRAL METHOD

Sun Yibo, Wei Sha, Ding Hu, and Chen Liqun

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-23-032>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

分布式运动约束下悬臂输液管的参数共振研究

PARAMETRIC RESONANCE OF A CANTILEVERED PIPE CONVEYING FLUID SUBJECTED TO DISTRIBUTED MOTION CONSTRAINTS

力学学报. 2019, 51(2): 558-568

接地惯容式减振器对悬臂输流管稳定性和动态响应的影响研究

RESEARCH ON THE INFLUENCE OF GROUNDED INERTER-BASED ABSORBER ON THE STABILITY AND DYNAMIC RESPONSE OF CANTILEVERED PIPE CONVEYING FLUID

力学学报. 2021, 53(6): 1769-1780

具有刚性间隙约束输流管的碰撞振动

VIBRO-IMPACT DYNAMICS OF PIPE CONVEYING FLUID SUBJECTED TO RIGID CLEARANCE CONSTRAINT

力学学报. 2020, 52(5): 1498-1508

一类Markov过程的最大绝对值过程概率密度求解的新方法

A NEW METHOD FOR THE PROBABILITY DENSITY OF MAXIMUM ABSOLUTE VALUE OF A MARKOV PROCESS

力学学报. 2019, 51(5): 1437-1447

应用边界积分法求圆形夹杂问题的解析解

EXACT SOLUTION OF CIRCULAR INCLUSION PROBLEMS BY A BOUNDARY INTEGRAL METHOD

力学学报. 2020, 52(1): 73-81

概率密度演化方程TVD格式的自适应时间步长技术及其初值条件改进

NON-UNIFORM TIME STEP TVD SCHEME FOR PROBABILITY DENSITY EVOLUTION FUNCTION WITH IMPROVEMENT OF INITIAL CONDITION

力学学报. 2019, 51(4): 1223-1234



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

基于路径积分法的输液管道随机动态响应分析¹⁾

孙诣博* 魏莎*,†,**,2) 丁虎*,†,** 陈立群*,†,**

* (上海大学力学与科学工程学院, 上海 200444)

† (上海市力学信息学前沿科学研究基地, 上海 200072)

** (上海飞行器力学与控制研究院, 上海 200092)

摘要 随机激励下的输液管道在工程上广泛存在, 对其进行研究具有十分重要的意义. 为了预测高斯白噪声激励下输液管道系统的随机动态响应, 基于哈密顿原理建立了高斯白噪声激励下非线性输液管道的动力学模型. 采用 Galerkin 截断方法对输液管道的控制方程进行离散化. 采用基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法计算了输液管道随机振动响应的位移概率密度函数和速度概率密度函数. 采用 Monte Carlo 方法与路径积分法得到的计算结果进行对比, 验证了路径积分法在计算输液管道振动响应上具有较高的计算精度. 研究了流速、激励强度和阻尼系数对输液管道位移概率密度函数和速度概率密度函数的影响, 并确定了输液管道位移概率密度函数出现双峰时的临界流速. 结果表明, 采用路径积分法计算输液管道系统的动态响应是有效的. 流速增大会使系统可能发生的最大位移变大, 可能发生的最大速度不变; 激励强度增大会使系统可能发生的最大位移和最大速度变大; 阻尼系数增大会使系统可能发生的最大位移和最大速度变小. 此外, 研究发现流速增大是诱导输液管道发生随机分岔的因素之一.

关键词 输液管道, 随机激励, 受迫振动, 概率密度函数, 路径积分法

中图分类号: O324, TE973 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-23-032

STOCHASTIC DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF PIPE CONVEYING FLUID BASED ON THE PATH INTEGRAL METHOD¹⁾

Sun Yibo* Wei Sha*,†,**,2) Ding Hu*,†,** Chen Liqun*,†,**

* (School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

† (Shanghai Frontier Science Center of Mechanoinformatics, Shanghai 200072, China)

** (Shanghai Institute of Aircraft Mechanics and Control, Shanghai 200092, China)

Abstract The study of pipes conveying fluid under stochastic excitation is of great importance as they are widely used in engineering. To predict the stochastic dynamic response of pipe conveying fluid system under Gaussian white noise excitation, a dynamic model of the nonlinear pipe conveying fluid under Gaussian white noise excitation is established based on the Hamilton's principle. The Galerkin truncation method is employed to discretize the governing equation of pipes conveying fluid. The probability density function of the displacement and the probability density function of the velocity of the pipe conveying fluid are calculated by the path integral method based on the Gauss-Legendre formula. The results of the Monte Carlo method are compared with the results obtained by the path integral

2023-02-03 收稿, 2023-03-28 录用, 2023-03-29 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (12072181, 12272211) 和机械系统与振动国家重点实验室课题 (MSV202105) 资助项目.

2) 通讯作者: 魏莎, 副研究员, 主要研究方向为非线性振动. E-mail: weisha1219@126.com

引用格式: 孙诣博, 魏莎, 丁虎, 陈立群. 基于路径积分法的输液管道随机动态响应分析. 力学学报, 2023, 55(6): 1371-1381

Sun Yibo, Wei Sha, Ding Hu, Chen Liqun. Stochastic dynamic response analysis of pipe conveying fluid based on the path integral method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(6): 1371-1381

method to verify the accuracy of the path integral method in the calculation of the vibration response of the pipe conveying fluid. The effects of system parameters such as fluid speed, excitation strength and damping coefficient on the probability density function of the displacement and the probability density function of the velocity of the pipe conveying fluid are investigated. The critical fluid speed when the probability density function of displacement for the pipe conveying fluid has a double peak is determined. The results show that the path integral method is effective in calculating the response of the pipe conveying fluid system. The maximum possible displacement of the system will increase and the maximum possible speed will remain unchanged with the increase of fluid speed. The maximum possible displacement and the maximum possible speed of the system will increase with the increase of excitation strength. Increasing the damping coefficient results in that the maximum possible displacement and the maximum possible speed of the system decreases. In addition, it is found that the increase of fluid speed is one of the factors inducing stochastic bifurcation of the pipe conveying fluid.

Key words pipe conveying fluid, stochastic excitation, forced vibration, probability density function, path integral method

引言

输液管道广泛存在于海底输油、核工业、石油化工、航空航天等领域. 管道的流固耦合振动和强度破坏是管道的主要突出问题, 其中由外激励引起的管道振动是重要方面. 针对该问题, 国内外开展了广泛研究^[1-3]. 例如, Chen^[4]首次研究分布力下悬臂输液管道的受迫振动. Lottati 等^[5]研究弹性地基对悬臂输液管道和两端固支输液管道振动的影响. 黄慧春等^[6]研究基底自身存在简谐运动的超临界输液管道, 结果表明在内外共振完全调谐时, 系统出现双跳跃现象. 王乙坤等^[7]研究脉动内流激励下的参数共振行为, 结果表明, 在所分析的脉动频率范围内, 输液管道主要表现为在两倍于第二阶固有频率附近的参数共振. Ye 等^[8]研究超临界弯曲输液管道的动力学特性, 计算管道的固有频率, 研究初始曲率、管道长度和厚度以及流体速度对振动特性的影响, 研究发现临界速度和固有频率高度依赖于初始曲率. 张挺等^[9]研究振荡衰减流作用下两端支撑输流管道的不稳定区间, 并分析相关特征参数对不稳定区域的影响, 结果表明, 内激励型振荡衰减流对于输流管道横向振动的影响不容忽视. 颜雄等^[10]研究两端弹性支承载流管道横向运动的固有特性, 分析支承载刚度、管道长度、流体质量比等系统参数对管道固有频率的影响. Wei 等^[11]研究外部简谐激励下具有非线性边界支撑的输液管道动态响应. 结果表明, 边界非线性对输液管道动力特性有着显著影响. Liang 等^[12]研究输液管道在流固相互作用、自旋运动和

外力三重作用下的动力学特性, 讨论输液管道在亚临界和超临界的运动情况: 在亚临界状态下进行周期或准周期运动, 而在超临界流速下则表现为混沌运动. Zhou 等^[13]研究锥形自由端悬臂管道在轴向内外流作用下的稳定性和动力学特性, 主要分析管内流速和外流速变化时管道的振动幅度和振动形状, 与钝形自由端管道相比, 锥形自由端管道表现出更丰富的动态特性和屈曲现象. Guo 等^[14]基于一种改进的传递矩阵模型, 分析基础激励和脉动激励联合作用下输液管道的振动特性, 通过对比模拟结果和实验结果, 验证了该模型的正确性.

上述这些关于外激励下管道振动的研究主要集中在确定性激励. 然而在一些工程环境中, 管道受到的激励具有随机性. 针对该问题, Zhai 等^[15]采用有限元法建立随机激励下悬臂输液管道的动力学方程, 研究流速和节点个数对响应标准差的影响. Gan 等^[16]考虑一种周期激励和随机激励之和的不规则外激励, 研究两端固支多相流管道的受迫振动, 通过庞加莱图对随机激励下管道的振动特性进行详细研究. 考虑外部激励的随机性, Lotfan 等^[17]对传递多相流的两端固支碳纳米管进行尺寸相关的非线性振动分析. 通过位移、速度、加速度的均值和标准差等统计参数研究管道中点的挠度变化. Yang 等^[18]基于混响射线矩阵方法和随机振动理论, 考虑内部流体、卡箍刚度、附件质量以及基础激励之间的相干效应等因素, 对三维多跨液压管道多点基础激励下的随机振动进行分析, 研究支承刚度、流体速度和多点激励相干性对多跨管道系统的影响. Li 等^[19]研

究直管在随机激励作用下的应力响应特性, 采用离散分析方法得到系统的均方应力, 研究发现管道均方应力的最大值出现在管道支撑点处. Qu 等^[20] 研究弯曲输液管道在随机激励下的动力学特性, 采用有限元法结合离散分析方法得到了系统的均方位移, 并讨论激励方差、流速和压强对均方位移的影响. Sazesh 等^[21] 研究悬臂输液管道在白噪声激励下的系统响应谱密度、响应概率密度函数和响应方差随管内流动速度的变化.

当前对于白噪声激励下系统的研究方法主要包括路径积分法^[22-23]、有限元法^[24]、等效线性化法^[25]、Monte Carlo 模拟方法^[26]、有限差分法^[27]、随机平均法^[28] 以及广义胞映射法^[29]. 受高斯白噪声激励的系统响应属于 Markov 过程. 在这个过程中, 系统响应受 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程控制. 通常通过求解 FPK 方程可得到系统的转移概率密度函数. 其中, 路径积分法不直接求解 FPK 方程, 通过连接短时概率密度函数得到任意时刻的概率密度函数. 当 FPK 方程难以求解时, 使用路径积分法更加简便有效. 路径积分方法最早由 Wehner 等^[30] 提出. 其基本的思想是将概率密度函数表示为泛函的积分形式, 在时间尺度和空间尺度上离散化积分方程, 将积分过程转换为求和过程, 以路径求和代替路径积分, 进而得到任意时刻的概率密度函数. 然而 Wehner 等^[30] 使用的分段常数插值方法会使概率密度在峰值附近的值较低, 尾部区域的值较高. 为解决该问题, Yu 等^[23] 提出了基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法, 并研究了 Duffing 振子在简谐激励和白噪声共同作用下的非平稳概率密度函数^[22]. 该方法通过 Gauss-Legendre 插值公式离散化概率密度函数的表达式, 并假设短时转移概率密度接近高斯分布, 进而得到转移概率密度函数. 其优势在于可以得到非负的、较为精确的尾部转移概率密度函数. 最近几年, 基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法得到了一些应用. Li 等^[31] 考虑重力的影响, 通过路径积分法估计高斯白噪声激励下的非线性能量汇主结构和子结构的位移概率密度和速度概率密度. Xue 等^[32] 采用基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法研究了白噪声激励下具有非线性能量汇的线性系统减振问题. 王亮等^[33] 用路径积分法研究了受加性或乘性高斯白噪声激励的自治与非自治碰撞振动系统的瞬态和稳态响应的概率密度函数. Zhu 等^[34]

采用路径积分方法研究了非线性随机船舶横摇运动的概率密度函数. 研究发现由于非线性阻尼项和非线性恢复力矩项的存在, 横摇角和角速度的概率密度函数表现出高度的非高斯行为. 基于路径积分法, Zan 等^[35-36] 研究了参数高斯和 Lévy 白噪声以及高斯白噪声和泊松白噪声混合激励下动力系统的可靠性和首次破坏时间, 说明路径积分法可用于解决首次穿越问题. 目前使用路径积分法求解四维及四维以下的非线性系统已经有广泛应用. 通过 Galerkin 截断后的高斯白噪声激励下输液管道属于二维系统. 因此将路径积分法应用于输液管道的随机振动问题是适用的.

本文以两端简支输液管道为研究对象, 研究高斯白噪声激励下系统的随机动态响应特性. 采用路径积分法计算输液管道系统的振动响应概率密度. 通过 Monte Carlo 方法验证上述结果的正确性. 重点讨论了流速、激励强度和阻尼系数对输液管道位移概率密度和速度概率密度的影响. 研究系统发生随机分岔的临界流速值. 本文所得到的输液管道随机动态响应变化规律可为随机激励下的输液管道优化设计和状态监测提供参考依据.

1 输液管道模型

随机激励下的两端简支输液管道模型如图 1 所示. 本文分析的管道内径远小于管道长度, 因此将输液管道假设为梁模型, 并采用 Euler-Bernoulli 梁模型建模, 忽略细长管道的剪切变形和转动惯量的影响. 图中 L 表示输液管道两端支承间的距离, ρ_p 表示管道密度, A_p 表示管道的横截面积, E 表示输液管道弹性模量, I 表示惯性矩. $w(x, t)$ 表示管道的横向位移, t 表示时间, x 表示管道上任意一点距原点处的距离. 假设管内流体为不可压的流体, 密度为 ρ_f , 流体截面积为 A_f , 以恒定的流速 Γ 在管内流动. $F(x, t)$ 表示管道受到的外部随机激励. 在输液管道运动中, 存在轴向运动和横向运动. 由于轴向运动远小于横向运动, 本文仅分析管道的横向运动.

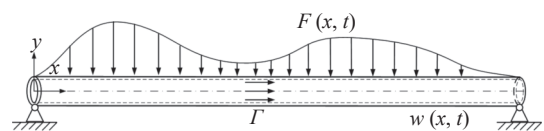


图 1 高斯白噪声激励下两端简支输液管道示意图

Fig. 1 A simply-supported pipe conveying fluid under distributed Gaussian white noise excitations

流体动能 T_f 为

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_f A_f \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_f A_f \Gamma^2 dx \quad (1)$$

管道动能 T_p 为

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p A_p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

管道总动能表示为

$$T = T_f + T_p = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_f A_f \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_f A_f \Gamma^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_p A_p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3)$$

输液管道变形功的变分 δW_p 为

$$\delta W_p = - \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV \quad (4)$$

其中 V 是管道的体积, σ_x 和 ε_x 分别为管道任意位置的正应力和正应变. 管道应变-位移关系为

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \quad (5)$$

其中 z 为横截面上任意点距中性面的距离. 结合管道弹性本构关系, 正应力 σ_x 为

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (6)$$

考虑外部随机激励以及环境流体引起的摩擦力, 外力势能做功的变分为

$$\delta V_F = \int_0^L F(x, t) \delta w dx - \int_0^L c \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \quad (7)$$

其中 $F(x, t)$ 表示外部随机激励, c 为外阻尼系数.

基于广义哈密顿原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_p dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta V_F dt = 0 \quad (8)$$

将式 (3)、式 (4) 和式 (7) 代入式 (8) 中, 导出输液管道的控制方程, 整理得

$$\left(\rho_f A_f + \rho_p A_p \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho_f A_f \Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho_f A_f \Gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{EA_p}{2L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (9)$$

边界条件为

$$w(0, t) = 0, w(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

2 输液管道的响应概率密度

为求解随机激励下输液管道的动态响应, 首先采用 Galerkin 截断法将控制方程 (9) 在空间上离散为常微分方程, 然后采用路径积分法求解该方程.

假设式 (9) 的解为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (11)$$

其中 $q_n(t)$ 为广义坐标, $\sin(n\pi x/L)$ 为试函数, N 为截断系数. 将假设解代入至式 (9) 得到

$$\left(\rho_f A_f + \rho_p A_p \right) \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{2n\pi\rho_f A_f \Gamma}{L} \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{n^2\pi^2\rho_f A_f \Gamma^2}{L^2} \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{n^2\pi^2 EA_p}{2L^3} \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^L \left[\frac{n\pi}{L} \sum_{n=1}^N q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]^2 dx + \frac{n^4\pi^4 EI}{L^4} \sum_{n=1}^N q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = F(x, t) \quad (12)$$

选取权函数为

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), m = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

将式 (12) 乘以权函数并在 $[0, 1]$ 上对 x 积分. 在工程中一般关心低阶模态, 故令 N 取 1 得到

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{c}{\rho_f A_f + \rho_p A_p} \dot{q}_1(t) + \left[\frac{EI\pi^4}{L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} - \frac{\rho_f A_f \Gamma^2 \pi^2}{L^2(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} \right] q_1(t) + \frac{EA_p \pi^4}{4L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} q_1^3(t) = W(t) \quad (14)$$

其中 $W(t)$ 表示高斯白噪声, 表达式为

$$W(t) = \int_0^L \left[F(x, t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx \quad (15)$$

高斯白噪声的自相关函数为

$$E(W(t)W(t+\tau)) = 2D_w\delta(\tau) \quad (16)$$

其中 $2D_w$ 为高斯白噪声 $W(t)$ 的强度.

令 $q_1 = y_1, \dot{q}_1 = y_2$, 式 (14) 可以表示为二维状态方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{c}{\rho_f A_f + \rho_p A_p} y_2 - \left[\frac{EI\pi^4}{L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} - \frac{\rho_f A_f \Gamma^2 \pi^2}{L^2(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} \right] y_1 - \frac{EA_p \pi^4}{4L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} y_1^3 + W(t) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

路径积分法的精度和计算效率由子区间数目决定. 维度增高时, 子区间数目成倍数增长, 导致计算效率低, 因此路径积分法在高维系统中的应用具有局限性^[37]. 式 (17) 为二维状态方程, 采用基于 Gauss-Legendre 公式的路径积分法计算式 (17) 是有效的. 路径积分法的基本思想是在时间尺度和空间尺度离散化积分方程, 采用路径和代替路径积分, 即通过连接短时转移概率密度形成全局转移概率密度函数. i 时刻的概率密度函数 $p(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, t_i)$ 表示为

$$p(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, t_i) = \int_{R_s} p(y_1^{(i-1)}, y_2^{(i-1)}, t_{i-1}) q(y_1^{(i)}, y_2^{(i)} | y_1^{(i-1)}, y_2^{(i-1)}, t_{i-1}) dy_1^{(i-1)} dy_2^{(i-1)} \quad (18)$$

其中 $p(y_1^{(i-1)}, y_2^{(i-1)}, t_{i-1})$ 表示 $i-1$ 时刻的概率密度函数, $q(y_1^{(i)}, y_2^{(i)} | y_1^{(i-1)}, y_2^{(i-1)}, t_{i-1})$ 表示 $i-1$ 到 i 时刻的转移概率密度函数, R_s 代表状态空间. 在 y_1, y_2 方向上分别划分 e_1, e_2 个子区间. 在假设每个子区间选取两个高斯积分点的情况下, 高斯积分点的位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} y_{1,f_1} &= y_{1,L} + 0.211\ 375(y_{1,R} - y_{1,L}) \\ y_{1,f_1+1} &= y_{1,R} - 0.211\ 375(y_{1,R} - y_{1,L}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中 $f_1 = 2(K-1) + 1, K = 1, 2, \dots, e_1$. $y_{1,L}$ 和 $y_{1,R}$ 分别是 y_1 方向上第 K 个区间的左边界和右边界.

类似地, 在 y_2 方向上

$$\left. \begin{aligned} y_{2,f_2} &= y_{2,L} + 0.211\ 375(y_{2,R} - y_{2,L}) \\ y_{2,f_2+1} &= y_{2,R} - 0.211\ 375(y_{2,R} - y_{2,L}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 $f_2 = 2(K-1) + 1, K = 1, 2, \dots, e_2$. $y_{2,L}$ 和 $y_{2,R}$ 分别是 y_2 方向上第 K 个区间的左边界和右边界. 采用 Gauss-Legendre 积分公式代替路径积分, 得到了 Gauss-Legendre 形式的概率密度函数 $p(y_{1,r}^i, y_{2,s}^i)$

$$p(y_{1,r}^i, y_{2,s}^i) = \frac{\Delta y_1}{2} \frac{\Delta y_2}{2} \sum_{r=1}^{2e_1} \sum_{s=1}^{2e_2} p(y_{1,r}^{(i-1)}, y_{2,s}^{(i-1)}, t_{i-1}) q(y_{1,r}^{(i)}, y_{2,s}^{(i)} | y_{1,r}^{(i-1)}, y_{2,s}^{(i-1)}, t_{i-1}) \quad (21)$$

其中 $\Delta y_1, \Delta y_2$ 分别为各子区间的长度, $(y_{1,r}, y_{2,s})$ 为高斯积分点的坐标.

由式 (21) 可知, 只要有初始概率密度函数和转移概率密度函数就可以得到概率密度函数的数值. 采用短时高斯近似法, 进一步计算转移概率密度函数. 短时高斯近似的思想是, 在时间间隔非常小的情况下, 转移概率密度函数是近似高斯分布的. 基于这一短时高斯近似思想, 转移概率密度函数 $q(y_{1,r}^{(i)}, y_{2,s}^{(i)}, t_i | y_{1,r}^{(i-1)}, y_{2,s}^{(i-1)}, t_{i-1})$ 的表达式如下

$$q(y_{1,r}^{(i)}, y_{2,s}^{(i)}, t_i | y_{1,r}^{(i-1)}, y_{2,s}^{(i-1)}, t_{i-1}) = \frac{1}{2\pi |C^{(i)}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{u}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}^{(i)})^T (C^{(i)})^{-1} (\mathbf{u}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}^{(i)}) \right] \quad (22)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(i)} &= [y_{1,r}^{(i)}, y_{2,s}^{(i)}] \\ \boldsymbol{\mu}^{(i)} &= [m_{10}(t), m_{01}(t)] \\ C^{(i)} &= \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2(t) & \kappa_{y_1 y_2}(t) \\ \kappa_{y_2 y_1}(t) & \sigma_{y_2}^2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$ 表示均值向量, $C^{(i)}$ 表示协方差矩阵. $m(t)$ 表示均值, $\sigma^2(t)$ 和 $\kappa(t)$ 分别表示方差和协方差, 表示为

$$\left. \begin{aligned} m_{10} &= E[y_1^1 y_1^0], m_{01} = E[y_1^0 y_1^1] \\ \sigma_{y_1}^2 &= m_{20}^2 - (m_{10})^2, \sigma_{y_2}^2 = m_{02}^2 - (m_{01})^2 \\ \kappa_{y_1 y_1} &= \kappa_{y_2 y_1} = m_{11} - m_{10} m_{01} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由式 (22) 可知, 转移概率密度函数依赖均值和方差, 方差可以通过均值得到, 因此只需要得到均值就能求得概率密度函数. 由状态方程 (17) 可以得到 Itô 随机微分方程组的形式

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= F_1(y_1, y_2, t)dt + H_1(y_1, y_2, t)dB(t) \\ dy_2 &= F_2(y_1, y_2, t)dt + H_2(y_1, y_2, t)dB(t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 $B(t) = W(t)dt$, F_1 和 F_2 为漂移系数, H_1 和 H_2 为扩散系数

$$\left. \begin{aligned} F_1(y_1, y_2, t) &= y_2 \\ F_2(y_1, y_2, t) &= -\frac{c}{\rho_f A_f + \rho_p A_p} y_2 - \left[\frac{EI\pi^4}{L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} - \frac{\rho_f A_f \Gamma^2 \pi^2}{L^2(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} \right] y_1 - \frac{EA_p \pi^4}{4L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} y_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\begin{cases} H_1(y_1, y_2, t) = 0 \\ H_2(y_1, y_2, t) = 1 \end{cases} \quad (27)$$

均值可以通过矩方程得到, 二维情形下的矩方程形式如下

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E[M] &= E\left(F_1 \frac{\partial M}{\partial y_1} + F_2 \frac{\partial M}{\partial y_2}\right) + D_w \cdot \\ E\left(H_1 H_1 \frac{\partial^2 M}{\partial y_1^2} + H_2 H_2 \frac{\partial^2 M}{\partial y_2^2} + 2H_1 H_2 \frac{\partial^2 M}{\partial y_1 \partial y_2}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $M = y_1^a y_2^b$, a 和 b 分别取 0, 1 和 2.

为了方便后续计算, 令

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{c}{\rho_f A_f + \rho_p A_p}, \beta = \frac{EA\pi^4}{4L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} \\ \alpha &= \frac{EI\pi^4}{L^4(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} - \frac{\rho_f A_f \Gamma^2 \pi^2}{L^2(\rho_f A_f + \rho_p A_p)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

将式 (26) 代入到式 (28), 得到矩方程的表达式

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{10} &= m_{01} \\ \dot{m}_{01} &= -\eta m_{01} - \alpha m_{10} - \beta m_{30} \\ \dot{m}_{20} &= 2m_{11} \\ \dot{m}_{02} &= -2\eta m_{02} - 2\alpha m_{11} - 2\beta m_{31} + 2D_w \\ \dot{m}_{11} &= m_{02} - \eta m_{11} - \alpha m_{20} - \beta m_{40} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中含有高于二阶的矩, 使得方程组无法闭合不能被求出, 因此采用高斯截断矩法将高于二阶的矩通过低阶矩近似表示. 高斯截断矩法得到的高阶矩表达式为

$$\left. \begin{aligned} m_{30} &= 2m_{20}m_{10} \\ m_{31} &= 3m_{20}m_{11} \\ m_{40} &= 3m_{20}^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

在 $i-1$ 时刻的初始矩形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(0)} &= [m_{10}^{(0)}, m_{01}^{(0)}, m_{20}^{(0)}, m_{02}^{(0)}, m_{11}^{(0)}] = \\ & \left[y_{1,r}^{(i-1)}, y_{2,s}^{(i-1)}, (y_{1,r}^{(i-1)})^2, (y_{2,s}^{(i-1)})^2, y_{1,r}^{(i-1)} y_{2,s}^{(i-1)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

将式 (31) 带入式 (30), 采用 Runge-Kutta 法解式 (30), 初值为式 (32), 得到低阶矩, 再代入到转移概率密度和概率密度的表达式中, 得到系统位移和速度的概率密度函数.

3 数值验证

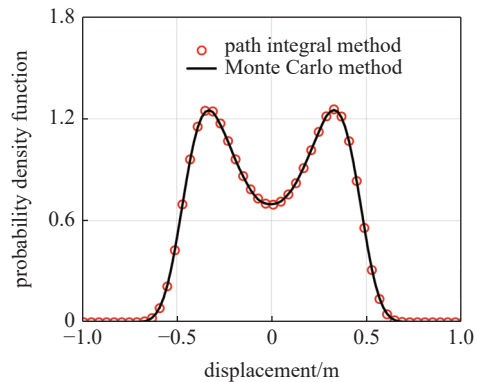
本节通过 Monte Carlo 方法验证路径积分法得到的结果. 算例中使用的输液管道参数如表 1 所示.

图 2 给出通过路径积分法和 Monte Carlo 法计

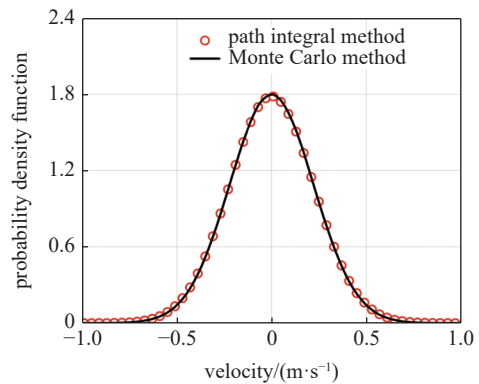
表 1 输液管道基本参数^[38]

Table 1 The basic parameters of pipe conveying fluid system^[38]

| Item | Notation | Value |
|----------------------|----------|--------------------------|
| Young's modulus | E | 2.07×10^{11} Pa |
| length of the pipe | L | 30 m |
| outer diameter | D | 0.6 m |
| inner diameter | d | 0.583 m |
| density of the pipe | ρ_p | 7850 kg/m ³ |
| density of the fluid | ρ_f | 800 kg/m ³ |
| excitation strength | D_w | 0.05 |
| fluid speed | Γ | 20 m/s |
| damping coefficient | η | 1 |



(a) 位移概率密度
(a) Probability density of the displacement

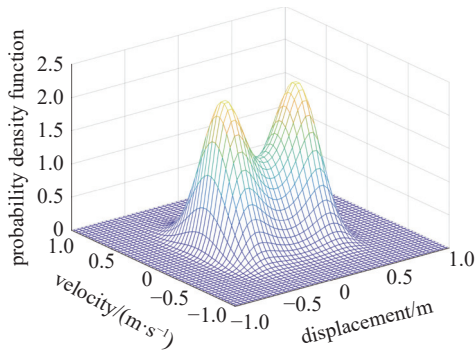


(b) 速度概率密度
(b) Probability density of the velocity

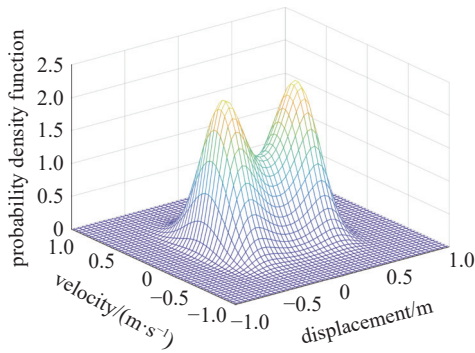
图 2 路径积分法和 Monte Carlo 法的计算结果对比

Fig. 2 Comparison of results of path integral method and Monte Carlo method

算得到的位移概率密度和速度概率密度. 图 3 给出对应的联合概率密度函数结果. 图 2 中空心圆表示



(a) 路径积分法
(a) Path integral method



(b) Monte Carlo 法
(b) Monte Carlo method

图 3 联合概率密度的结果对比

Fig. 3 Comparison of theoretical results and simulation results of joint probability density

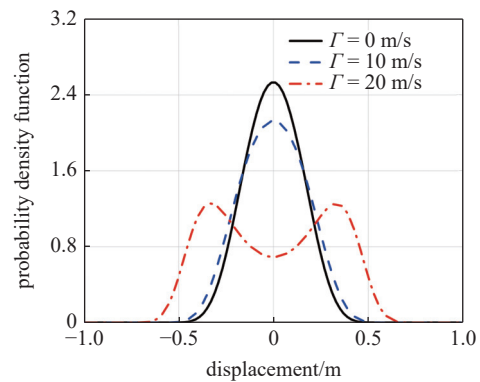
路径积分法结果, 实线表示 Monte Carlo 法得到的结果. Monte Carlo 法中选取 20000 个高斯白噪声样本. 每一组高斯白噪声激励计算结果中包含 4000 个计算点, 结合 Runge-Kutta 法进行计算. 从图 2(a) 和图 2(b) 可以看出, 路径积分法结果与 Monte Carlo 法结果吻合较好. 结果表明路径积分法可以有效计算高斯白噪声激励下输液管道系统位移和速度的概率密度. 图 3 的联合概率密度也验证了这一点.

4 参数分析

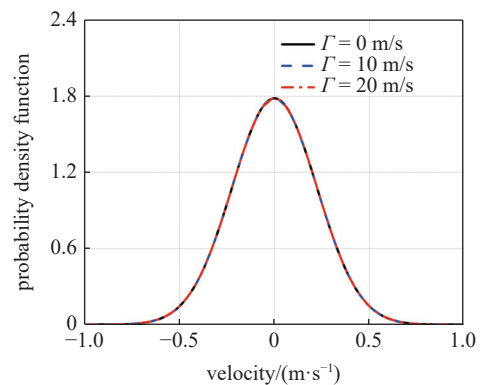
本节分析流速、激励强度和阻尼系数对输液管道位移和速度概率密度的影响. 上节的分析表明采用路径积分法在计算输液管道的响应概率密度上是有效的. 因此本节采用路径积分法进行参数分析.

4.1 流速

图 4 给出不同流速下 ($\Gamma = 0 \text{ m/s}$, 10 m/s 和 20 m/s) 系统稳态时的位移概率密度与速度概率密度. 图 5



(a) 位移概率密度
(a) Probability density of the displacement



(b) 速度概率密度
(b) Probability density of the velocity with different fluid speed

图 4 不同流速下的位移概率密度和速度概率密度

Fig. 4 Probability density of the displacement and probability density of the velocity with different fluid speed

给出不同流速下系统稳态时的联合概率密度. 除流速外其余参数如表 1 所示. 从图 4(a) 可以看出, 当流速从 0 增大到 10 m/s 时, 位移概率密度向两侧偏移, 位移概率密度峰值变小, 图形变得宽且低. 当流速为 20 m/s 时, 位移概率密度曲线出现双峰, 这意味着系统发生随机分岔. 每一个峰表示一种最大可能性的响应状态. 当稳态概率密度出现双峰的时候, 意味着系统的响应可从一种较大的可能状态过渡到另一种状态, 反之也可. 从图 4(b) 可以看出, 随着流速的增大, 系统的速度概率密度不变. 图 5 也反映了上述现象. 对于输液管道系统来讲, 表示着流速变大, 系统可能发生的最大位移变大, 可能发生的最大速度不变. 当流速过大时会导致系统出现随机分岔现象. 从图 4(a) 发现, 系统发生随机分岔时, 位移概率密度在位移为 0 处的两侧出现双峰. 因此可以通过峰值出现的位置作为系统发生随机分岔的判据.

图 6 给出了位移概率密度峰值所对应的横坐标

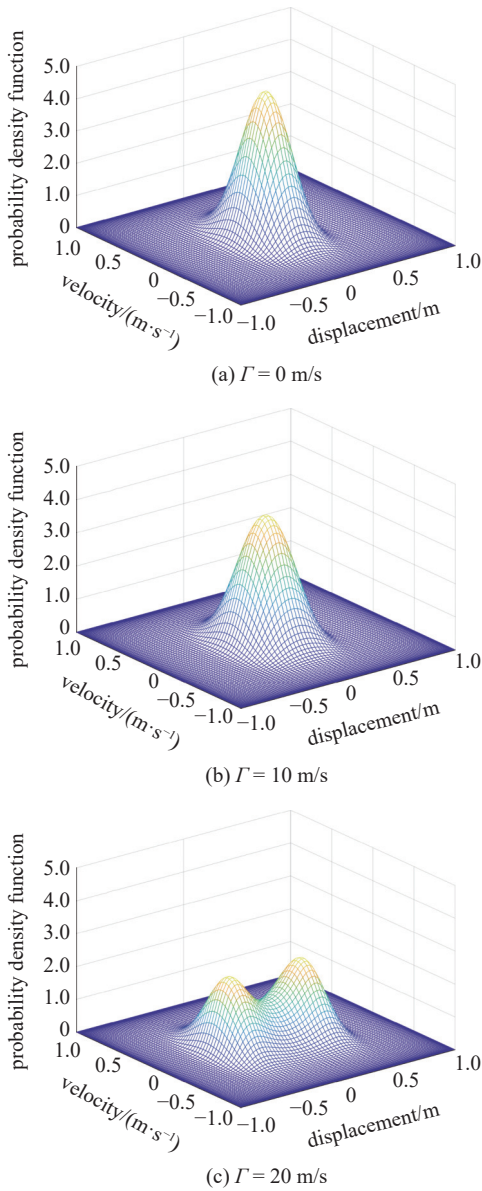


图 5 不同流速下的联合概率密度

Fig. 5 Joint probability density with different fluid speed

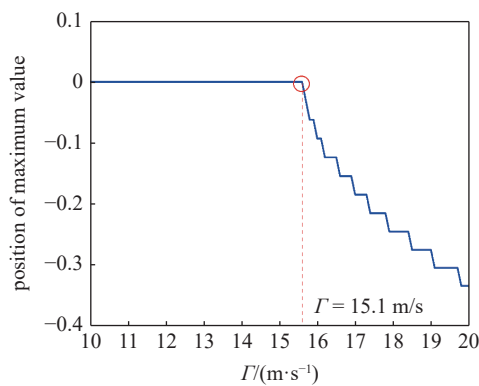


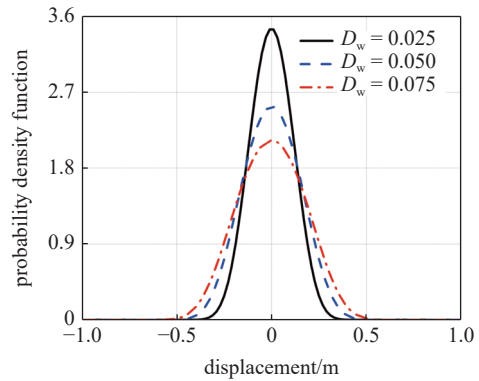
图 6 位移概率密度峰值位置随流速的变化图

Fig. 6 The peak position of the probability density of the displacement varies with fluid speed

位置随流速的变化图. 从图 6 可以发现, 流速在前 15.1 m/s 时, 概率密度峰值所对应的位移为 0. 当流速增大到 15.1 m/s 时, 概率密度峰值所对应的位移不再为 0, 位移概率密度发生分岔. 随着流速的继续增大, 概率密度峰值所对应的位移的绝对值不断增大. 上述现象表明该输液管道系统的发生随机分岔的临界流速为 15.1 m/s, 且随着流速的增大, 系统稳态时可能发生的最大位移变大.

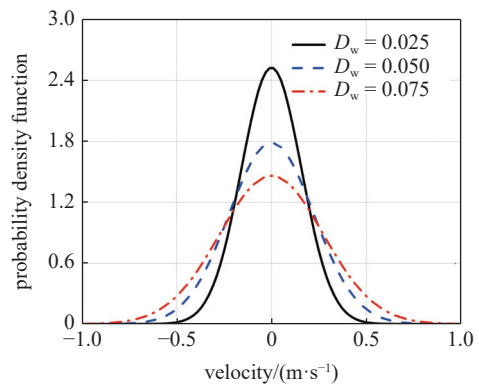
4.2 激励强度

图 7 给出不同激励强度下 ($D_w = 0.025, 0.05, 0.075$) 系统稳态时的位移概率密度与速度概率密度. 图 8 给出不同激励强度下系统稳态时的联合概率密度. 流速 $\Gamma = 1$ m/s, 除激励强度外其余参数如表 1 所示. 从图 7(a) 可以看出, 当激励强度增大时, 位移概率密度向两侧偏移, 位移稳态时的概率密度峰值变小, 图形变得宽且低. 从图 7(b) 可以看出, 当激励强



(a) 位移概率密度

(a) Probability density of the displacement



(b) 速度概率密度

(b) Probability density of the velocity with different excitation strength

图 7 不同激励强度下的位移概率密度和速度概率密度

Fig. 7 Probability density of the displacement and probability density of the velocity with different excitation strength

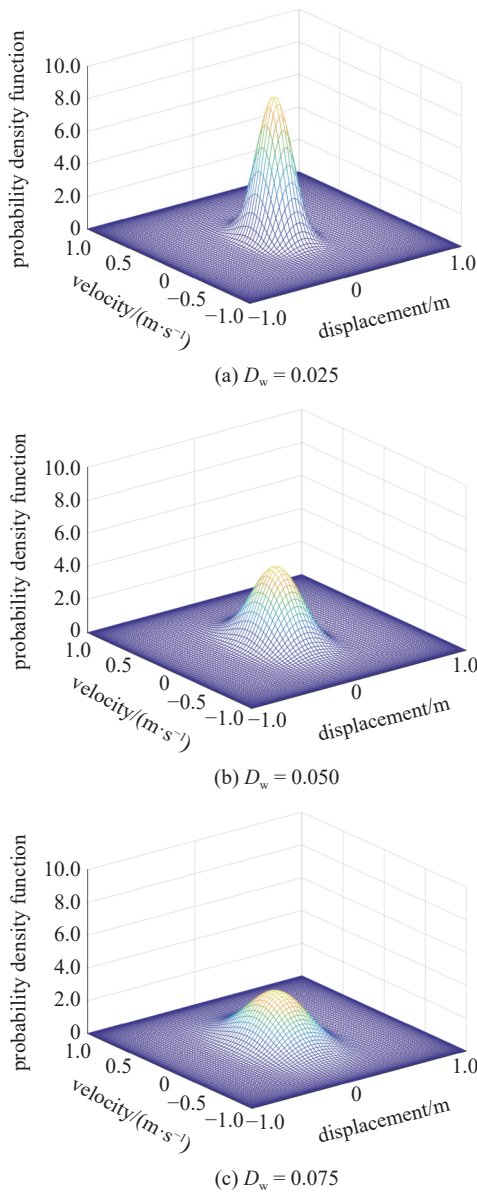


图 8 不同激励强度下的联合概率密度

Fig. 8 Joint probability density with different excitation strength

度增大时, 速度概率密度同样向两侧偏移, 稳态时的概率密度峰值会变小, 图形变得宽且低. 图 8 也反映了上述现象. 对于输液管道系统来讲, 表示着激励强度越大, 系统可能发生的位移和速度越大.

4.3 阻尼系数

图 9 给出不同阻尼系数下 ($\eta = 0.5, 1, 1.5$) 系统稳态时的位移概率密度与速度概率密度. 图 10 给出不同阻尼系数下系统稳态时的联合概率密度. 流速 $\Gamma = 1 \text{ m/s}$, 除阻尼系数外其余参数如表 1 所示. 从图 9(a) 可以看出, 当阻尼系数增大时, 位移概率密度向中间偏移, 位移稳态时的概率密度峰值变大, 图形

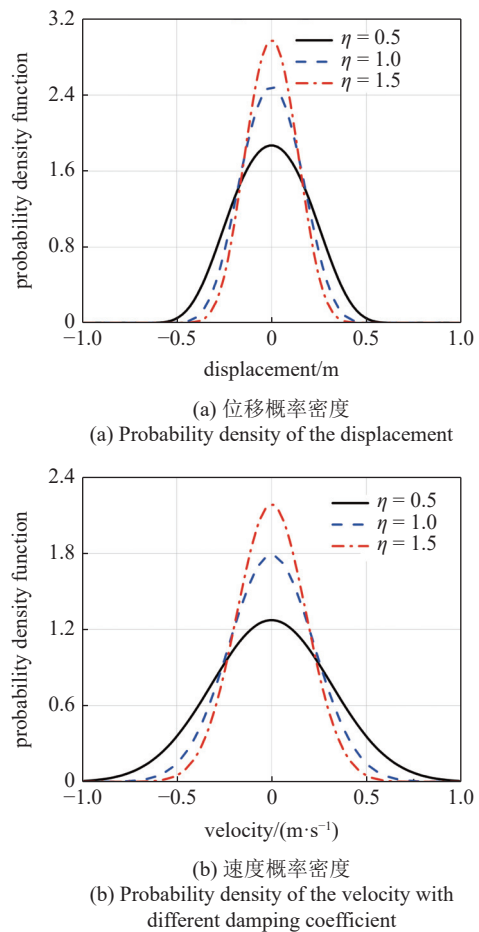


图 9 不同阻尼系数下的位移概率密度和速度概率密度

Fig. 9 Probability density of the displacement and probability density of the velocity with different damping coefficient

变得高且窄. 从图 9(b) 可以看出, 当阻尼系数增大时, 速度概率密度同样向中间偏移, 稳态时的概率密度峰值会变大, 图形变得高且窄. 图 10 也反映了上述现象. 对于输液管道系统来讲, 表示着阻尼系数越大, 系统可能发生的位移和速度越小.

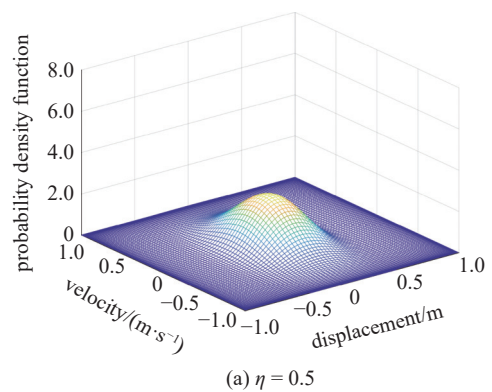


图 10 不同阻尼系数下的联合概率密度

Fig. 10 Joint probability density with different damping coefficients

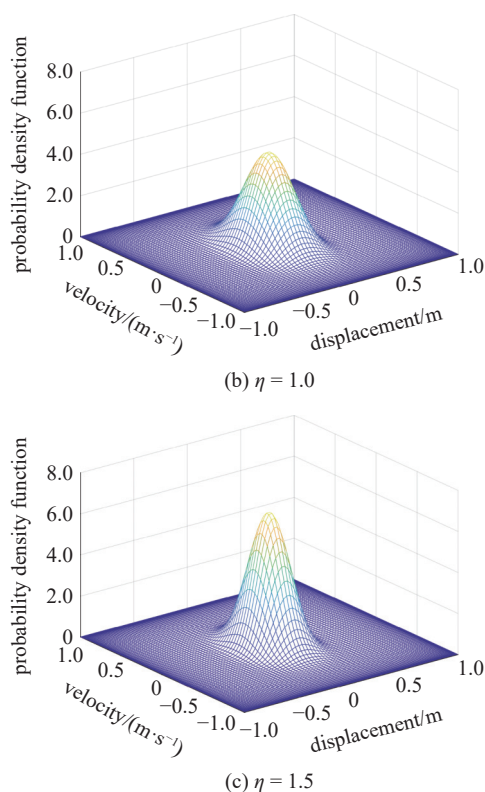


图 10 不同阻尼系数下的联合概率密度 (续)

Fig. 10 Joint probability density with different damping coefficients (continued)

5 结论

本文研究高斯白噪声激励下输液管道的随机动态响应. 采用路径积分法计算位移和速度的概率密度函数. 通过 Monte Carlo 方法验证路径积分法结果的正确性和有效性. 讨论了流速、激励强度和阻尼系数对输液管道系统位移概率密度函数和速度概率密度函数的影响. 得到了以下结论:

- (1) 采用路径积分法计算输液管道的随机振动响应是有效的;
- (2) 随着流速的增大, 系统振动时可能发生的最大位移变大, 而可能发生的最大速度不变;
- (3) 随着激励强度的增大, 系统振动时可能发生的最大位移和最大速度都变大;
- (4) 随着阻尼系数的增大, 系统振动时可能发生的最大位移和最大速度变小;
- (5) 当流速过大时, 系统会出现随机分岔, 此时位移概率密度曲线表现为双峰.

在后续的研究中将对不同截断阶数的收敛性分析和输液管道高阶模态的振动响应等问题进行进一步研究.

参 考 文 献

- 1 徐鉴, 杨前彪. 输液管模型及其非线性动力学近期研究进展. *力学进展*, 2004, 2: 182-194 (Xu Jian, Wang Qianbiao. Recent advances of pipe conveying fluid models and nonlinear dynamics. *Advances in mechanics*, 2004, 2: 182-194 (in Chinese))
- 2 徐鉴, 王琳. 输液管动力学分析和控制. 北京: 科学出版社, 2015 (Xu Jian, Wang Lin. *Dynamics and Control of Fluid-Conveying Pipe Systems*. Beijing: Science Press, 2015 (in Chinese))
- 3 王琳, 匡友弟, 黄玉盈等. 管振动与稳定性研究的新进展: 从宏观尺度到微纳尺度. *固体力学学报*, 2010, 31(5): 481-495 (Wang Lin, Kuang Youdi, Huang Yuying, et al. Recent progress in the study of vibration and stability of pipe conveying fluid: from macroscopic scale to micro-nano scale. *Chinese journal of solid mechanics*, 2010, 31(5): 481-495 (in Chinese))
- 4 Chen S. Forced vibration of a cantilevered tube conveying fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1970, 48(3B): 773-775
- 5 Lottati I, Kornecki A. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 109(2): 327-338
- 6 黄慧春, 张艳雷, 陈立群. 受迫振动的超临界输液管 Galerkin 数值模拟. *应用数学和力学*, 2014, 35(10): 1100-1106 (Huang Huichun, Zhang Yanlei, Chen Liqun. Galerkin numerical simulation of the supercritical pipe conveying fluid under forced vibration. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(10): 1100-1106 (in Chinese))
- 7 王乙坤, 王琳. 分布式运动约束下悬臂输液管的参数共振研究. *力学学报*, 2019, 51(2): 558-568 (Wang Yikun, Wang Lin. Parametric resonance of a cantilevered pipe conveying fluid subjected to distributed motion constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 51(2): 558-568 (in Chinese))
- 8 Ye SQ, Ding H, Wei S, et al. Non-trivial equilibriums and natural frequencies of a slightly curved pipe conveying supercritical fluid. *Ocean Engineering*, 2021, 227: 108899
- 9 张挺, 林震寰, 林通等. 内激励型振荡衰减流作用下输流管道动力不稳定分析. *振动与冲击*, 2021, 40(3): 284-290 (Zhang Ting, Lin Zhenhuan, Lin Tong, et al. Dynamic instability analysis of pipeline conveying fluid under action of internally excited oscillation attenuation flow. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(3): 284-290 (in Chinese))
- 10 颜雄, 魏莎, 毛晓晔等. 两端弹性支承输流管道固有特性研究. *力学学报*, 2022, 54(5): 1341-1352 (Yan Xiong, Wei Sha, Mao Xiaoye, et al. Study on natural characteristics of fluid-conveying pipes with elastic supports at both ends. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(5): 1341-1352 (in Chinese))
- 11 Wei S, Yan X, Fan X, et al. Vibration of fluid-conveying pipe with nonlinear supports at both ends. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2022, 43(6): 845-862
- 12 Liang F, Qian Y, Chen Y, et al. Nonlinear forced vibration of spinning pipes conveying fluid under lateral harmonic excitation. *International Journal of Applied Mechanics*, 2021, 13(9): 2150098
- 13 Zhou K, Dai HL, Wang L, et al. Modeling and nonlinear dynamics of cantilevered pipe with tapered free end concurrently subjected to axial internal and external flows. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 169: 108794
- 14 Guo X, Gao P, Ma H, et al. Vibration characteristics analysis of fluid-conveying pipes concurrently subjected to base excitation and pulsation excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*,

- 2023, 189: 110086
- 15 Zhai HB, Wu ZY, Liu YS, et al. Dynamic response of pipeline conveying fluid to random excitation. *Nuclear Engineering and Design*, 2011, 241(8): 2744-2749
- 16 Gan CB, Guo SQ, Lei H, et al. Random uncertainty modeling and vibration analysis of a straight pipe conveying fluid. *Nonlinear Dynamic*, 2014, 77(3): 503-519
- 17 Lotfan S, Fathi R, Etefagh MM. Size-dependent nonlinear vibration analysis of carbon nanotubes conveying multiphase flow. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 115: 723-735
- 18 Yang Y, Zhang Y. Random vibration response of three-dimensional multi-span hydraulic pipeline system with multipoint base excitations. *Thin-Walled Structures*, 2021, 166: 108124
- 19 Li W, Zhang H, Qu W. Stress response of a straight hydraulic pipe under random vibration. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, 194: 104502
- 20 Qu W, Zhang H, Li W, et al. Dynamic characteristics of a hydraulic curved pipe subjected to random vibration. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, 193: 104442
- 21 Sazesh S, Shams S. Vibration analysis of cantilever pipe conveying fluid under distributed random excitation. *Journal of Fluids and Structures*, 2019, 87: 84-101
- 22 Yu JS, Lin YK. Numerical path integration of a non-homogeneous Markov process. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, 39(9): 1493-1500
- 23 Yu JS, Cai GQ, Lin YK. A new path integration procedure based on Gauss-Legendre scheme. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, 32(4): 759-768
- 24 Masud A, Bergman LA. Application of multi-scale finite element methods to the solution of the Fokker-Planck equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(12-16): 1513-1526
- 25 Roberts JB, Spanos PD. Random Vibration and Statistical Linearization. Courier Dover Publications, 2003
- 26 Shinozuka M. Monte Carlo solution of structural dynamics. *Computers and Structures*, 1972, 2(5-6): 855-874
- 27 Wojtkiewicz SF, Johnson EA, Bergman LA, et al. Spencer, response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: Solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 168(1-4): 73-89
- 28 Huang ZL, Zhu WQ, Suzuki Y. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under combined harmonic and white-noise excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 238(2): 233-256
- 29 Yue X, Cui S, Pei B, et al. Responses of stochastic dynamical systems by the generalized cell mapping method with deep learning. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, 147: 104190
- 30 Wehner MF, Wolfer WG. Numerical evaluation of path-integral solutions to Fokker-Planck equations. III. Time and functionally dependent coefficients. *Physical Review A, General Physics*, 1987, 35(4): 1795-1801
- 31 Li X, Ding H, Chen LQ. Effects of weights on vibration suppression via a nonlinear energy sink under vertical stochastic excitations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 173: 109073
- 32 Xue JR, Zhang YW, Ding H, et al. Vibration reduction evaluation of a linear system with a nonlinear energy sink under a harmonic and random excitation. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2020, 41(1): 1-14
- 33 王亮, 景康康, 彭佳慧等. 非光滑变换下随机碰撞系统的路径积分算法. *山东大学学报(理学版)*, 2022, 57(3): 68-77 (Wang Liang, Jing Kangkang, Peng Jiahui, et al. Path integration method for the stochastic vibro-impact system under the non-smooth transformation. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2022, 57(3): 68-77 (in Chinese))
- 34 Zhu HT, Duan LL. Probabilistic solution of non-linear random ship roll motion by path integration. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, 83: 1-8
- 35 Zan WR, Xu Y, Metzler R, et al. First-passage problem for stochastic differential equations with combined parametric Gaussian and Lévy white noises via path integral method. *Journal of Computational Physics*, 2021, 435: 110264
- 36 Zan WR, Jia WT, Xu Y. Reliability of dynamical systems with combined Gaussian and Poisson white noise via path integral method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2022, 68: 103252
- 37 徐严钢, 朱海涛, 刘治国. 三维路径积分法的积分区间以及子区间数目选取方法研究. *应用力学学报*, 2021, 38(4): 1358-1365 (Xu Yangang, Zhu Haitao, Liu Zhiguo. Path integration method for the stochastic vibro-impact system under the non-smooth transformation. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2021, 38(4): 1358-1365 (in Chinese))
- 38 Zhang YH, Li YY, Kennedy D. An uncertain computational model for random vibration analysis of subsea pipelines subjected to spatially varying ground motions. *Engineering Structures*, 2019, 183: 550-561