

单框架控制力矩陀螺输出特性分析¹⁾

黄志来^{*,†} 李新圆^{*} 金栋平^{*,2)}

^{*}(南京航空航天大学航空学院机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

[†](安徽工业大学机械工程学院, 安徽马鞍山 243002)

摘要 广泛用于航天领域的单框架控制力矩陀螺, 具有力矩放大效应的优点, 其理论基础为有假设条件的力矩放大原理. 本文不局限于这些假设, 不限定工况, 解析单框架控制力矩陀螺的输出特性. 考虑安装基座的运动, 得到具有两维输入三维输出的单框架控制力矩陀螺力矩输出模型, 提出将输出力矩分解为可调控与不可调控两部分. 为分析单框架控制力矩陀螺的输出特性, 定义两个参数, 分别为输出输入力矩比和输出力矩利用率. 研究发现, 单框架控制力矩陀螺不恒有力矩放大效应, 也不恒有高效的力矩利用率, 两者与其状态密切相关. 最后, 以含两个单框架控制力矩陀螺的航天器姿态机动任务为例, 对非对角奇异鲁棒操纵控制和优化控制进行仿真, 检验了单框架控制力矩陀螺输出特性对控制效果的影响. 同时, 根据单框架控制力矩陀螺的三维输出特性, 借助一个单框架控制力矩陀螺的优化控制, 实现了航天器的三轴姿态机动. 仿真结果显示, 在优化控制过程中, 单框架控制力矩陀螺始终具有力矩放大效应和高效的力矩利用率.

关键词 航天器, 控制力矩陀螺, 输出特性, 力矩放大, 力矩利用率

中图分类号: O313 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-20-306

OUTPUT CHARACTERISTIC ANALYSIS OF SINGLE GIMBAL CONTROL MOMENT GYROSCOPE¹⁾

Huang Zhilai^{*,†} Li Xinyuan^{*} Jin Dongping^{*,2)}

^{*}(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

[†](School of Mechanical Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243002, Anhui, China)

Abstract The single-gimbal control moment gyroscope (SCMG), which is widely used in aerospace field, has the advantage of torque amplification effect. It is based on the principle of torque amplification with some hypotheses. In this paper, the output characteristics of SCMG are analyzed without those hypotheses. By considering the motion of the mounting base, the output torque model of SCMG with a two-dimensional input and three-dimensional output is obtained, in which the adjustable and nonadjustable parts are identified. In order to analyze the output characteristics of SCMG, two parameters are defined. One is the ratio of the norms about the SCMG's output to input torque vectors. The other is the ratio of the norm about the SCMG's used and unused torque vector, which is to represent the utilization ratio of

2020-09-03 收稿, 2020-12-28 录用, 2020-12-30 网络版发表.

1) 装备预研基金 (6140210010202) 和国家自然科学基金 (11827801) 资助项目.

2) 金栋平, 教授, 主要研究方向: 动力学与控制. E-mail: jindp@nuaa.edu.cn

引用格式: 黄志来, 李新圆, 金栋平. 单框架控制力矩陀螺输出特性分析. 力学学报, 2021, 53(2): 511-523

Huang Zhilai, Li Xinyuan, Jin Dongping. Output characteristic analysis of single gimbal control moment gyroscope. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(2): 511-523

the SCMG's output torque. In all feasible regions, the results show that the characteristic parameters of torque output are is not always greater than 1, i.e., SCMG does not always has torque amplification effect and efficient torque utilization, which are closely related to the state of SCMG. Finally, for the spacecraft attitude maneuver task with two SCMGs, the simulation of non-diagonal singular robust control and optimal control is completed. It is found that the control effect is closely related to the output characteristic parameters which are determined by the system state. At the same time, the optimal control with a SCMG is used to realize the three-dimensional attitude maneuver of a spacecraft based on the three-dimensional output characteristics of SCMG. The simulation results show that the SCMG always has the torque amplification effect and the efficient torque utilization in the process of optimal control.

Key words spacecraft, control moment gyroscope, output characteristics, torque amplification effect, utilization of torque

引 言

傅科 (Foucault) 于 1852 年首次提出“陀螺”概念^[1], 可利用陀螺的力学特性设计执行器, 称之为控制力矩陀螺 (control moment gyroscope, CMG). 半个世纪以来, CMG 广泛用于航天器姿态控制^[2], 并随着航天器控制任务的多样化^[3-4], 从姿态控制逐渐延伸到能量存储^[5]、振动抑制^[6]等领域.

CMG 有两种机械结构, 单框架 (SCMG)^[7] 和双框架 (double-gimbal control moment gyro, DCMG)^[8]. 飞轮可调速时, CMG 演化成变速控制力矩陀螺 (variable-speed control moment gyro, VCMG), 按其机械结构分类, 有单框架变速控制力矩陀螺 (single-gimbal variable-speed control moment gyro, SVCMG)^[9] 和双框架变速控制力矩陀螺 (double-gimbal variable-speed control moment gyro, DVCMG)^[10-11]. 相比于 DCMG, SCMG 机械结构简单, 但存在奇异性问题, 而前者机械结构和控制算法更加复杂, 两者同属于多体系统, 本文仅关注航天领域应用最广的 SCMG.

通常, 为实现航天器三轴姿态控制, 在只利用 SCMG 输出陀螺力矩^[12]的情况下, 要满足输出三维控制力矩, 则需要按一定构型配置多个 SCMG, 如金字塔构型^[13]、屋顶构型^[14]和五棱锥构型^[15]等. VSCMG 有两个输出, 只需两个 VSCMG 即可完成航天器三轴姿态控制. 力矩陀螺群存在操纵奇异性^[16]问题, 针对不同构型的力矩陀螺群, 许多学者分析了其奇异几何特性^[17-18]和零运动存在性^[19], 提出诸如奇异逃离^[20]、奇异鲁棒^[21]、反馈^[22]、方向规避等操纵律^[23], 以及综合零运动与奇异逃离的混合操纵律^[24-25]等.

最初, SCMG 作为航天器的执行机构, 其输出模型仅考虑陀螺力矩^[26], 而 VSCMG 的飞轮可调速, 输

出力矩比 SCMG 多一个反作用力矩^[27]. 为分析柔性航天器的振动问题^[28], 胡权等^[29]基于 Kane 方程建立了适用于任意构型的多个柔性体系统递推算法, 这丰富了含 SCMG 的多体系统建模方法. 现有研究对 SCMG 的力矩输出特性不够关注, 一直停留于 Lappas 等^[30]关于 SCMG 基座角速度较小且转子角速度较大的假设基础之上, 并借鉴反作用轮原理获得 SCMG 的力矩放大效应^[30-31].

本文不局限于 Lappas 假设条件, 建立 SCMG 输出力矩模型, 在全部可行域中对 SCMG 输出特性进行解析, 以期更加全面地理解 SCMG 动态输出特性, 为在工程实践中高效利用 SCMG 及其控制策略设计提供新思路.

1 SCMG 输出力矩模型

如图 1 所示, 设 SCMG 的连体坐标系为 $\mathcal{F}(g, s, t)$, 坐标轴单位矢量为 s, g 和 t , 其中 g 为安装轴. 定义飞轮角速度和角动量分别为 Ω 和 h , 框架相对基座的转动角速度为 δ , 以致 $\Omega = \Omega s, h = h s, \delta = \delta g$ 和

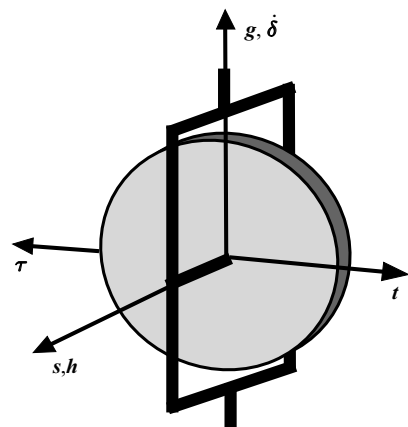


图 1 SCMG 模型

Fig. 1 Model of SCMG

$\dot{\delta} = \delta \mathbf{g}$. 在连体坐标系中, 基座、飞轮和框架的角速度为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \{\mathbf{g}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\} \boldsymbol{\omega}^{(0)} \\ \boldsymbol{\omega}_f &= \{\mathbf{g}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\} \boldsymbol{\omega}_f^{(0)} \\ \boldsymbol{\omega}_w &= \{\mathbf{g}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\} \boldsymbol{\omega}_w^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \{\omega_g, \omega_s, \omega_t\}^T$, $\boldsymbol{\omega}_f^{(0)} = \{\omega_g + \delta, \omega_s, \omega_t\}^T$ 和 $\boldsymbol{\omega}_w^{(0)} = \{\omega_g + \delta, \omega_s + \Omega, \omega_t\}^T$ 分别为角速度坐标.

设飞轮与框架的惯量张量分别为 \mathbf{J}_w 和 \mathbf{J}_f , $\mathbf{J}_w^{(0)} = \text{diag}[J_{wg}, J_{ws}, J_{wt}]$ 和 $\mathbf{J}_f^{(0)} = \text{diag}[J_{fg}, J_{fs}, J_{ft}]$ 为惯性矩阵. 由于转子轴对称, 有 $J_{wg} = J_{wt} = J$. SCMG 的角动量 $\mathbf{h}_{\text{total}} = [\mathbf{g}, \mathbf{s}, \mathbf{t}](\mathbf{J}_w^{(0)} \boldsymbol{\omega}_w^{(0)} + \mathbf{J}_f^{(0)} \boldsymbol{\omega}_f^{(0)})$, 则 SCMG 输出力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = -\dot{\mathbf{h}}_{\text{total}} = \{\mathbf{g}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\} \{\tau_g, \tau_s, \tau_t\}^T \quad (2)$$

从式 (2) 可见, SCMG 输出力矩沿 \mathbf{s} , \mathbf{g} 和 \mathbf{t} 三个方向, 而仅有 \mathbf{g} 和 \mathbf{s} 两个方向具有输入力矩, 即 SCMG 为二维输入三维输出系统.

将式 (2) 输出力矩分成两部分, 即 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_c$, 这里 $\boldsymbol{\tau}_0 = \tau_{g0}\mathbf{g} + \tau_{s0}\mathbf{s} + \tau_{t0}\mathbf{t}$ 为不可调控输出力矩, 表示 SCMG 对基座的惯性影响, 只与基座角加速度和角速度有关, $\boldsymbol{\tau}_c = \tau_{gc}\mathbf{g} + \tau_{sc}\mathbf{s} + \tau_{tc}\mathbf{t}$ 为可调控输出力矩. 令 $\mathbf{J}_{\text{cmg}}^{(0)} = \mathbf{J}_w^{(0)} + \mathbf{J}_f^{(0)} = \text{diag}[J_g, J_s, J_t]$, 则

$$\left. \begin{aligned} \tau_{g0} &= -J_g \mathbf{g} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - (J_t - J_s) \omega_t \omega_s \\ \tau_{s0} &= -J_s \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - (J_g - J_t) \omega_g \omega_t \\ \tau_{t0} &= -J_t \mathbf{t} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - (J_s - J_g) \omega_g \omega_s \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{gc} &= -J_g \dot{\delta} + J \Omega \omega_t \\ \tau_{sc} &= -J \dot{\Omega} - (J_s + J_g - J_t) \delta \dot{\omega}_t \\ \tau_{tc} &= -(J_s - J_t - J_g) \delta \dot{\omega}_s - J \Omega (\omega_g + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2 SCMG 输出输入力矩比

设输入力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{in}} = -\tau_g \mathbf{g} + \tau_{sw} \mathbf{s} \quad (5)$$

式中, $\tau_{sw} = -\tau_s |J_{fg} = J_{fs} = J_{ft}| = 0 = J(\mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta \dot{\omega}_t + \dot{\Omega})$. 记输出力矩为 $\boldsymbol{\tau}_{\text{out}}$, 则输出与输入力矩比定义为

$$K = \frac{|\boldsymbol{\tau}_{\text{out}}|}{|\boldsymbol{\tau}_{\text{in}}|} \quad (6)$$

令 $\boldsymbol{\tau}_c = \boldsymbol{\tau}_c^* + \boldsymbol{\tau}_r$, $\boldsymbol{\tau}_c^*$ 和 $\boldsymbol{\tau}_r$ 分别为被利用和未利用的输

出力矩, 这里 $\boldsymbol{\tau}_c^* = n_1 \tau_{t1} \mathbf{t} + n_2 \tau_{s1} \mathbf{s} + n_3 \tau_{g1} \mathbf{g} + n_4 \boldsymbol{\tau}_{c0}^*$, 其中

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{c0}^* &= \tau_{g2} \mathbf{g} + \tau_{s2} \mathbf{s} + \tau_{t2} \mathbf{t} \\ \tau_{g1} &= -J_g \dot{\delta}, \quad \tau_{g2} = J \Omega \omega_t \\ \tau_{s1} &= -J \dot{\Omega}, \quad \tau_{s2} = -(J_s + J_g - J_t) \delta \dot{\omega}_t \\ \tau_{t1} &= -J \Omega \dot{\delta}, \quad \tau_{t2} = -[(J_s J_t - J_g) \delta \dot{\omega}_s + J \Omega \omega_g] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

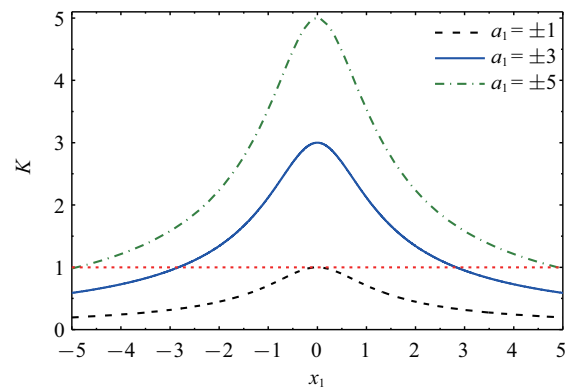
因此, 当 $n_1 = 1$ 且 $n_2 = n_3 = n_4 = 0$ 时, 意指 SCMG; 当 $n_2 = 1$ 且 $n_1 = n_3 = n_4 = 0$ 时, 意指反作用轮; 当 $n_1 = n_2 = 1$ 且 $n_3 = n_4 = 0$ 时, 则代表 VSCMG; 当 $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ 且 $n_4 = 0$ 或 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ 时, 本文称为三维单框架控制力矩陀螺 (three-dimensional single-gimbal control moment gyro, 3D-SCMG). 输出力矩可以为全部输出力矩、可调节输出力矩或者被利用输出力矩, 即

$$K = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{\tau}_{\text{out}}|^2}{\tau_g^2 + \tau_{sw}^2}}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\text{out}} = \boldsymbol{\tau} \text{ OR } \boldsymbol{\tau}_c \text{ OR } \boldsymbol{\tau}_c^* \quad (8)$$

选择合适的独立参数改写式 (8), 有

$$K = \begin{cases} \sqrt{\frac{a_1^2}{1 + x_1^2}}, & a_1 = \tau_{sw}^{-1} |\boldsymbol{\tau}_{\text{out}}|, \quad x_1 = \tau_g \tau_{sw}^{-1}, \quad \tau_{sw} \neq 0 \\ a_2 |x_2|^{-1}, & a_2 = |\boldsymbol{\tau}_{\text{out}}|, \quad x_2 = \tau_g, \quad \tau_{sw} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

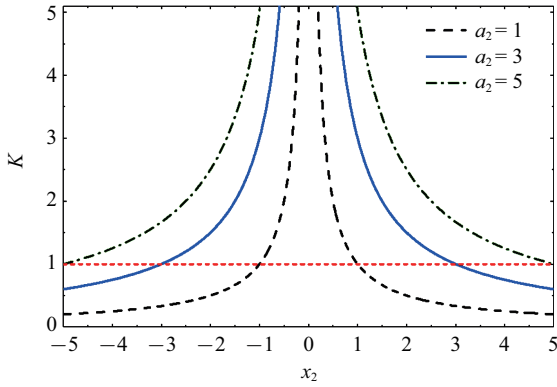
式中, a_1 为输出力矩幅值与 \mathbf{s} 方向输入力矩比值, a_2 为输出力矩幅值, x_1 为 \mathbf{g} 方向与 \mathbf{s} 方向输入力矩比值, x_2 为 \mathbf{g} 方向输入力矩. 根据式 (9), 可得输出与输入力矩之比的关系曲线, 如图 2 所示. 从图 2 可知, K 值与 SCMG 的状态有关, 并不恒大于 1, 即 SCMG 并不总有力矩放大效应.



(a) $a_1 = \tau_{sw}^{-1} |\boldsymbol{\tau}_{\text{out}}|$, $x_1 = \tau_g \tau_{sw}^{-1}$, $\tau_{sw} \neq 0$

图 2 SCMG 输出输入力矩比

Fig. 2 Torque ratio of SCMG's input to output



(b) $a_2 = |\tau_{out}|, x_2 = \tau_g, \tau_{sw} = 0$

图2 SCMG 输出输入力矩比 (续)

Fig. 2 Torque ratio of SCMG's input to output (continued)

同理, 可以选择合适的独立参数, 对特定情形下的 K 值进行分析. 这里例举基座固定、输出力矩为全部力矩和三维控制力矩陀螺.

(1) 基座固定

此时 $\omega = 0, \dot{\omega} = 0, \tau_{out} = -J_g \ddot{g} - J \dot{\Omega} s - J \Omega \dot{\delta} t$. 令 $x_3 = J \dot{\Omega} / (J_g \dot{\delta}), x_4 = \dot{\Omega}, a_3 = J \Omega \dot{\delta} / (J_g \dot{\delta})$ 和 $a_4 = \Omega \dot{\delta}$, 则

$$K = \begin{cases} \sqrt{1 + a_3^2(1 + x_3^2)^{-1}}, & \dot{\delta} = 0 \\ \sqrt{1 + a_4^2 x_4^{-2}}, & \dot{\delta} \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

由式 (10) 可得 SCMG 的输出输入力矩比曲线, 结果如图 3 所示. 从图 3 可见, 基座固定的 SCMG 输出与输入力矩比 $K \geq 1$. 当 a_3 或 a_4 为零时, $K = 1$, 此时 τ_{out} 中陀螺力矩为零, 即等同于反作用轮.

(2) 输出力矩为全部力矩

此时, 输出力矩 $\tau_{out} = \tau$, 则

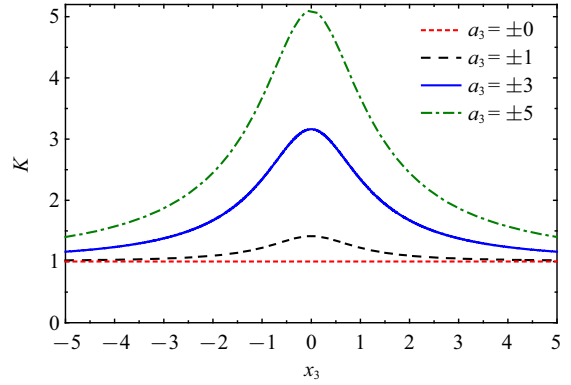
$$K = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{a_5^2 - 1}{x_5^2 + 1}}, & \tau_{sw} \neq 0 \\ \sqrt{1 + \frac{a_6^2}{x_6^2}}, & \tau_{sw} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中, $x_5 = \tau_g / \tau_{sw}, x_6 = \tau_g, a_5^2 = (\tau_s^2 + \tau_t^2) / \tau_{sw}^2, a_6^2 = \tau_s^2 + \tau_t^2$.

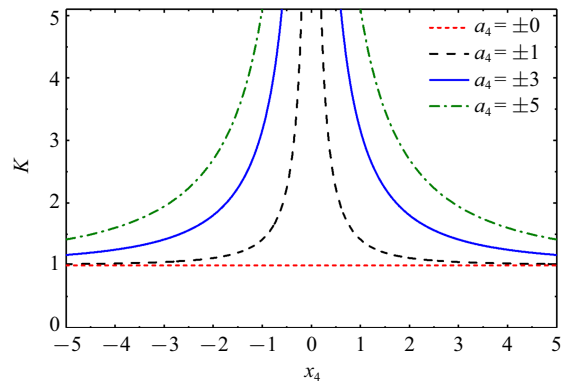
根据式 (11), 可得输出输入力矩比曲线, 如图 4 所示. 从图 4 可知, 当 $\tau_s^2 + \tau_t^2 \geq \tau_{sw}^2$ 时, SCMG 的输出与输入力矩比 $K \geq 1$, 反之亦成立. 因为当 $K \geq 1$ 时, 由式 (11) 可得 $a_5^2 \geq 1$, 即 $\tau_s^2 + \tau_t^2 \geq \tau_{sw}^2$.

(3) 三维控制力矩陀螺

三维控制力矩陀螺情形, 即考虑 $\tau_{out} = \tau_c^*, n_1 = n_2 = n_3 = 1$ 且 $n_4 = 0$, 则



(a) $x_3 = J \dot{\Omega} / (J_g \dot{\delta}), a_3 = J \Omega \dot{\delta} / (J_g \dot{\delta}), \dot{\delta} \neq 0$



(b) $x_4 = \dot{\Omega}, a_4 = \Omega \dot{\delta}, \dot{\delta} = 0$

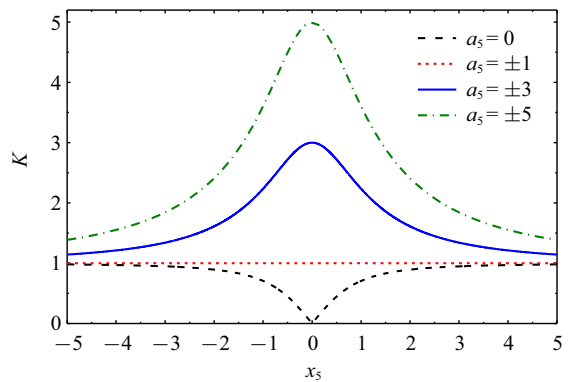
图3 基座固定的 SCMG 输出输入力矩比

Fig. 3 Torque ratio of SCMG's input to output with the fixed base

$$K = \sqrt{\frac{(J_g \dot{\delta})^2 + \dot{\Omega}^2 + (\Omega \dot{\delta})^2}{(\tau_{g0} + \tau_{g2})^2 + (\tau_{s0} + \tau_{s2})^2 + (\tau_{t0} + \tau_{t2})^2}} \quad (12)$$

首先, 分析 $\Omega \dot{\delta}$ 对 K 的影响. 由式 (12) 可得

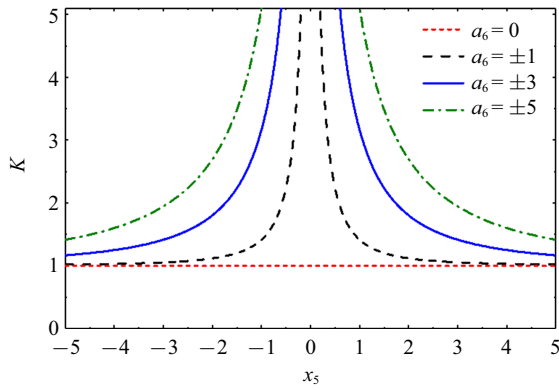
$$K = \sqrt{\frac{b_1^2 + (\Omega \dot{\delta})^2}{(c_1 - \Omega \omega_t)^2 + d_1^2}} \leq \sqrt{\frac{b_1^2 + (\Omega \dot{\delta})^2}{d_1^2}} \quad (13)$$



(a) $a_5^2 = (\tau_s^2 + \tau_t^2) / \tau_{sw}^2, x_5 = \tau_g / \tau_{sw}, \tau_{sw} \neq 0$

图4 SCMG 输出输入力矩比 ($\tau_{out} = \tau$)

Fig. 4 Torque ratio of SCMG's input to output with $\tau_{out} = \tau$



(b) $a_6^2 = \tau_s^2 + \tau_t^2, x_6 = \tau_g, \tau_{sw} = 0$

图 4 SCMG 输出输入力矩比 ($\tau_{out} = \tau$) (续)

Fig. 4 Torque ratio of SCMG's input to output with $\tau_{out} = \tau$ (continued)

其中

$$\left. \begin{aligned} b_1^2 &= J_g^2 \ddot{\delta}^2 + \dot{\Omega}^2, & d_1^2 &= (\mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta \dot{\omega}_t + \dot{\Omega})^2 \\ c_1 &= J_g \mathbf{g} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (J_t - J_s) \omega_t \omega_s + J_g \ddot{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其次, 分析参数 δ 对 K 的影响. 由式 (12) 可得

$$K = \sqrt{\frac{b_2^2 + (J_g \ddot{\delta})^2}{(c_2 + J_g \ddot{\delta})^2 + d_2^2}} \leq \sqrt{\frac{b_2^2 + (J_g \ddot{\delta})^2}{d_2^2}} \quad (15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} b_2^2 &= \dot{\Omega}^2 + (\Omega \delta)^2, & d_2^2 &= (\mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta \dot{\omega}_t + \dot{\Omega})^2 \\ c_2 &= J_g \mathbf{g} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (J_t - J_s) \omega_t \omega_s - \Omega \omega_t \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

最后, 分析参数 $\dot{\Omega}$ 对 K 的影响. 由式 (12) 可得

$$K = \sqrt{\frac{b_3^2 + \dot{\Omega}^2}{(c_3 + \dot{\Omega})^2 + d_3^2}} \leq \sqrt{\frac{b_3^2 + \dot{\Omega}^2}{d_3^2}} \quad (17)$$

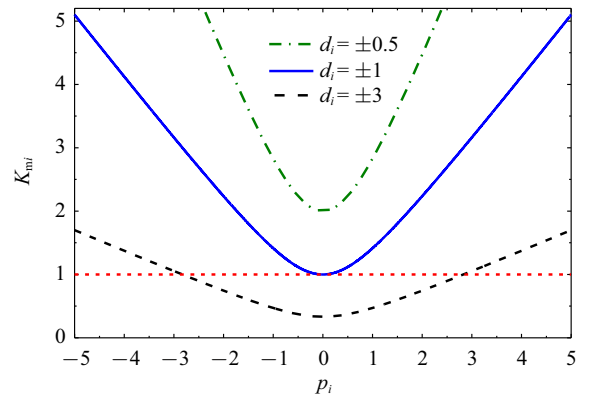
其中

$$\left. \begin{aligned} b_3^2 &= \dot{\Omega}^2 + (\Omega \delta)^2, & d_3^2 &= (\mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \delta \dot{\omega}_t + \dot{\Omega})^2 \\ c_3 &= J_g \mathbf{g} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + (J_t - J_s) \omega_t \omega_s - \Omega \omega_t \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

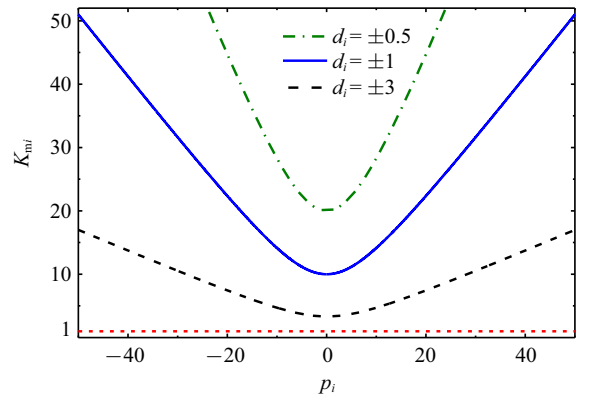
设 $p_1 = \Omega \delta, p_2 = \delta, p_3 = \dot{\Omega}$, 综合式 (13)、式 (15) 和式 (17), 可得 K 的上界为

$$K_{mi} = \sqrt{\frac{b_i^2 + p_i^2}{d_i^2}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

K_{mi} 与参数 p_i 的关系如图 5 所示. 由图 5 可知, 上界 K_{mi} 值随 $|p_i|$ 值上升而增大, 且 K_{mi} 的极小值随 b_i^2 值上升而增大.



(a) $b_i^2 = 1$



(b) $b_i^2 = 100$

图 5 不同参数的影响

Fig. 5 Influence for different parameters

3 SCMG 力矩利用率

设 τ_c^* 为 SCMG 被利用的力矩, 则未被利用的部分为 $\tau - \tau_c^*$. 为衡量 SCMG 的力矩利用率, 定义

$$\eta = \frac{|\tau_c^*|}{|\tau - \tau_c^*|} \quad (20)$$

式中, 矢量 $\tau = \tau_c^* + (\tau - \tau_c^*)$, 几何关系如图 6 所示.

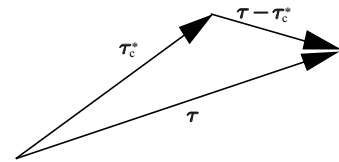


图 6 矢量几何关系

Fig. 6 Geometric relation diagram of vectors

由几何关系图 6 可知, 当 τ_c^* 在 τ 方向的投影值 $\tau_c^* \cdot \tau \cdot |\tau|^{-1} > 0.5|\tau|$, 则 $|\tau_c^*| > |\tau - \tau_c^*|$. 根据式 (20), 即

$$\left. \begin{aligned} \eta &\geq 1, & \tau_c^* \cdot \tau &\geq 0.5|\tau|^2 \\ \eta &< 1, & \tau_c^* \cdot \tau &< 0.5|\tau|^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由式(21)可得,力矩利用率 η 与SCMG的状态有关,并不恒大于1.下面举例分析 η .取转子和框架以及基座处于匀速状态,即 $\dot{\Omega} = \dot{\delta} = 0, \dot{\omega} = \mathbf{0}$,此时被利用的力矩只有陀螺力矩,即 $\tau_c^* = \Omega\dot{\delta}$.取 $J_g = J_s = J_t = nJ$,有

$$|\tau - \tau_c^*| = \sqrt{(\Omega\omega_t)^2 + (n\dot{\delta}\omega_t)^2 + (\Omega\omega_g - n\dot{\delta}\omega_s)^2} \quad (22)$$

将式(22)代入式(20),利用不等式可得 $\eta \leq \eta_m$,这里 η_m 为 η 的上界.令 $p_1 = \omega_t/\dot{\delta}, p_2 = \Omega/\dot{\delta}$,即

$$\eta_m = \sqrt{\frac{p_1^{-2}}{1 + n^2 p_2^{-2}}} \quad (23)$$

式中, p_1 为基座的角速度在 t 方向分量与框架角速度值之比, p_2 为转子转速值与框架角速度值之比, n 表示转子在 s 轴的惯量矩与基座主惯量矩之比.

根据式(23),当 $n=1$ 和 $n=2$ 时, η_m 分别如图7所示.对比图7(a)和图7(b)可知, η_m 曲线关于 $p_2=0$ 对称,并在 $p_2=0$ 取得峰值,随 $|p_1|$ 值上升而下降.当

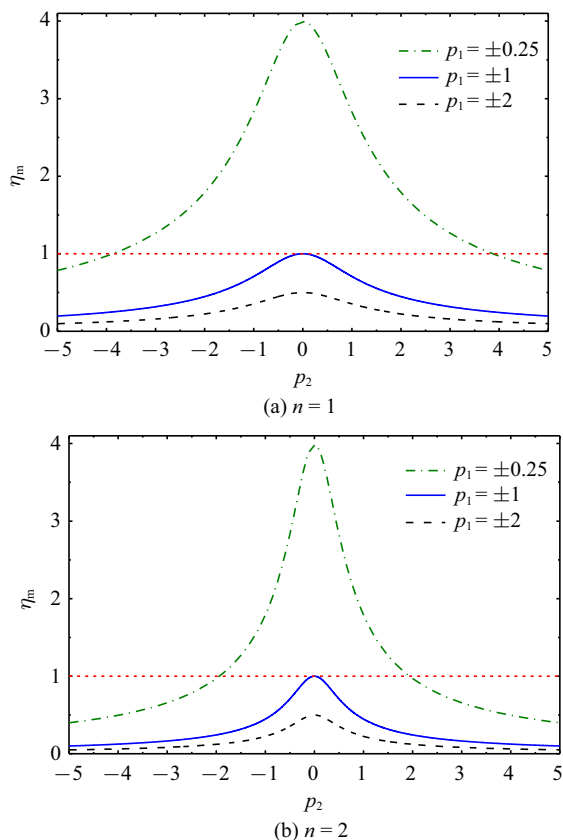


图7 SCMG力矩利用率上界 η_m

$$(\dot{\omega} = 0, \dot{\Omega} = \dot{\delta} = \mathbf{0}, J_g = J_s = J_t = nJ)$$

Fig. 7 The upper bound of torque utilization in SCMG

$$(\dot{\omega} = \mathbf{0}, \dot{\Omega} = \dot{\delta} = 0, J_g = J_s = J_t = nJ)$$

$|p_1| > 1$ 时, η_m 始终小于1,可得此时 η 恒小于1. n 不影响峰值大小,但随 n 增大,使得 η_m 曲线的峰值变陡.

4 姿态控制

4.1 非对角奇异鲁棒操纵控制

考虑斜装两个VSCMG的航天器姿态控制,安装角 $\beta = \pi/6$,第 i 个SCMG的转子对 s 轴转动惯量为 J_i ,其连体坐标系对航天器本体坐标系的转换矩阵为 B_i ($i=1,2$).矢量或张量在航天器本体坐标系下的坐标加注上标(b),则陀螺群的输出力矩在航天器本体坐标系中的坐标为

$$\tau_c^{(b)} = \sum_{i=1,2} B_i [0, -J_i \dot{\Omega}_i, -J_i \Omega_i \dot{\delta}_i]^T \quad (24)$$

式中

$$B_i = \begin{bmatrix} (-1)^{i+1} \sin \beta & 0 & (-1)^i \cos \beta \\ -\sin \delta_i \cos \beta & (-1)^{i+1} \cos \delta_i & -\sin \delta_i \sin \beta \\ \cos \delta_i \cos \beta & (-1)^{i+1} \sin \delta_i & \cos \delta_i \sin \beta \end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{u} = \{\delta_1, \dot{\Omega}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\Omega}_2\}^T, \tau_c^{(b)} = \mathbf{Q}\mathbf{u}$.航天器姿态四元数 $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}^T$,这里 q_0 为姿态四元数的标量部分. $\mathbf{q}(0)$ 和 \mathbf{q}_d 分别为姿态四元数的初始值和目标值, $\mathbf{q}_d = \{q_{0d}, q_{1d}, q_{2d}, q_{3d}\}^T$.定义误差四元数

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} q_{0d} & q_{1d} & q_{2d} & q_{3d} \\ -q_{1d} & q_{0d} & q_{3d} & -q_{2d} \\ -q_{2d} & -q_{3d} & q_{0d} & q_{1d} \\ -q_{3d} & q_{2d} & -q_{1d} & q_{0d} \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (25)$$

取 $\mathbf{q}_{re} = \{q_{1e}, q_{2e}, q_{3e}\}^T$,令 ω_0 和 ω_d 分别为航天器的角速度初始值和目标值,则航天器姿态机动控制任务描述为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = \omega_d$.采用误差四元数反馈控制调整航天器姿态,取 \mathbf{K} 和 \mathbf{D} 为正定矩阵, $\mathbf{T}_d^{(b)}$ 为干扰力矩, $\tau_r^{(b)}$ 为SCMG群输出力矩中未利用的力矩, $\omega^{(b) \times}$ 表示航天器角速度的叉乘矩阵.含SCMG的系统总惯量为

$$\mathbf{J}_{all}^{(b)} = \mathbf{J}^{(b)} + \sum_{i=1,2} B_i \mathbf{J}_{cmgi}^{(0)} B_i \quad (26)$$

则

$$\tau_c^{(b)} = \omega^{(b) \times} \mathbf{J}_{all}^{(b)} \omega^{(b)} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{re} + \mathbf{D}(\omega_d^{(b)} - \omega^{(b)}) - \mathbf{T}_d^{(b)} - \tau_r^{(b)} \quad (27)$$

取 $\lambda = \lambda_0 \exp[-\mu \det(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)]$, 这里 λ_0 和 μ 为正实常数. 取对角元素 $W_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 和非对角元素 $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$, 采用非对角奇鲁棒操纵律^[32], 有

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{V})^{-1}\boldsymbol{\tau}_c^{(b)} \quad (28)$$

其中

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & W_2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & W_3 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & W_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

若令目标状态和初始条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_d &= \{0, 0, 1, 0\}^T, \quad \mathbf{q}(0) = \{1, 0, 0, 0\}^T \\ \boldsymbol{\omega}_d^{(b)} &= \{0, 0, 0\}^T, \quad \boldsymbol{\omega}_0^{(b)} = \{0, 0, 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

取控制参数^[33]为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= 300\text{diag}[1, 1, 1], \quad \mathbf{K} = k\text{diag}[1, 1, 1] \\ \lambda_0 &= 10^{-3}, \quad \mu = 100, \quad \varepsilon_1 = 0.1 \cos 0.1t \\ \varepsilon_2 &= 0.1 \cos(0.1t + 2), \quad \varepsilon_3 = 0.1 \cos(0.1t + 1) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

令 $J_{wgi} = J_{wii} = 0.4 \text{ kg/m}^2, J_i = 0.7 \text{ kg/m}^2, J_{fgi} = J_{fii} = J_{fsi} = J_{fti} = 0.1 \text{ kg/m}^2$, 以及^[33]

$$\mathbf{J}^{(b)} = \begin{bmatrix} 15053 & 3000 & -1000 \\ 3000 & 6510 & 2000 \\ -1000 & 2000 & 11122 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2} \quad (32)$$

取 $\boldsymbol{\tau}_{\text{out}} = \boldsymbol{\tau}_c^* = \boldsymbol{\tau}_{t1}\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}_{s1}\mathbf{s}$.

选 4 种控制参数进行控制效果考核, 方案 1: $W_i = 1, k = 300$; 方案 2: $W_i = 300, k = 10$; 方案 3: $W_i = 200, k = 100$; 方案 4: $W_i = 300, k = 5$. 仿真控制结果如图 8 和图 9 所示. 可以看出, 4 种方案均在 500 s 内趋于稳态, 其中方案 1 和 3 在初始有一段时间的波动后趋于稳态, 方案 2 和 4 相对平稳.

由式 (8) 和式 (20) 可得 SCMG 群的输出与输入力矩之比 K 和力矩利用率 η , 如图 10~图 12 所示. 可以看出, 在 4 种方案中, K 和 η 均在等值线 1 上下波动, 表明 SCMG 并不恒有力矩放大效应和高效的力矩利用率, 这与理论结论一致. 方案 1 在等值线 1 上下波动次数最多, 总体控制效果欠佳, 与图 8(a) 和

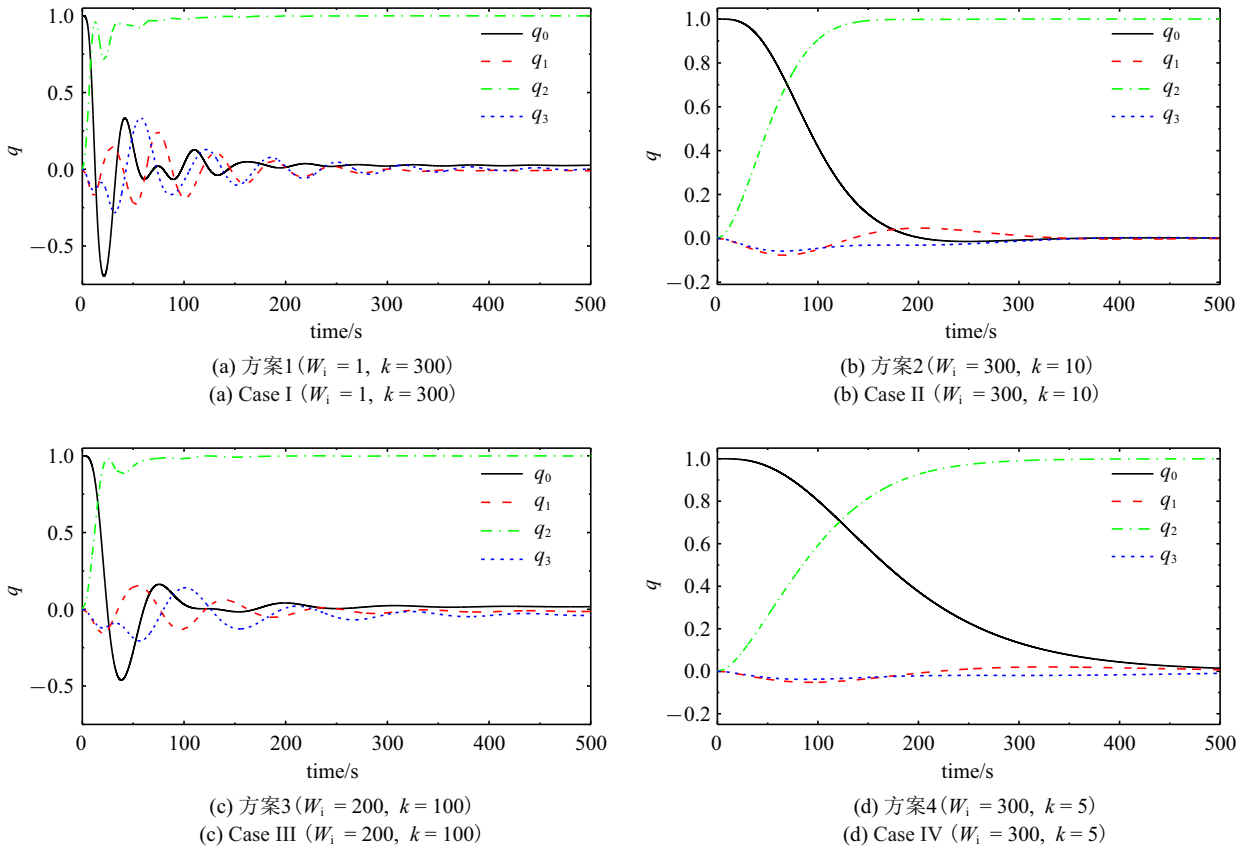


图 8 航天器姿态四元数时间历程

Fig. 8 Time histories of the attitude quaternion about spacecraft

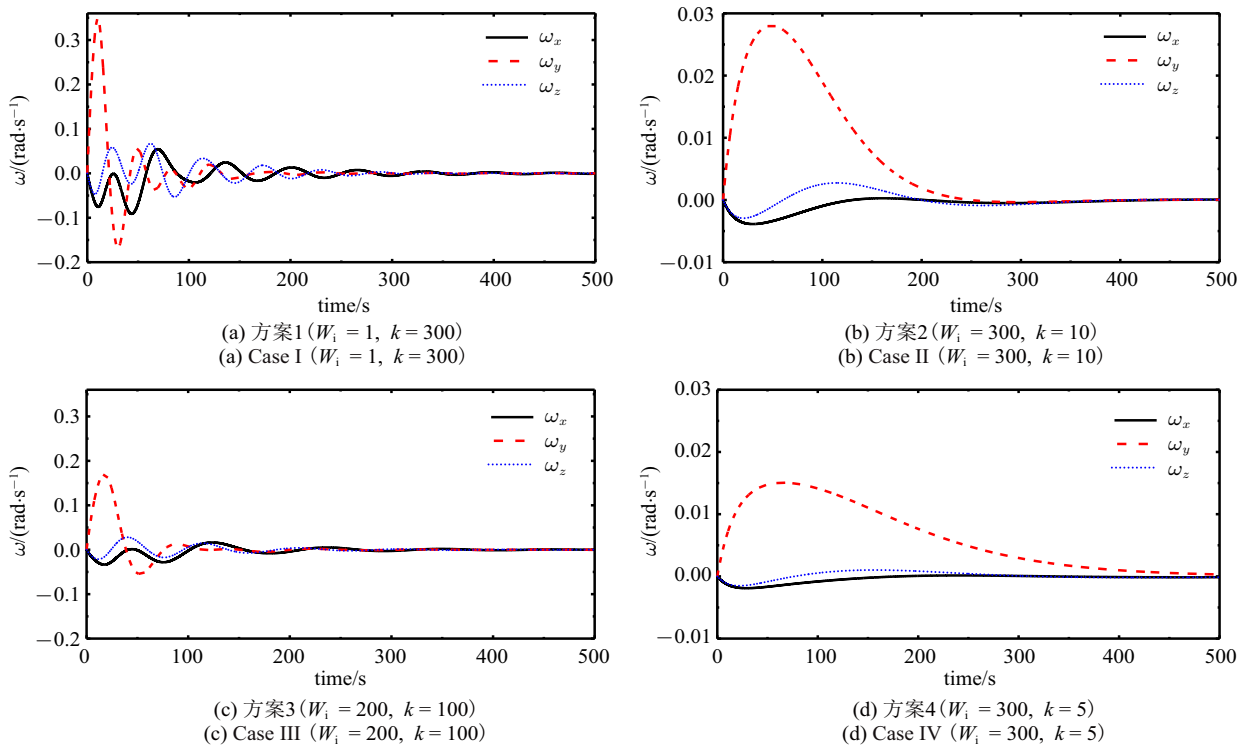


图 9 航天器的角速度时间历程

Fig. 9 Time histories of the angular velocity about spacecraft

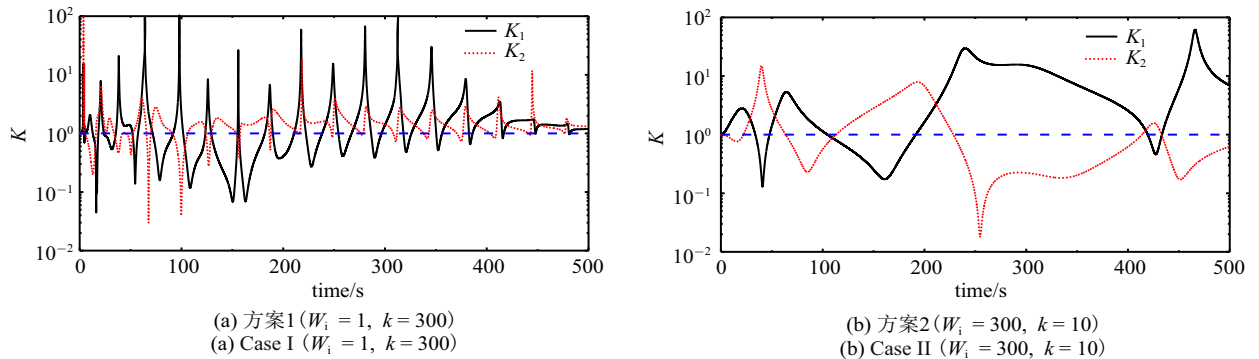


图 10 输出与输入力矩比时间历程

Fig. 10 Torque ratio of CMG's input to output vs time

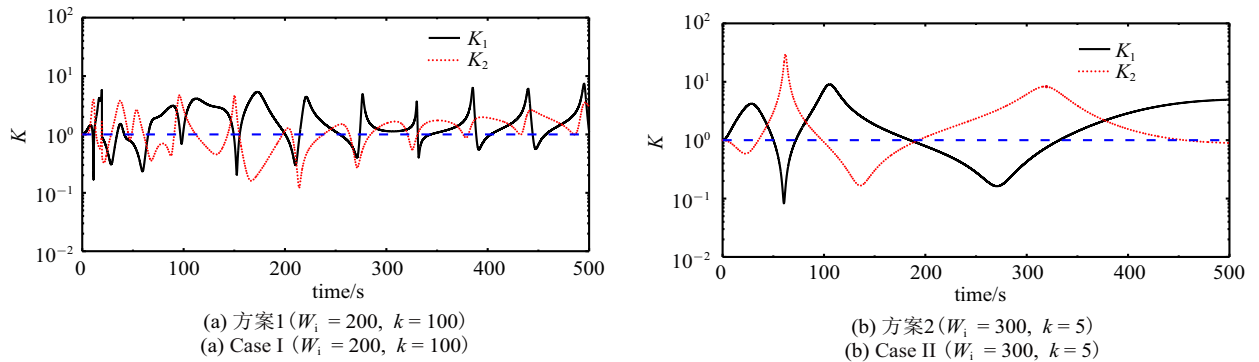


图 11 输出与输入力矩比时间历程

Fig. 11 Torque ratio of CMG's input to output vs time

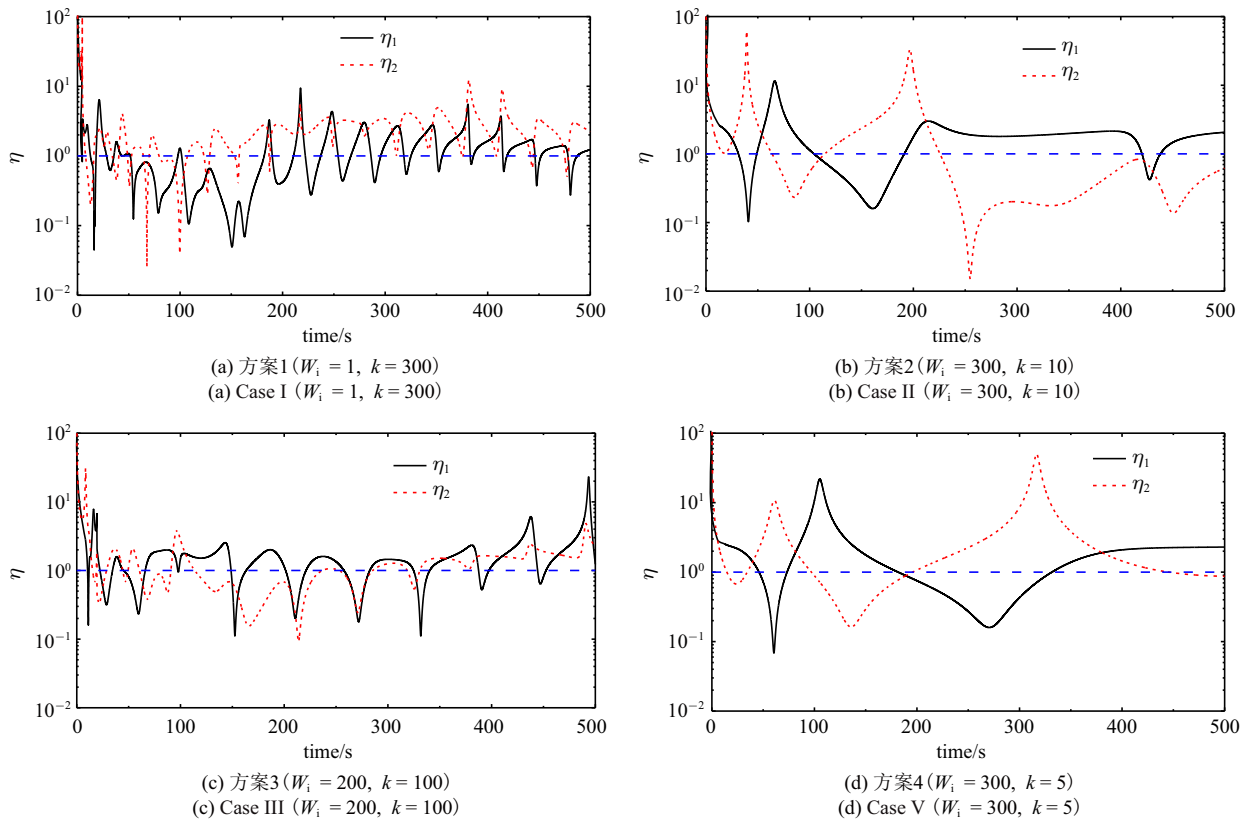


图 12 力矩利用率时间历程

Fig. 12 Torque utilization vs time

图 9(a) 表现出的控制效果吻合; 方案 3 在等值线 1 上下波动次数仅次于方案 1, 与图 8(c) 和图 9(c) 一致. 从图 10(b) 和图 11(b) 可见, 方案 2 的输出输入力矩比在等值线 1 以上的区域占优. 根据图 8 和图 9 所示的控制效果, 方案 2 收敛更快, 两者吻合; 比较图 12(b) 和图 12(d) 可见, 方案 3 的力矩利用率 η 在等值线 1 以上的区域占优, 与图 8 和图 9 所示的平稳控制效果一致. 综上所述, 控制效果与输出输入力矩比 K 和力矩利用率 η 这两个参数密切相关.

4.2 优化控制

使用两个 SCMG 对控制方案 1 进行优化, 其参数与 4.1 节相同. 这里考虑 SCMG 的运动参数约束^[34] 为 $|\Omega_i| \leq 3000 \text{ rad/s}$, $|\dot{\Omega}_i| \leq 10 \text{ rad/s}^2$, $|\delta_i| \leq 10 \text{ rad/s}$, $|\dot{\delta}_i| \leq 10 \text{ rad/s}^2$, ($i = 1, 2$), $\tau_{\text{out}} = \tau_c^* = \tau_c$, 仿真时长 $t_f = 80 \text{ s}$, 优化目标为

$$f = \int_0^{t_f} (e^T N e + x^T M x + u^T R u) dt \quad (33)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} e &= \{q_0 - q_{0d}, q_1 - q_{1d}, q_2 - q_{2d}, q_3 - q_{3d}\}^T \\ x &= \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \delta_1, \delta_2, \Omega_1, \Omega_2\}^T \\ u &= \{\dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2\}^T \\ N &= 3000E_4, \quad M = 300E_7, \quad R = E_4 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中, E_i 表示 $i \times i$ 阶单位矩阵. 方案 1 控制效果如图 13(a) 和图 14(a) 所示, 框架角速度和转子角加速度分别如图 15(a) 和图 16(a) 所示. 由式 (8) 和式 (20) 计算输出与输入力矩比和力矩利用率, 结果如图 17(a) 和图 18(a) 所示.

由式 (3) 和式 (4) 可知, SCMG 为三维力矩输出, 单个 SCMG 即可实现航天器三维姿态控制. 因此, 优化控制方案 2 只保留优化方案 1 中第一个 SCMG, 仿真时长 $t_f = 200 \text{ s}$, 其他仿真参数不变. 方案 2 仿真控制效果如图 13(b) 和图 14(b) 所示, 框架角速度和转子角加速度如图 15(b) 和图 16(b) 所示. 从式 (8) 和式 (20) 可得输出与输入力矩比和力矩利用率, 结果如图 17(b) 和图 18(b) 所示.

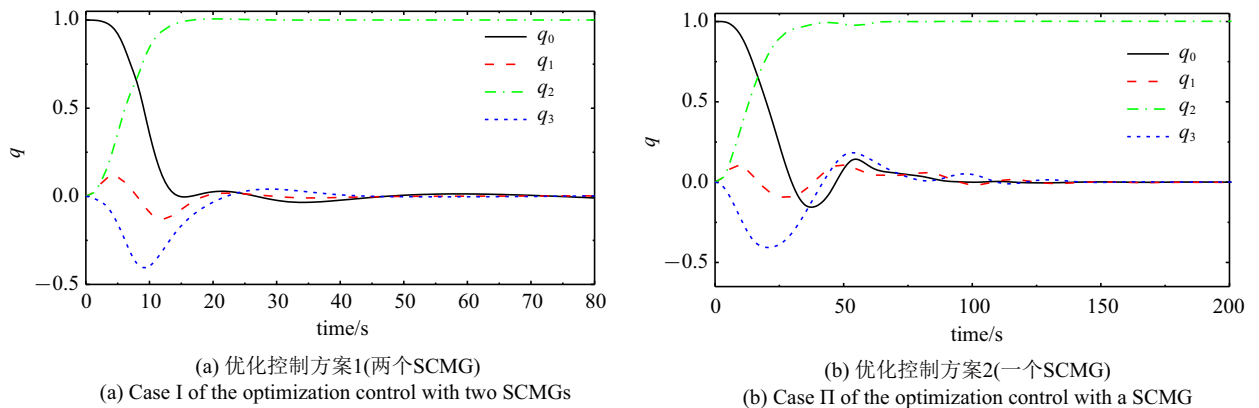


图 13 航天器姿态四元数时间历程

Fig. 13 Time histories of the attitude quaternion about the spacecraft

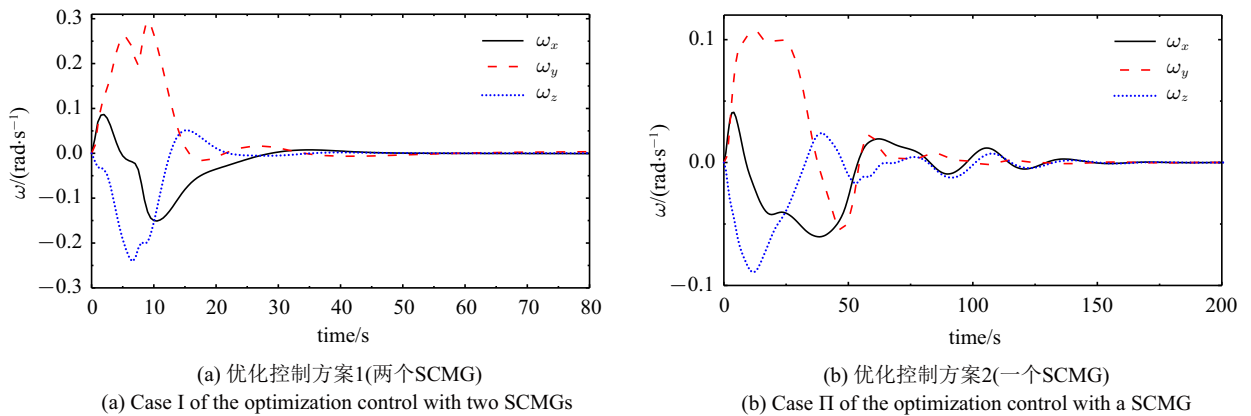


图 14 航天器角速度时间历程

Fig. 14 Time histories of the angular velocity about the spacecraft

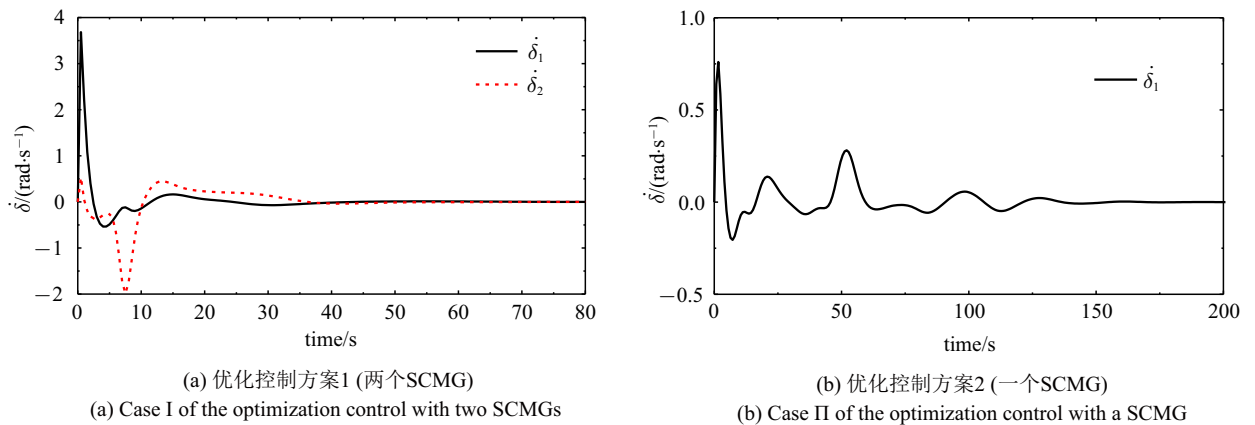


图 15 框架角速度时间历程

Fig. 15 Time histories of the gimbals rates

从图 13 和图 14 可见, 考虑到 SCMG 的运动参数受限, 两个优化控制方案均可完成控制任务, 控制过程比较平稳, 收敛效果良好. 对于收敛到目标的耗时, 方案 1 (两个 SCMG) 约 50 s, 方案 2 (一个 SCMG) 约 150 s, 后者用时略长, 前者航天器机动角速度明

显高于后者, 因此收敛速度更快. 从图 15 可见, 方案 1 的框架角速度幅值更大. 图 15(a) 显示方案 1 在 35 s 以后 $\dot{\delta}_i (i = 1, 2)$ 已接近零, 即此时输出的陀螺力矩值非常有限. 由图 16 可知, 方案 1 长时间利用转子变速输出力矩, 而方案 2 在 50 s 时已接近目标姿

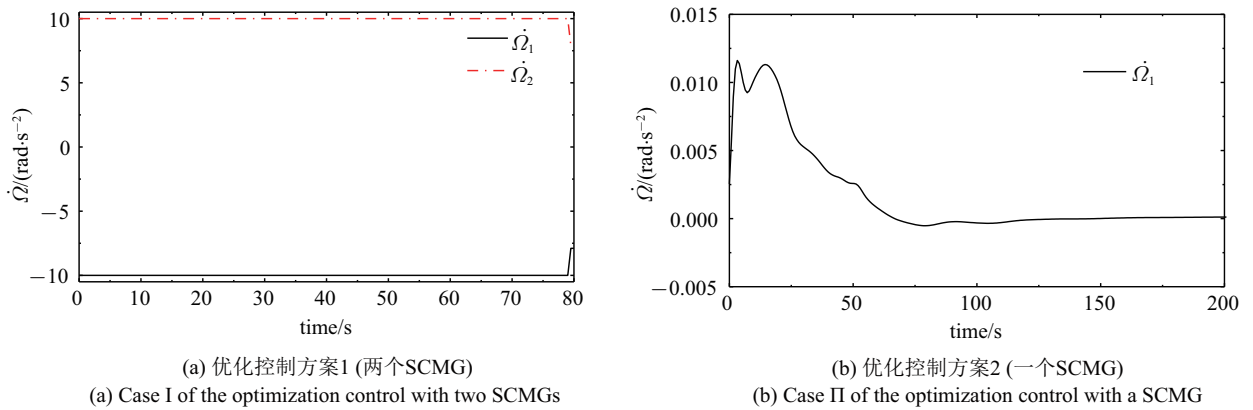


图 16 转子角加速度时间历程

Fig. 16 Time histories of the angular acceleration about the flywheel

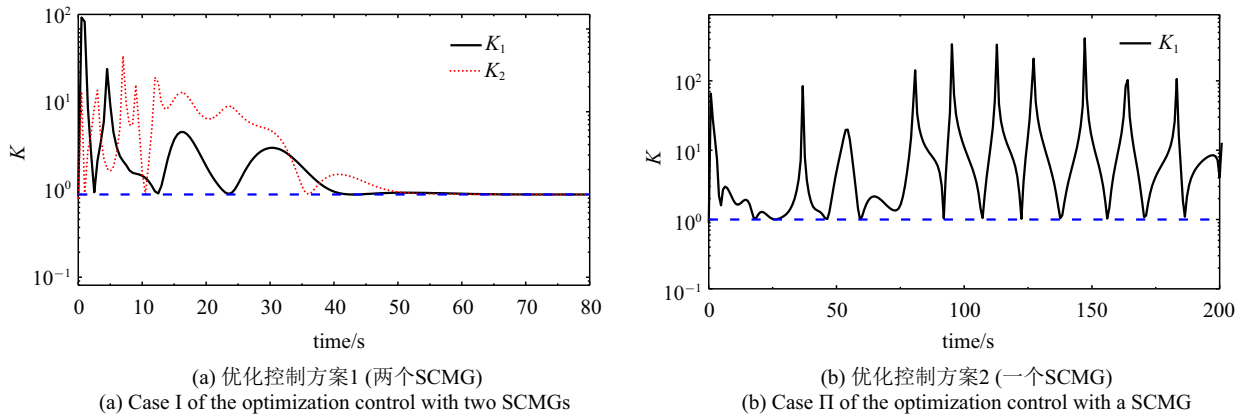


图 17 输出与输入力矩比时间历程

Fig. 17 Torque ratio of CMG's input to output vs time

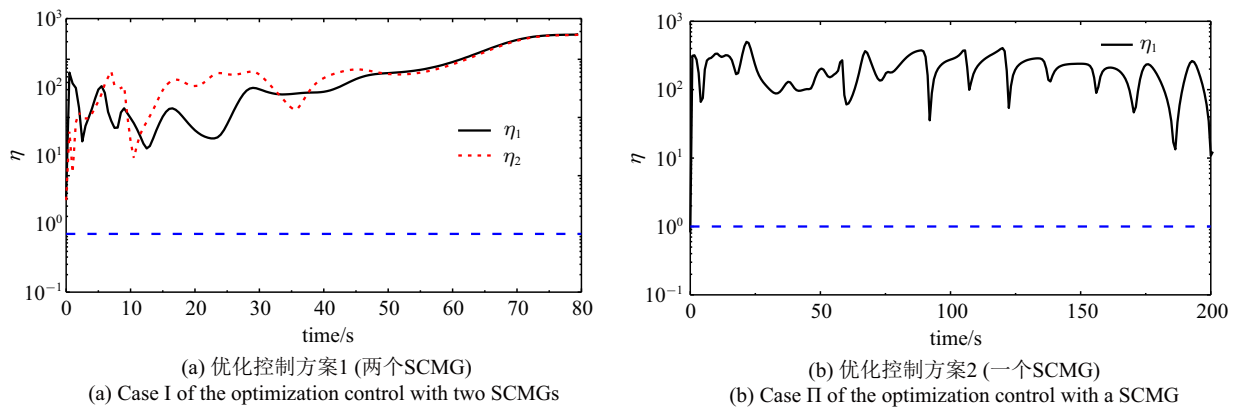


图 18 力矩利用率时间历程

Fig. 18 Torque utilization vs time

态, 之后就不再利用转子变速输出力矩, 但维持比较高的转子速度. 由图 15(b) 可知, 方案 2 在 50 s 以后框架角速度在稳态期望值零上下波动, 通过输出陀螺力矩来调节航天器姿态. 上述两种优化控制方案的任务相同, 但图 13 ~ 图 16 中两种控制方案表现出

明显差异, 根本原因在于方案 1 有 4 个输入, 从控制的角度可理解其有一个冗余, 可行域更广; 方案 2 仅有 2 个输入, 属于欠驱动, 可行域更窄. 由图 17 和图 18 可知, 在整个控制过程中, 两种优化控制方案的输出输入力矩比和力矩利用率始终位于等值线 1 以上,

表明在优化控制过程中 SCMG 始终有良好的输出特性, 即 SCMG 始终具有力矩放大效应和高效的力矩利用率.

5 结论

通过建立 SCMG 的两维输入三维输出模型, 将其输出力矩分解成可调控部分与不可调控部分, 进而定义 SCMG 的输入与输出力矩比和力矩利用率. 研究发现, SCMG 不恒有力矩放大效应, 也不恒有高效的力矩利用率. 此外, SCMG 输出特性确实与系统状态有关. 根据 SCMG 的三维输出特性, 借助一个 SCMG 的优化控制可实现航天器三轴姿态机动. 在提出的优化控制方案中, 可以始终确保 SCMG 具有力矩放大效应和高效的力矩利用率. 因此, 通过合理设计控制方案, 可以使 SCMG 具有良好的动态输出特性且控制效果最优.

参 考 文 献

- 1 Tabarovskii AM. On the stability of motion of Foucault gyroscopes with two degrees of freedom. *Journal of Applied Mathematics & Mechanics*, 1960, 24(5): 1206-1213
- 2 Toriumi FY, Angelico BA. Nonlinear controller design for tracking task of a control moment gyroscope actuator. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2020, 25(1): 438-448
- 3 王恩美, 邬树楠, 吴志刚. 在轨组装空间结构面向主动控制的动力学建模. *力学学报*, 2020, 52(3): 805-817 (Wang Enmei, Wu Shunan, Wu Zhigang. Active-control-oriented dynamic modelling for on-orbit assembly space structure. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 805-816 (in Chinese))
- 4 罗操群, 孙加亮, 文浩等. 多刚体系统分离策略及释放动力学研究. *力学学报*, 2020, 52(2): 503-513 (Luo Caoqun, Sun Jialiang, Wen Hao, et al. Research on separation strategy and deployment dynamics of a space multi-rigid-body system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(2): 503-513 (in Chinese))
- 5 Yoon H. Spacecraft attitude and power control using variable speed control moment gyros. [PhD Thesis]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2004
- 6 Sasaki T, Shimomura T, Pullen S, et al. Attitude and vibration control with double-gimbal variable-speed control moment gyros. *Acta Astronautica*, 2018, 152(11): 740-751
- 7 Valk L, Berry A, Vallery H. Directional singularity escape and avoidance for single-gimbal control moment gyroscopes. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2018, 41(5): 1095-1107
- 8 Sasaki T, Alcorn J, Schaub H, et al. Convex optimization for power tracking of double-gimbal variable-speed control moment gyroscopes. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2018, 55(3): 541-551
- 9 Zhao H, Liu F, Yao Y. Optimization design steering law for VSCMGs with the function of attitude control and energy storage. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 65(6): 9-17
- 10 Sasaki T, Shimomura T, Schaub H. Robust attitude control using a double-gimbal variable-speed control moment gyroscope. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2018, 55(5): 1235-1247
- 11 Stevenson D, Schaub H. Nonlinear control analysis of a double-gimbal variable-speed control moment gyroscope. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2012, 35(3): 787-793
- 12 Hu QL, Tan X. Dynamic near-optimal control allocation for spacecraft attitude control using a hybrid configuration of actuators. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(2): 1430-1443
- 13 Guo JT, Geng YH, Kong XR. Pyramid-type single-gimbal control moment gyro system singularity avoidance using gimbal reorientation. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2020, 43(6): 1180-1189
- 14 Yoshikawa T. A Steering law for a roof type configuration of single gimbal control moment gyro system. *IFAC Proceedings Volumes*, 1975, 8(1): 361-369
- 15 Tang L, Xu SJ. Geometric analysis of singularity for single-gimbal control Moment gyro systems. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2005, 18(4): 295-303
- 16 Kawajiri S, Matunaga S. Singularity avoidance/passage steering logic for a variable-speed double-gimbal control moment gyro based on inverse kinematics. *Transactions of The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Space Technology Japan*, 2018, 16(2): 188-194
- 17 Margulies G, Aubrun JN. Geometric theory of single-gimbal control moment gyro system. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1978, 26(2): 159-191
- 18 Wie B. Singularity analysis and visualization for single-gimbal control moment gyro systems. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2004, 27(2): 271-282
- 19 Kurokawa H. Constrained steering law of pyramid-type control moment gyros and ground tests. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1997, 20(3): 445-449
- 20 Leeghim H, Lee CY, Jin J, et al. A singularity-free steering law of roof array of control moment gyros for agile spacecraft maneuver. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2020, 18(7): 1679-1690
- 21 Guo YN, Wang PY, Ma GF, et al. Envelope oriented singularity robust steering law of control moment gyros for spacecraft attitude maneuver. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(4): 954-962
- 22 Pechev AN. Feedback-based steering law for control moment gyros. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2007, 30(3): 848-855
- 23 Meng T, Matunaga S. Modified singular-direction avoidance steering for control moment gyros. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2012, 34(6): 1915-1920
- 24 Schaub H, Junkins JL. Singularity avoidance using null motion and variable-speed control moment gyros. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2000, 23(1): 11-16
- 25 Kurokawa H. Survey of theory and steering laws of single-gimbal control moment gyros. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2007, 30(5): 1331-1340

- 26 Hoelscher BR, Vadali SR. Optimal open-loop and feedback control using single gimbal control moment gyroscopes. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1994, 42(2): 189-206
- 27 Biggs JD, Livornese G. Control of a thrust-vectoring cubeSat using a single variable-speed control moment gyroscope. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2020, 43(10): 1865-1880
- 28 曹登庆, 白坤朝, 丁虎等. 大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展. *力学学报*, 2019, 51(1): 1-13 (Cao Dengqing, Bai Kunchao, Ding Hu, et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 1-13 (in Chinese))
- 29 胡权, 贾英宏, 徐世杰. 多体系统动力学 Kane 方法的改进. *力学学报*, 2011, 43(5): 968-972 (Hu Quan, Jia Yinghong, Xu Shijie. An improved Kane's method for multibody dynamics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(5): 968-972 (in Chinese))
- 30 Lappas VJ, Steyn WH, Underwood CI. Torque amplification of control moment gyros. *Electronics Letters*, 2002, 38(15): 837-839
- 31 Alcorn J, Allard C, Schaub H, et al. Fully coupled reaction wheel static and dynamic imbalance for spacecraft jitter modeling. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2018, 41(6): 1380-1388
- 32 Wie B. Singularity escape/avoidance steering logic for control moment gyro systems. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 2005, 28(5): 948-956
- 33 Yoon H, Tsiotras P. Singularity analysis of variable speed control moment gyros. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2004, 27(3): 374-386
- 34 Wu PC, Wen H, Chen T, et al. Model predictive control of rigid spacecraft with two variable speed control moment gyroscopes. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2017, 38(11): 1551-1564