

基于流形切空间插值的折叠翼参数化气动弹性建模¹⁾

詹玖榆 周兴华 黄锐²⁾

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘要 变体飞行器的气动弹性力学建模是当前先进飞行器设计的研究热点和难点. 然而传统的气动弹性动力学建模方法对于具有结构参变特性的变体飞行器气动弹性力学研究存在建模效率低、计算复杂等问题. 本研究提出了一种基于流形切空间插值的可折叠式变体机翼参数化气动弹性建模方法. 首先, 该方法建立若干个典型折叠角下的折叠翼结构有限元模型, 通过流形切空间插值方法建立折叠翼参数化结构动力学模型. 其次, 采用偶极子网格法得到参数化非定常气动力模型, 进而建立气动和结构相互耦合的折叠翼参数化气动弹性模型. 为了验证该参数化建模方法在折叠翼气动弹性分析中的准确性, 本文以一小展弦比折叠翼为研究对象, 从折叠翼自由振动时的参变模态特性、颤振边界预测两方面进行了算例验证, 并与直接计算方法进行了对比, 进一步验证了参数化气动弹性模型的有效性. 研究表明, 该参数化气动弹性模型对上述两类问题的计算精度与直接计算方法一致, 并且有着计算效率更高的优势.

关键词 颤振, 折叠翼, 参数化建模, 气动弹性力学

中图分类号: V215.3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-20-376

PARAMETRIC AEROELASTIC MODELING OF FOLDING WING BASED ON MANIFOLD TANGENT SPACE INTERPOLATION¹⁾

Zhan Jiuyu Zhou Xinhua Huang Rui²⁾

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract The parametric aeroelastic modeling of a morphing aircraft is a hot topic in the research field of morphing aircraft design. However, the traditional non-parametric aeroelastic dynamic modeling methods have some problems, such as low modeling efficiency and complex aeroelastic analysis for for aeroelastic research of morphing aircraft with structural parametric characteristics. In this paper, a parametric aeroelastic modeling method of folding wing based on the tangent space interpolation is proposed. Firstly, based on the structural finite element models of a folding wing at several folding angles, a parametric structural dynamic model of the folding wing is established by tangent space interpolation. Then, the parametric unsteady aerodynamics is computed by the Doublet Lattice method. At last, the parametric aeroelastic model of the folding wing is obtained by coupling the structural dynamics and unsteady aerodynamics. To verify the accuracy of the parameterized model in the aeroelastic calculation, a small aspect ratio folding wing is taken as the

2020-10-28 收稿, 2021-02-09 录用, 2021-02-09 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11972180, 12022203).

2) 黄锐, 教授, 主要研究方向: 飞行器结构动力学与控制. E-mail: ruihwang@nuaa.edu.cn

引用格式: 詹玖榆, 周兴华, 黄锐. 基于流形切空间插值的折叠翼参数化气动弹性建模. 力学学报, 2021, 53(4): 1103-1113

Zhan Jiuyu, Zhou Xinghua, Huang Rui. Parametric aeroelastic modeling of folding wing based on manifold tangent space interpolation.

Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(4): 1103-1113

research object. The dynamic characteristics including the natural frequencies, mode shapes, and flutter boundaries at different folding angles are efficiently calculated. In addition, the numerical results computed via the present parametric method are compared with the direct non-parametric method. The demonstration shows that the results from the parametric aeroelastic model is consistent with the direct method for the aeroelastic problems and has the advantage of higher calculation efficiency.

Key words flutter, folding wing, parametric modeling, aeroelasticity

引 言

近年来,世界航空界正着力发展具有飞行环境(如高度、速度、气候等)自适应、可执行多种任务(如巡航、盘旋、机动等)的变体飞行器.这类飞行器可根据飞行任务需要自主改变结构和气动布局,在复杂的飞行环境条件下保持良好的飞行性能^[1-5].在众多变体飞行器设计方案中,折叠翼变体飞行器因满足多任务作战需求和提高单任务执行效率的优势,受到了广泛的关注.然而,在机翼受控变体过程中,不仅非定常气动力会随着机翼形状改变而发生变化,机翼的惯性、弹性和阻尼特性也同时发生变化,极易诱发不同结构模态参与的参变颤振现象,给变体飞行器的飞行安全带来挑战.针对不同折叠构型下变体机翼的气动-结构耦合动力学系统的参变特性,如何建立以折叠角为参数的参数化气动弹性模型,在全参数空间内实现气动弹性力学行为的高效、高精度预测,是变体飞行器研制过程中亟待解决的动力学问题.

当前变体飞行器动力学建模研究可分为两大类:一类是多刚体动力学模型(如 Newton-Euler 方法^[6-8]、Lagrange 方法^[9-10]、Kane 方法^[11-13]等);另一类是柔性体动力学模型(如浮动坐标法^[14]、绝对节点坐标法^[15-16]等).相较于多刚体动力学模型,柔性体动力学模型更加贴近工程实际状况且能够应用于折叠翼的气动弹性分析,因此受到更广泛的关注.例如 Snyder 等^[17]研究了 Goland 折叠翼的颤振特性,发现折叠翼铰链刚度对变体机翼的颤振频率和颤振速度的影响较大. Selitrennik 和 Karpel^[18]对于快速变形的折叠翼系统提出了一种高效气动弹性建模方法.该方法采用虚拟质量法建立系统的结构动力学方程,并通过动力学方程和 CFD 技术相耦合的方式,建立了可折叠式变体机翼的气动弹性方程.数值结果表明,瞬态变形和气动载荷突变对折叠翼的气动弹性稳定性有着重要的影响.对于折叠翼内外铰链具有

双线性刚度的非线性气动弹性问题, Lee 等^[19]提出了一种可高效预测折叠翼亚临界极限环振荡的数值计算方法.

上述气动弹性动力学建模方法虽已经成功应用到可折叠式变体机翼的气动弹性建模中,但在气动弹性分析过程中仍需要针对不同折叠角进行重复地结构动力学建模、非定常气动力计算以及流固耦合建模,计算效率低下且难以分析可折叠式变体机翼在完整参数空间内的气动弹性力学行为.参数化气动弹性建模方法为高效、高精度分析可折叠式变体机翼的气动弹性力学行为提供了新的解决方案. Zhao 等^[20]和倪迎鸽等^[21]采用子结构综合和偶极子网格法构建了折叠翼的参数化气动弹性模型,分析了模态阻尼、折叠角、铰链刚度对折叠翼动力学特性的影响. Huang 等^[22]提出了一种参数化的气动伺服弹性建模方法,高效地获得了不同折叠角下的机翼气动伺服弹性数学模型,实现了颤振主动抑制的控制律设计和闭环气动伺服弹性分析.

然而,上述参数化建模方法均基于子结构综合方法,即根据折叠过程中内外翼结构动力学模型在全局坐标系中的约束关系,采用坐标变换实现全局坐标系下折叠翼结构动力学的快速生成.该参数化建模方法并未从根本上解决不同折叠构型下模态坐标不一致的难题.本文基于流形切空间插值方法,建立以折叠角为参数的折叠翼参变结构动力学模型,并耦合基于偶极子网格法的参数化非定常气动力模型,进而建立折叠翼的参变气动弹性模型.为了验证该参数化模型的准确性,本文选取一小展弦比折叠翼模型为研究对象,通过对结构自由振动分析和颤振边界的预测,考核本文提出的参数化建模方法.

1 折叠翼参数化气动弹性建模

不同于常规机翼的气动弹性分析,折叠翼的气动弹性分析需要在每一个角度重新建立结构动力学

模型和气动模型, 并将之耦合得到气动弹性模型. 为了高效、准确地分析折叠翼的气动弹性力学行为, 本节介绍基于流形切空间插值的参数化气动弹性建模方法. 模型建立过程分为参数化结构动力学建模、参数化气动力建模和参数化气动弹性建模 3 部分.

1.1 折叠翼模型描述及参数化建模目标

折叠翼的几何构型如图 1 所示, 折叠翼由机身和两个能独立旋转的内外翼组成. 折叠翼折叠过程如图 2 所示 (下标 α, β 和 γ 分别表示机身结构、内翼结构和外翼结构). 内翼可以进行 $0^\circ \sim 120^\circ$ 的旋转, 同时外翼始终保持水平. 机身和内外翼的材料均为铝板, 其杨氏模量为 71 GPa, 泊松比为 0.33, 密度为 $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 厚度分别为 2.0 mm, 1.0 mm 和 1.0 mm.

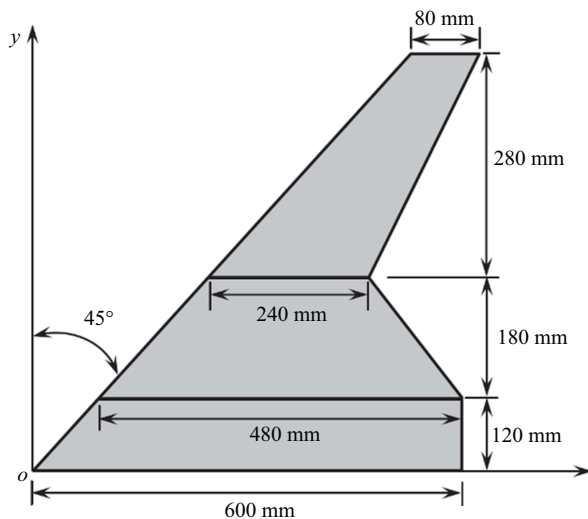


图 1 折叠翼几何尺寸及构型

Fig. 1 Configuration of folding wing

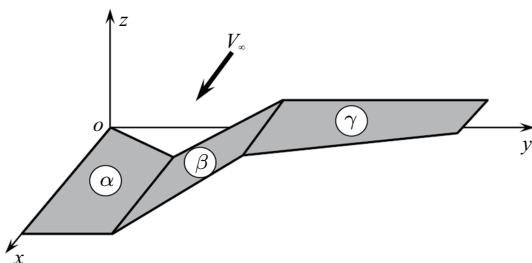


图 2 折叠翼折叠过程

Fig. 2 Morphing process of folding wing

通过有限元方法得到折叠翼机身、内翼和外翼的质量、刚度矩阵, 然后通过子结构综合法^[23-24]得

到折叠翼结构动力学方程如下

$$\mathbf{M}(\theta)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(\theta)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

式中, θ 是折叠角, $\mathbf{M}(\theta)$ 是折叠翼的质量矩阵, $\mathbf{K}(\theta)$ 是折叠翼的刚度矩阵, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为物理坐标, 值得注意的是, 本文没有考虑折叠翼的结构阻尼. 因为实际飞行器的阻尼特性难以获得, 所以建立参数化的阻尼模型更加困难. 由结构动力学方程可以得到折叠翼的振型矩阵 $\Phi(\theta) = [\varphi_1(\theta) \varphi_2(\theta) \cdots \varphi_n(\theta)]$, 取 $\Phi(\theta)$ 前 m 列得到降阶矩阵 $\varphi(\theta) = [\varphi_1(\theta) \varphi_2(\theta) \cdots \varphi_m(\theta)]$, 令 $\mathbf{x}(t) = \varphi(\theta)\xi(\theta, t)$, $\xi(\theta, t)$ 是广义坐标, 同时对式 (1) 左乘 $\varphi(\theta)^T$, 得到折叠翼的低维结构动力学方程

$$\mathbf{M}_r(\theta)\ddot{\xi}(\theta, t) + \mathbf{K}_r(\theta)\xi(\theta, t) = \mathbf{0} \quad (2)$$

折叠过程中质量矩阵、刚度矩阵、振型矩阵和气动力矩阵都发生了显著变化, 如果要对折叠翼进行气动弹性分析, 就需要对每个折叠角进行重复有限元建模和气动力建模, 建模效率低下. 参数化建模即给出相应参数 (如折叠角 θ) 能快速得到结构动力学模型和气动力模型, 这既能提高分析折叠翼气动弹性行为的效率, 也为后续折叠翼的颤振主动控制研究打下良好的基础.

1.2 基于流形切空间的结构动力学

矩阵流形是指具有特殊性质 (正定性、对称性、正交性或非奇异性) 的矩阵组成的流形. 在流形上插值得到的矩阵仍具有原矩阵的特殊性质. 正因为这一特点, 有学者提出基于流形矩阵的插值方法^[25-32]. 令 $\{\theta_i\}_{i=0}^{N-1}$ 表示由一系列折叠角度所组成的集合, 矩阵 \mathbf{P}_i 表示折叠角 θ_i 对应的系统矩阵 (如质量矩阵、刚度矩阵和振型矩阵), \mathbf{P}_i 张成的空间 S_i 可视为矩阵流形 \mathcal{M} 上的一点. 参数化建模即对于一个新参数 θ_N , 获得其对应的矩阵 \mathbf{P}_N . 显然, 矩阵流形插值是一个可行的方法, 但是通常矩阵流形不是“线性”的, 因此需要将矩阵流形上的点映射到“平直”的切空间, 在切空间中进行插值, 然后再从切空间映射回流形上, 其推导过程如下.

(1) 从集合 $\{\theta_i\}_{i=0}^{N-1}$ 中选取一点 θ_0 作为插值过程中的原点. 具体而言, 即选取点 S_0 作为原点.

(2) 流形 \mathcal{M} 在点 S_0 存在切空间 $T_{S_0}\mathcal{M}$, S_i 通过映射的方式由流形 \mathcal{M} 投影到切空间 $T_{S_0}\mathcal{M}$, 其投影点 X_i 对应的矩阵称为 \mathbf{T}_i . 本文将点 S_i 映射到切空间

X_i 的过程称为对数映射 \log_{S_0} , 对数映射对应的数学表达式为

$$\log_{S_0}(S_i) = X_i \quad (3)$$

(3) 切空间 $T_{S_0}\mathcal{M}$ 是“平直”的向量空间, 因此矩阵 Γ_N 可以由 Lagrangian 插值法对 Γ_i 插值得到. 计算过程为

$$\Gamma_N = \sum_{i=1}^{N-1} \prod_{i \neq j}^{N-1} \left(\frac{\theta_N - \theta_i}{\theta_j - \theta_i} \right) \Gamma_i \quad (4)$$

(4) 本文将点 X_i 映射到流形 \mathcal{M} 的过程称为指数映射 \exp_{S_0} , 指数映射对应的数学表达式为

$$\exp_{S_0}(X_i) = S_i \quad (5)$$

图 3 给出了流形切空间插值方法的示意图. 由于在参数化结构动力学建模中涉及两种不同流形, 上述的指数映射和对数映射使用抽象的数学表达式, 下面将具体给出这两种不同流形的插值方法.

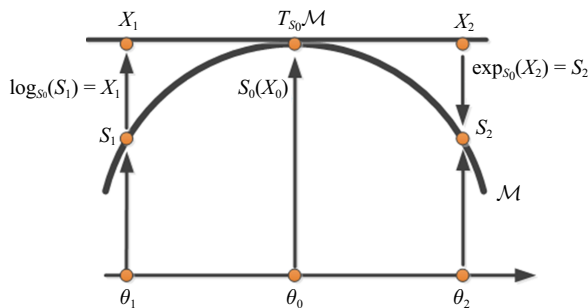


图 3 流形切空间插值示意图

Fig. 3 Sketch map of manifold tangent space interpolation

在折叠翼低维结构动力学方程中, $\mathbf{M}_r(\theta)$ 和 $\mathbf{K}_r(\theta)$ 均为 SPD (symmetric positive definite) 矩阵, 张成的空间为 SPD 流形. SPD 流形的对数映射为

$$\log_{S_0}(\mathbf{P}_i) = \logm(\mathbf{P}_0^{-1/2} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_0^{-1/2}) = \Gamma_i \quad (6)$$

指数映射为

$$\exp_{S_0}(\Gamma_i) = \mathbf{P}_0^{1/2} \text{expm}(\mathbf{P}_i) \mathbf{P}_0^{1/2} = \mathbf{P}_i \quad (7)$$

式中, \logm 和 expm 分别指矩阵对数和矩阵指数.

在气动弹性计算中, 还有必要对振型矩阵 $\varphi(\theta)$ 进行参数化建模. 但是 $\varphi(\theta)$ 是 $n \times m$ 维矩阵, 不再适用于 SPD 流形切空间插值. 同时 $\varphi(\theta)$ 的列向量表示折叠翼结构的某阶模态, 因此参数化振型矩阵的每

一列也应该表示折叠翼的某阶模态. 为得到参数化振型矩阵, 本文引入约束矩阵 $\phi(\theta)$, 其满足约束条件

$$\varphi(\theta)^T \phi(\theta) = \mathbf{I} \quad (8)$$

式中 \mathbf{I} 为 m 阶单位矩阵, 因为 $n \gg m$, 所以满足条件的 $\phi(\theta)$ 有无数多个, 为了保证插值结果的唯一性, 本文选取 $\varphi(\theta)^T$ 的 Moore-Penrose 广义逆作为约束矩阵 $\phi(\theta)$.

Grassmann 流形是一种特殊的流形, 其表示 m 维欧几里得空间中所有通过原点的 k 维平面的集合, 记作 $G(k, m)$. $\varphi(\theta)$ 每一列张成的特征子空间 $\{S_{ij}^\varphi\}_{i=0}^{N-1}$ 都可以视作流形 $G(1, N)$ 上一点, $\phi(\theta)$ 每一列张成的子空间也可以视作流形 $G(1, N)$ 上一点. 与质量矩阵插值不同, 振型矩阵插值是对每一列进行插值, 然后将插值得到的列向量组合起来, 下面介绍振型矩阵的参数化建模方法 (对于 $j = 1, 2, \dots, N$).

(1) 对特征子空间 $\{S_{ij}^\varphi\}_{i=0}^{N-1}$ 进行插值, Grassmann 流形对应的对数映射为

$$\left[\mathbf{I}_N - \varphi_{0j}(\varphi_{0j}^T \varphi_{0j})^{-1} \varphi_{0j}^T \right] \varphi_{ij} (\varphi_{0j}^T \varphi_{0j})^{-1/2} (\varphi_{0j}^T \varphi_{0j})^{1/2} = \mathbf{U}_i \Sigma_i \mathbf{W}_i^T \quad (\text{thin SVD}) \quad (9)$$

$$\log_{S_0}(S_{ij}) = \mathbf{U}_i \tan^{-1}(\Sigma_i) \mathbf{W}_i^T = \Gamma_i \quad (10)$$

指数映射为

$$\Gamma_i = \mathbf{U}_i \Sigma_i \mathbf{W}_i^T \quad (\text{thin SVD}) \quad (11)$$

$$\exp_{S_0}(X_i) = \varphi_{0j}(\varphi_{0j}^T \varphi_{0j})^{-1/2} \mathbf{W}_i \cos(\Sigma_i) + \mathbf{U}_i \sin(\Sigma_i) \quad (12)$$

式中, \mathbf{I}_N 表示 N 阶单位矩阵, φ_{ij} 表示振型矩阵 $\varphi(\theta_i)$ 对应的第 j 列 $\varphi_j(\theta_i)$, thin SVD 与常规 SVD 方法不同, 其中 \mathbf{U}_i 为 $m \times n$ 维矩阵, Σ_i 为 $n \times n$ 维矩阵, \mathbf{W}_i 为 $n \times n$ 维矩阵.

(2) 通过 Gram-Schmidt 正交化方法使得 φ_{Nj} 满足正交约束条件 $\varphi_{Nj}^T \varphi_{Nl} = 0$ ($l = 1, 2, \dots, j-1$), 式中 φ_{ij} 表示 $\varphi(\theta_i)$ 的第 j 列.

(3) 与 (1) 中相似的方法对子空间 $\{S_{ij}^\phi\}_{i=0}^{N-1}$ 进行插值.

(4) 通过 Gram-Schmidt 正交化方法使得 ϕ_{Nj} 满足正交约束条件 $\varphi_{Nj}^T \phi_{Nl} = 0$ ($l = 1, 2, \dots, j-1$) 且满足 $\varphi_{Nj}^T \phi_{Nj} = 1$.

(5) 对 ϕ_{Nj} 和 φ_{Nj} 进行缩放使得其 2 范数大小与 ϕ_{ij} 和 φ_{ij} 的 2 范数大小一致. 最后得到参数化振型矩阵 $\varphi_N = [\varphi_{N1} \ \varphi_{N2} \ \dots \ \varphi_{Nm}]$.

1.3 参数化气动建模

本文基于偶极子网格法 (DLM) 建立折叠翼的参数化非定常气动模型. 偶极子网格法通过求解无量纲法洗速度与压差系数的函数来确定空气动力影响系数, 从而获得气动网格上的气动力, 计算方程如下

$$\bar{\mathbf{W}}_{3/4} = \mathbf{D}_{\text{aic}} \bar{\mathbf{C}}_p \quad (13)$$

式中, $\bar{\mathbf{W}}_{3/4}$ 是机身、内翼、外翼的每个气动网格控制点处的无量纲法洗速度, $\bar{\mathbf{C}}_p$ 是网格的压差系数, \mathbf{D}_{aic} 是空气动力影响系数矩阵, 与来流马赫数以及折合频率存在一定的函数关系. 对三段折叠翼模型, 每个升力面的压差系数可以由下式求出

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_p^\alpha \\ \bar{\mathbf{C}}_p^\beta \\ \bar{\mathbf{C}}_p^\gamma \end{Bmatrix} = (\mathbf{D}_{\text{aic}})^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\alpha \\ \bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\beta \\ \bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\gamma \end{Bmatrix} \quad (14)$$

作用在机翼上的气动力即为动压、翼面面积和压差系数矩阵的乘积. 式 (14) 中的法洗速度向量 $\bar{\mathbf{W}}_{3/4}$ 与气动网格节点的位移 \mathbf{X} 有关. 对于内翼可以旋转的折叠翼模型, 其法洗速度向量 $\bar{\mathbf{W}}_{3/4}$ 可以表示成折叠角角度和节点位移的函数.

\mathbf{u}_n^α 是从节点位移向量 \mathbf{X} 中提取出来的, 机身 α 上网格节点的法向位移

$$\mathbf{u}_n^\alpha = \mathbf{G}_n^\alpha \mathbf{X} \quad (15)$$

通过样条插值, 空气动力网格点的位移 $\mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha$ 以及沿流向倾斜角 $\mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha$ 与 \mathbf{u}_n^α 有关

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha \mathbf{u}_n^\alpha = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha \mathbf{G}_n^\alpha \mathbf{X} \\ \mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha \mathbf{u}_n^\alpha = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha \mathbf{G}_n^\alpha \mathbf{X} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$\mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha$ 和 $\mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha$ 是通过无限板样条法所求得的样条矩阵, 其目的是将有限元节点的位移转变成气动网格点的位移与斜率, 实现机翼的流固耦合过程. 同时, 空气动力单元控制点处的位移 $\mathbf{u}_{a(3/4)}^\alpha$ 以及沿流向斜率 $\mathbf{u}_{a(3/4)}^\alpha$ 可以近似为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{a(3/4)}^\alpha \approx \mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha + \mathbf{C}_\Delta^\alpha \mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha \\ \mathbf{u}_{a(3/4)}^\alpha \approx \mathbf{u}_{a(1/2)}^\alpha \end{Bmatrix} \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{C}_\Delta^\alpha = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1^\alpha & & & \\ & x_2^\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n^\alpha \end{bmatrix} \quad (18)$$

符号 x_i^α 表示第 i 个空气动力网格的顺气流局部平均弦长及网格点与控制点的距离. 于是可以得到气动网格控制点处的位移与节点位移的关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{a(3/4)}^\alpha = (\mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha + \mathbf{C}_\Delta^\alpha \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha) \mathbf{G}_n^\alpha \mathbf{X} \\ \mathbf{u}_{a(3/4)}^\alpha = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha \mathbf{G}_n^\alpha \mathbf{X} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

基于机翼升力面做谐波振荡运动的假设, 有如下离散形式的边界条件

$$\bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{a(3/4)}^\alpha}{\partial x} + \frac{ik}{b} \bar{\mathbf{u}}_{a(3/4)}^\alpha \quad (20)$$

式中, b 表示半弦长, 可以获得机身上无量纲法洗速度向量 $\bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\alpha$ 和结构节点物理位移 $\bar{\mathbf{X}}$ 的关系

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\alpha &= \bar{\mathbf{u}}_{a(3/4)}^\alpha + \frac{ik}{b} \bar{\mathbf{u}}_{a(3/4)}^\alpha = \\ & \left[\mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha + \mathbf{C}_\Delta^\alpha \mathbf{G}_{a(1/2)}^\alpha) \right] \mathbf{G}_n^\alpha \bar{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (21)$$

同样地, 外翼的无量纲法洗速度 $\bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\gamma$ 和结构物理位移 $\bar{\mathbf{X}}$ 的表达式如下

$$\bar{\mathbf{W}}_{3/4}^\gamma = \left[\mathbf{G}_{a(1/2)}^\gamma + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{a(1/2)}^\gamma + \mathbf{C}_\Delta^\gamma \mathbf{G}_{a(1/2)}^\gamma) \right] \mathbf{G}_n^\gamma \bar{\mathbf{X}} \quad (22)$$

在计算内翼表面的气动力时, 需要提取的也是法向的节点位移, 但当内翼的旋转后, 在局部坐标下的内翼节点法向位移却是其全局坐标系下 y, z 方向位移的函数. 于是通过 \mathbf{G}_y^β 和 \mathbf{G}_z^β 从位移向量 \mathbf{X} 中提取出内翼节点的 y, z 方向的位移 \mathbf{u}_y^β 和 \mathbf{u}_z^β

$$\mathbf{u}_y^\beta = \mathbf{G}_y^\beta \mathbf{X}, \quad \mathbf{u}_z^\beta = \mathbf{G}_z^\beta \mathbf{X} \quad (23)$$

将内翼 β 在局部坐标系下的法向位移写成与折叠角 θ 有关的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^\beta &= \mathbf{u}_z^\beta \cos \theta - \mathbf{u}_y^\beta \sin \theta = \\ & (\mathbf{G}_z^\beta \cos \theta - \mathbf{G}_y^\beta \sin \theta) \mathbf{X} = \mathbf{G}_n^\beta(\theta) \mathbf{X} \end{aligned} \quad (24)$$

于是气动网格点的位移以及顺流向的倾斜角可以表示成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{a(1/2)}^\beta = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\beta \mathbf{u}_n^\beta = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\beta \mathbf{G}_n^\beta(\theta) \mathbf{X} \\ \mathbf{u}_{a(1/2)}^\beta = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\beta \mathbf{u}_n^\beta = \mathbf{G}_{a(1/2)}^\beta \mathbf{G}_n^\beta(\theta) \mathbf{X} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

使用离散形式的边界条件. 内翼的无量纲法洗速度可以写成

$$\bar{W}_{3/4}^\beta = \left[\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\beta + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\beta + \mathbf{C}_\Delta^\beta \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\beta) \right] \mathbf{G}_n^\beta(\theta) \bar{X} \quad (26)$$

将上文推导的各个翼段的法洗速度代入式 (14) 中, 可以得到不同折叠角下机翼模型的完整压差系数矩阵

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_p^\alpha \\ \bar{C}_p^\beta \\ \bar{C}_p^\gamma \end{Bmatrix} = (\mathbf{D}_{\text{aic}})^{-1} \begin{Bmatrix} \left[\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\alpha + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\alpha + \mathbf{C}_\Delta^\alpha \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\alpha) \right] \mathbf{G}_n^\alpha \\ \left[\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\beta + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\beta + \mathbf{C}_\Delta^\beta \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\beta) \right] \mathbf{G}_n^\beta(\theta) \\ \left[\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\gamma + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\gamma + \mathbf{C}_\Delta^\gamma \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\gamma) \right] \mathbf{G}_n^\gamma \end{Bmatrix} X \quad (27)$$

最后, 作用在空气动力网格上的气动力向量可由下式给出

$$\mathbf{F}_{\text{aero}} = q_d \begin{bmatrix} \mathbf{S}^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}^\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_p^\alpha \\ \bar{C}_p^\beta \\ \bar{C}_p^\gamma \end{Bmatrix} \quad (28)$$

其中, \mathbf{S}^α , \mathbf{S}^β 和 \mathbf{S}^γ 是三段机翼的面积. $q_d = \rho_\infty V_\infty^2 / 2$ 是动压, ρ_∞ 是大气密度, V_∞ 是来流速度.

采用 DLM 方法计算的气动力是作用于气动网格的 1/4 弦线的中点处, 如果气动力移动到网格点, 为了平衡就会产生一个气动力矩. 这个力矩 \mathbf{M}_{aero} 可以写成

$$\mathbf{M}_{\text{aero}} = q_d \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\Delta^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_\Delta^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_\Delta^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}^\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{C}_p^\alpha \\ \bar{C}_p^\beta \\ \bar{C}_p^\gamma \end{Bmatrix} \quad (29)$$

而气动力所作的虚功可以写成

$$\delta W_a = \delta \mathbf{u}_{\alpha(1/2)}^\top \mathbf{F}_{\text{aero}} - \delta \mathbf{u}_{\alpha(1/2)}^\top \mathbf{M}_{\text{aero}} = \delta \mathbf{X}^\top \mathbf{F}_a \quad (30)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \dot{X}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ -\bar{\mathbf{M}}_r(\theta)^{-1} (\mathbf{K}_r(\theta) - q_d \mathbf{A}_{s0}) & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \bar{\mathbf{M}}_r(\theta)^{-1} q_d \frac{b}{V} \mathbf{A}_1 & q_d \bar{\mathbf{M}}_r(\theta)^{-1} \mathbf{D} \\ \mathbf{E}_s & \frac{V}{b} \mathbf{R} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t) \\ X_a \end{Bmatrix} \quad (37)$$

\mathbf{F}_a 是作用在结构网格点上的等效力向量, 于是我们得到了由气动力引起的作用在个有限元节点上的参数化的空气动力等效力, 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a(k, \mathbf{M}_\infty, \theta, X) &= q_d \mathbf{G}_n^\top(\theta) (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\top - \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\top \mathbf{C}_\Delta) \cdot \\ &\quad \mathbf{S} \bar{\mathbf{D}}_{\text{aic}} \left[\mathbf{G}_{\alpha(1/2)} + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{C}_\Delta \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}) \right] \mathbf{G}_n(\theta) X \end{aligned} \quad (31)$$

1.4 参数化的折叠翼气动弹性模型

模态空间下, 折叠翼参数化气动弹性方程如下

$$\mathbf{M}_r(\theta) \ddot{\xi}(t) + \mathbf{K}_r(\theta) \xi(t) + q_d \mathbf{Q}_r(\theta) \xi(t) = \mathbf{0} \quad (32)$$

式中 $\mathbf{Q}_r(\theta)$ 为广义坐标下的气动力, 其具体形式如下

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_r(\theta) &= \varphi(\theta)^\top \mathbf{G}_n^\top(\theta) (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\top - \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}^\top \mathbf{C}_\Delta) \mathbf{S} \cdot \\ &\quad \bar{\mathbf{D}}_{\text{aic}} \left[\mathbf{G}_{\alpha(1/2)} + \frac{ik}{b} (\mathbf{G}_{\alpha(1/2)} + \mathbf{C}_\Delta \mathbf{G}_{\alpha(1/2)}) \right] \cdot \\ &\quad \mathbf{G}_n(\theta) \varphi(\theta) \end{aligned} \quad (33)$$

对使用 DLM 所计算的频域气动力进行有理函数近似, 其拉氏域下的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_r(\theta) &= \mathbf{A}_0 + \frac{b}{V} \mathbf{A}_1 s + \frac{b^2}{V^2} \mathbf{A}_2 s^2 + \\ &\quad \mathbf{D} \left(\mathbf{I}_s - \frac{V}{b} \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (34)$$

将式 (34) 代入式 (32), 可得如下形式的气动弹性方程

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{M}_r(\theta) - q_d \frac{b^2}{V^2} \mathbf{A}_2 \right) \ddot{\xi}(t) - q_d \frac{b}{V} \mathbf{A}_1 \dot{\xi}(t) + \\ &\quad (\mathbf{K}_r(\theta) - q_d \mathbf{A}_{s0}) \xi(t) - q_d \mathbf{D} X_a = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (35)$$

式中, X_a 为气动力滞后根, 与其导数 \dot{X}_a 的关系如下

$$\dot{X}_a = \frac{V}{b} \mathbf{R} X_a + \mathbf{E}_s \dot{\xi} \quad (36)$$

式 (35) 转化为如下形式的状态空间模型

$$\bar{M}_r(\theta) = \left(M_r(\theta) - q_d \frac{b^2}{V^2} A_2 \right) \quad (38)$$

通过参数化的状态空间方程, 可求解不同风速、不同折叠角下的气动弹性系统的响应, 也可以进行气动弹性稳定性分析.

2 算例验证

本节以小展弦比折叠翼模型为研究对象, 分别从结构动力学和气动弹性稳定性两个方面验证本文所提出的参数化建模方法的准确性. 结构动力学模拟方面, 重点关注参数化模型预测固有频率、固有振型等结构特性随折叠角的变化规律. 气动弹性稳定性分析方面, 预测折叠翼的颤振临界速度和颤振频率随折叠角变化的规律.

2.1 折叠翼结构动力学特性分析

参数化结构动力学模型的准确性是变体飞行器参数化气动弹性建模的前提. 本文首先建立了 0°, 10°, 25°, 50°, 80°, 100° 和 120° 七个折叠角下的折叠翼有限元模型, 通过流形切空间插值得到基于以上角度的参数化结构动力学模型.

如图 4 所示, 参数化建模方法计算得到的前 8 阶模态频率和直接法计算得到的前 8 阶模态频率吻合较好. 相较于其他折叠角度, 基于流形切空间插值的参数化建模方法在预测 115° 折叠角下的第 8 阶固有频率 (预测频率为 101.27 Hz) 与直接法 (计算频率为 102.86 Hz) 存在一定差异, 误差约为 1.5%, 仍处于工程可接受范围.

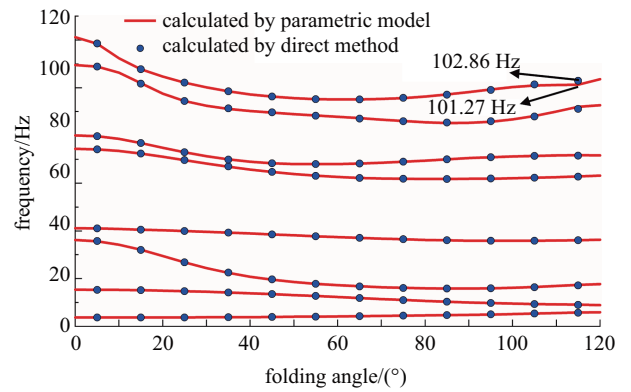


图 4 参数化建模方法与直接法计算频率对比
Fig. 4 Comparison of natural frequency between parametric model and direct method

除了结构固有频率之外, 折叠翼的结构固有振型对广义气动力的计算以及气动弹性分析的精度也有重要影响. 图 5 给出了 5° 折叠角下参数化建模方法得到的固有振型与直接法得到的振型 (蓝色为参数化建模计算的振型, 红色为直接法计算的振型) 的对比. 对比结果表明, 参数化建模方法所计算的前 8 阶固有振型与直接法的计算结果吻合较好.

MAC (modal assurance criterion) 值是检验振型函数预测误差的重要指标. 为了验证参数化建模方法所预测的固有振型与真实振型的偏差, 本文分别给出了在 5°, 30°, 65° 和 105° 折叠角下折叠翼前 8 阶固有振型的 MAC 值分布. 如图 6 所示, 除第 6 阶弹性模态外, 其余各阶模态 MAC 值均大于 0.99. 第 6 阶模态出现误差的原因是该插值方法在两个较小的参数值之间可能形成拐点, 使得插值结果与真实值产生较大差异.

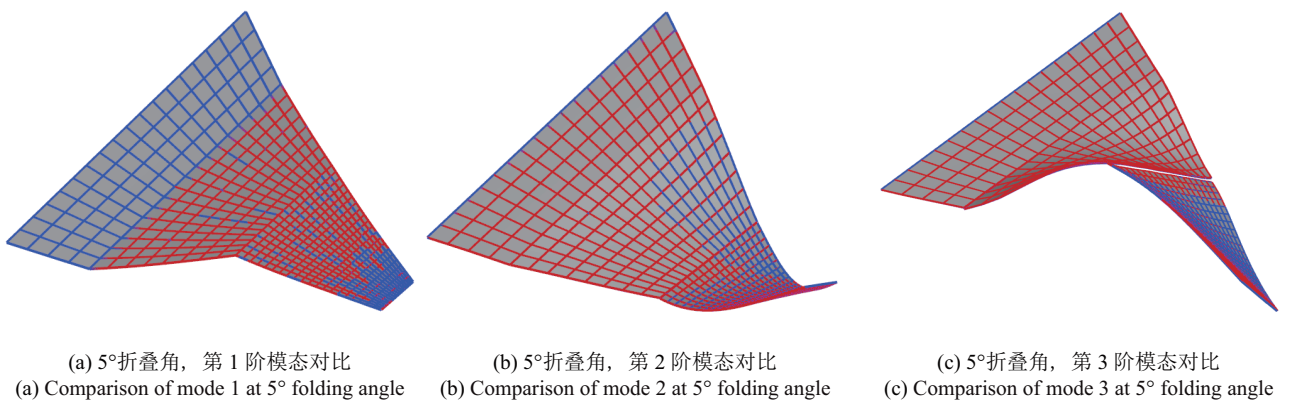


图 5 5° 折叠角时, 各阶模态对比

Fig. 5 Comparison of modes at 5° folding angle

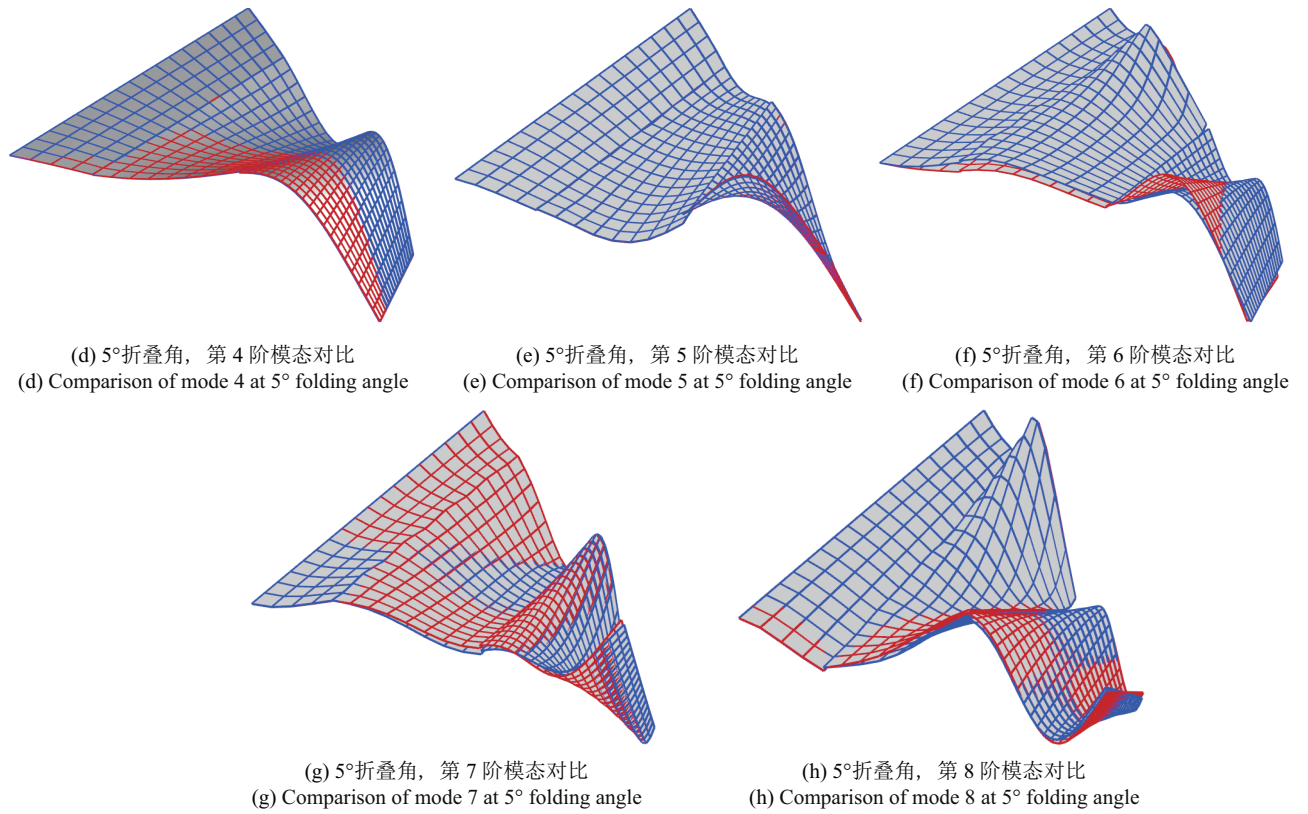


图 5 5° 折叠角时, 各阶模态对比 (续)

Fig. 5 Comparison of modes at 5° folding angle (continued)

2.2 折叠翼参数化气动弹性建模分析

为了进一步验证该参数化气动弹性模型的准确性, 本文采用参数化建模方法计算了折叠翼的颤振边界. 如图 7 所示, 参数化气动弹性模型成功预测了折叠翼颤振边界随折叠角的变化规律: 随着折叠角变化, 折叠翼的颤振模态发生了复杂的模态切换现象.

在 0° ~ 30° 折叠角区间, 折叠翼的第 2 阶模态发生颤振. 当折叠角位于 35° ~ 80° 区间时, 结构的第 3 阶模态发生颤振. 在 85° ~ 105° 折叠角区间, 折叠翼发生颤振的是第 4 阶模态. 当机翼折叠角进一步增大到 110° ~ 120° 范围时, 折叠翼的第 3 阶模态再次发生颤振.

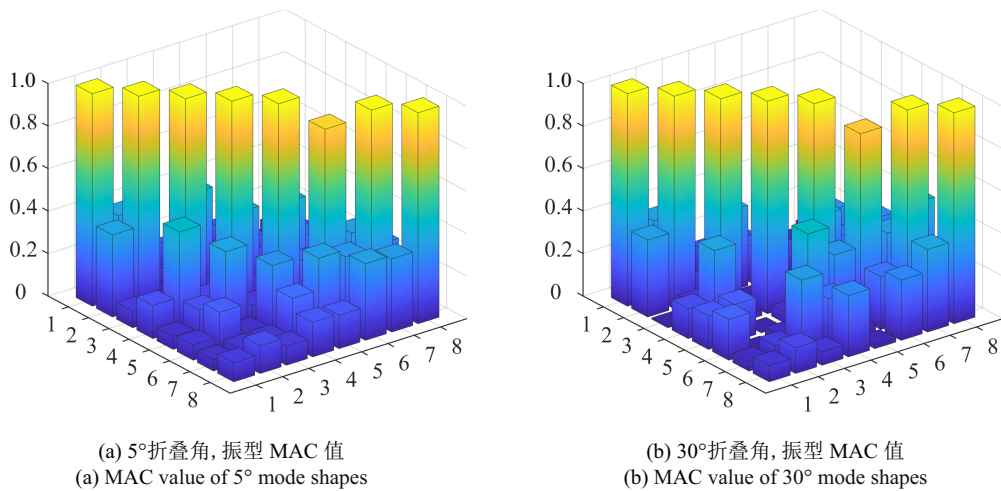


图 6 4 个典型角度下振型的 MAC 值

Fig. 6 MAC values of mode shapes under four specific folding angles

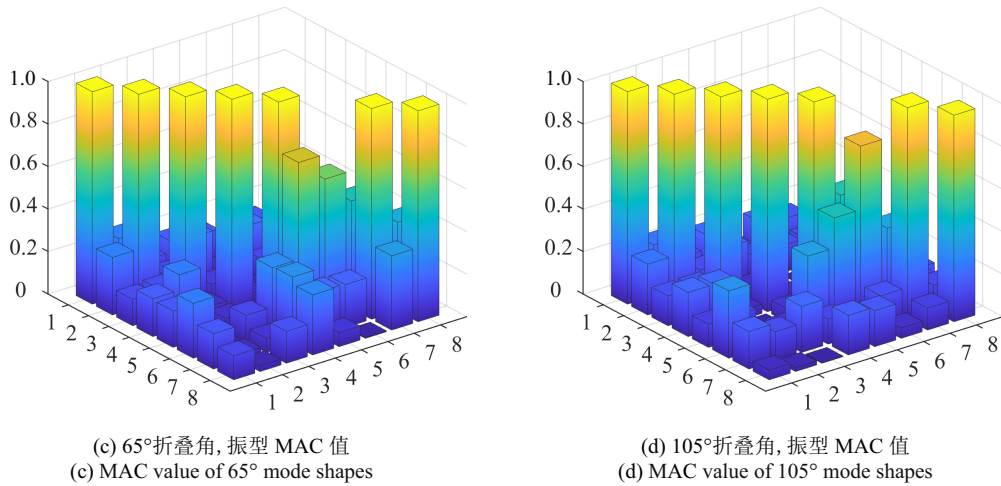


图 6 4 个典型角度下振型的 MAC 值 (续)

Fig. 6 MAC values of mode shapes under four specific folding angles (continued)

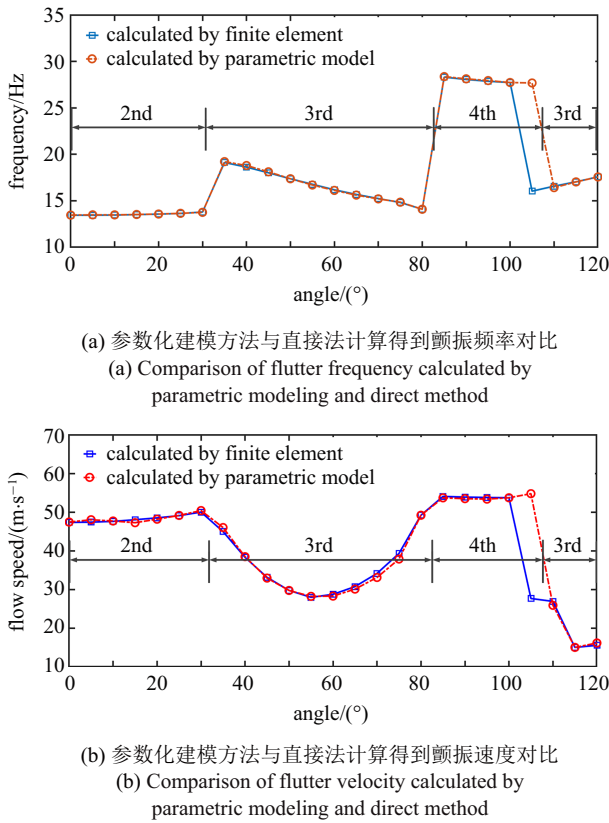


图 7 参数化建模方法与直接法气动弹性计算对比
Fig. 7 Comparison between parametric modeling and direct method in aeroelasticity

此外, 本文将参数化气动弹性模型对颤振边界的预测结果与直接法预测的结果进行了对比研究. 如图 7 所示, 在大部分折叠角下, 参数化折叠翼模型所预测的颤振临界速度和颤振频率均与直接计算结果吻合较好, 频率误差最大值小于 1%, 颤振临界速度误差最大值低于 4%. 然而, 图示结果表明, 在 105° 的

折叠角处, 参数化建模方法所预测的颤振临界速度和颤振频率与直接法计算结果存在较大差异. 从颤振频率随折叠角变化的曲线 (图 7(a)) 来看, 发生较大差异的主要原因是参数化建模方法预测的颤振模态分支与直接法计算得到的颤振模态分支不同. 为了深入探究引起颤振模态分支变化的原因, 图 8 分别给出了 105° 折叠角下直接法和参数化建模方法计算得到的气动弹性系统根轨迹分布图. 如图所示, 该折叠角下两种计算方法所预测的根轨迹分布图相似, 主要差异在于直接法预测了两种颤振形态. 第一类颤振形态是第 4 阶模态发生颤振, 颤振临界速度是 54.6 m/s; 第二类颤振形态是第 3 阶模态发生小阻尼颤振, 颤振临界速度为 32.3 m/s. 本文提出的参数化建模方法预测的第 4 阶模态发生颤振的临界速度是 54.2 m/s, 与直接法结果吻合较好.

和直接法相比, 本文提出的基于流形切空间插值的参数化建模方法无须重复进行固有模态分析, 计算效率远高于直接法. 表 1 展示了使用两种方法分别计算图 7 所示的颤振边界所需的时间成本对比. 直接法是指通过 MSC.Nastran 对给定折叠角度下的折叠翼进行有限元模型的设计, 并使用商业软件对气动和结构网格进行插值、进行非定常气动力的计算以获得此构型下的颤振速度; 而参数化建模的方法不需要手动地重复有限元建模、结构和气动插值, 仅仅改变参数即可得到此时结构的刚度、质量矩阵, 单次时间为 0.7 s, 可忽略不计, 因此其总时间花费仅为传统方法 54.3%.

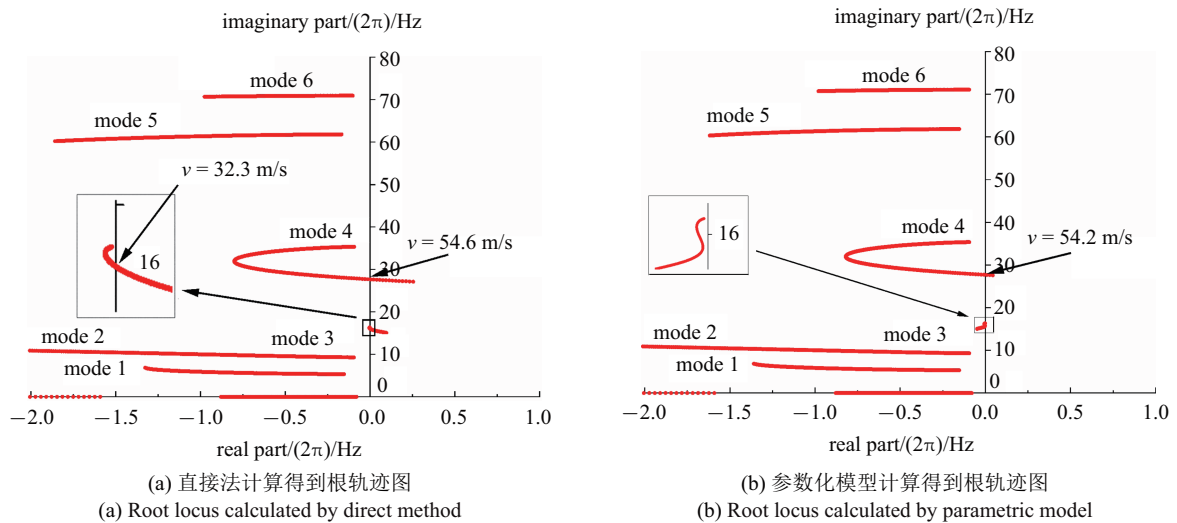


图 8 参数化模型与直接法计算根轨迹图对比

Fig. 8 Comparison of root locus calculated by parametric modeling and direct method

表 1 两种方法计算时间对比

Table 1 Comparison of the time cost for the two methods

Items	Direct method/h	Parametric modeling/h
finite-element modeling	2 (0.08 × 25)	—
aerodynamic-structure interpolation	0.75 (0.03 × 25)	—
unsteady aerodynamic force and flutter boundary calculation	3 (0.12 × 25)	3.125 (0.125 × 25)
total	5.75	3.125

3 结论

本文提出了一种基于流形切空间插值的折叠翼参数化气动弹性建模方法, 实现了折叠翼的气动弹性模型的高效建立. 相较于现有的参数化建模方法, 本文提出的参变建模方法有效解决了变体过程中存在的模态坐标不一致性. 为了验证该参数化模型在预测折叠翼气动弹性力学行为的准确性, 本文以折叠翼为研究对象, 分别从折叠翼结构固有频率、模态振型、颤振边界等方面进行了算例验证. 结果表明, 该参数化建模方法可高效、高精度预测可折叠式变体机翼的固有频率和颤振边界随折叠角的演变规律. 在后续工作中, 可将该方法扩展到解决快速变体过程的时变动力学建模, 重点围绕模态坐标一致性问题及时域非定常气动力计算等方面开展研究.

参 考 文 献

1 武宇飞, 龙腾, 毛能峰. 跨介质变体飞行器设计优化技术进展.

- 战术导弹技术, 2020, 41(4): 29-40 (Wu Yufei, Long Teng, Mao Nengfeng. Review of trans-media morphing flight vehicle design optimization techniques. *Tactical Missile Technology*, 2020, 41(4): 29-40 (in Chinese))
- 2 叶友达, 张涵信, 蒋勤学等. 近空间高超声速飞行器气动特性研究的若干关键问题. *力学学报*, 2018, 50(6): 1292-1310 (Ye Youda, Zhang Hanxin, Jiang Qinxue, et al. Some key problems in the study of aerodynamic characteristics of near-space hypersonic vehicles. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(6): 1292-1310 (in Chinese))
- 3 冯金富, 胡俊华, 齐铎. 水空跨介质飞行器发展需求及其关键技术. *空军工程大学学报 (自然科学版)*, 2019, 20(3): 8-13 (Feng Jinfu, Hu Junhua, Qi Du. Study on development needs and key technologies of air-water trans-media vehicle. *Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition)*, 2019, 20(3): 8-13 (in Chinese))
- 4 Barbarino S, Bilgen O, Ajaj RM, et al. A review of morphing aircraft. *Journal of Intelligent Material Systems & Structures*, 2011, 22(9): 823-877
- 5 廖波, 袁昌盛, 李永泽. 折叠机翼无人机的发展现状和关键技术研究. *机械设计*, 2012, 29(4): 5-9 (Liao Bo, Yuan Changsheng, Li Yongze. Development status and key technologies of folding-wing unmanned air vehicle. *Journal of Machine Design*, 2012, 29(4): 5-9 (in Chinese))

- 6 杨博, 窦婧文, 曹振. 变体飞行器的气动结构对控制系统的影响. 弹道学报, 2020, 32(1): 83-90, 96 (Yang Bo, Dou JingWen, Cao Zheng. Influence of aerodynamic structure of morphing aircraft on the control system. *Journal of Ballistics*, 2020, 32(1): 83-90, 96 (in Chinese))
- 7 Yue T, Wang L, Ai J. Longitudinal linear parameter varying modeling and simulation of morphing aircraft. *Journal of Aircraft*, 2013, 50(6): 1673-1681
- 8 郭建国, 陈惠娟, 周军等. 非对称伸缩翼飞行器动力学建模及特性分析. 系统工程与电子技术, 2016, 38(8): 1951-1957 (Guo Jianguo, Chen Huijuan, Zhou Jun, et al. Dynamic modeling and characteristic analysis of asymmetric span morphing wing. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(8): 1951-1957 (in Chinese))
- 9 罗操群, 孙加亮, 文浩等. 多刚体系统分离策略及释放动力学研究. 力学学报, 2020, 52(2): 503-513 (Luo Caoqun, Sun Jialiang, Wen Hao, et al. Research on separation strategy and deployment dynamics of a space multi-rigid-body system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(2): 503-513 (in Chinese))
- 10 Shi RQ, Song JM. Dynamics and control for an in-plane morphing wing. *Aircraft Engineering & Aerospace Technology*, 2013, 85(1): 24-31
- 11 宋慧心, 金磊. 折叠翼飞行器的动力学建模与稳定控制. 力学学报, 2020, 52(6): 1548-1559 (Song HuiXin, Jin Lei. Dynamic modeling and stability control of folding wing aircraft. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(6): 1548-1559 (in Chinese))
- 12 Obradovic B, Subbarao K. Modeling of flight dynamics of morphing wing aircraft. *Journal of Aircraft*, 2011, 48(2): 391-402
- 13 张杰, 吴森堂. 一种变体飞行器的动力学建模与动态特性分析. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(1): 58-64 (Zhang Jie, Wu Sentang. Dynamic modeling for a morphing aircraft and dynamic characteristics analysis. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015, 41(1): 58-64 (in Chinese))
- 14 Hu W, Yang ZC, Gu YS. Aeroelastic study for folding wing during the morphing process. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 365: 216-229
- 15 李海泉, 梁建勋, 吴爽等. 空间机械臂柔性捕获机构建模与实验研究. 力学学报, 2020, 52(5): 1465-1474 (Li Haiquan, Liang Jianxun, Wu Shuang, et al. Dynamics modeling and experiment of a flexible capturing mechanism in a space manipulator. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(5): 1465-1474 (in Chinese))
- 16 郭祥, 靳艳飞, 田强. 随机空间柔性多体系统动力学分析. 力学学报, 2020, 52(6): 1730-1742 (Guo Xiang, Jin Yanfei, Tian Qiang. Dynamics analysis of stochastic spatial flexible multibody system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(6): 1730-1742 (in Chinese))
- 17 Snyder MP, Sanders B, Eastep FE, et al. Vibration and flutter characteristics of a folding wing. *Journal of Aircraft*, 2009, 46(3): 791-799
- 18 Selitreannik E, Karpel M, Levy Y. Computational aeroelastic simulation of rapidly morphing air vehicles. *Journal of Aircraft*, 2013, 49(6): 1675-1686
- 19 Lee DH, Chen PC. Nonlinear aeroelastic studies on a folding wing configuration with free-play hinge nonlinearity//47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2006
- 20 Zhao YH, Hu HY. Parameterized aeroelastic modeling and flutter analysis for a folding wing. *Journal of Sound & Vibration*, 2012, 331(2): 308-324
- 21 倪迎鸽, 侯赤, 万小鹏等. 折叠机翼的参数化气动弹性建模与颤振分析. 西北工业大学学报, 2015, 33(5): 788-793 (Ni Yingge, Hou Chi, Wan Xiaopeng, et al. Parametric aeroelastic modeling and flutter analysis for a folding wing. *Journal of Northwest Polytechnical University*, 2015, 33 (5): 788-793 (in Chinese))
- 22 Huang R, Yang ZJ, Yao XJ, et al. Parameterized modeling methodology for efficient aeroservoelastic analysis of a morphing wing. *AIAA Journal*, 2019, 57: 4599-4607
- 23 吴莉洁, 宋汉文. 基于子结构综合法的周期支撑结构带隙分析. 噪声与振动控制, 2018, 38(5): 40-44, 51 (Wu Lijie, Song Hanwen. Band gap analysis for periodically supported structures based on substructure synthesis method. *Noise and Vibration Control*, 2018, 38 (5): 40-44, 51 (in Chinese))
- 24 王永岩. 动态子结构方法理论及应用. 北京: 科学出版社, 1999 (Wang Yongyan. Theory and Application of Dynamic Substructure Method. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- 25 Amsallem D, Farhat C, Lieu T. Aeroelastic analysis of F-16 and F-18/A configurations using adapted CFD-based reduced-order models//48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2013
- 26 Amsallem D, Farhat C, Lieu T. High-order interpolation of reduced-order models for near real-time aeroelastic prediction//International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2007
- 27 Amsallem D, Farhat C. Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *AIAA Journal*, 2008, 46(7): 1803-1813
- 28 Farhat C, Amsallem D. Recent advances in reduced-order modeling and application to nonlinear computational aeroelasticity//46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2008
- 29 Amsallem D, Cortial J, Carlberg K, et al. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 80(9): 1241-1258
- 30 刘营, 李鸿光, 李韵等. 一种加速的参数化模型降阶方法. 航空动力学报, 2019, 34(10): 2264-2270 (Liu Ying, Li Hongguang, Li Yun, et al. Accelerated parametric model order reduction method. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(10): 2264-2270 (in Chinese))
- 31 Amsallem D, Farhat C. Stabilization of projection-based reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 91(4): 358-377
- 32 刘营, 李鸿光, 李韵等. 基于子结构的参数化模型降阶方法. 振动与冲击, 2020, 39(16): 148-154 (Liu Ying, Li Hongguang, Li Yun, et al. A component-based parametric model order reduction method. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(16): 148-154 (in Chinese))