

基于细观拓扑结构演化的颗粒材料剪切诱导各向异性研究

曹万达, 梅江洲, 刘嘉英, 周 伟, 常晓林, 马 刚

AN INVESTIGATION ON SHEAR-INDUCED ANISOTROPY OF GRANULAR MATERIALS BASED ON MESOSCOPIC TOPOLOGICAL EVOLUTION

Cao Wanda, Mei Jiangzhou, Liu Jiaying, Zhou Wei, Chang Xiaolin, and Ma Gang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-25-100>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑颗粒转矩的接触网络诱发各向异性分析

SHEAR-INDUCED ANISOTROPY ANALYSIS OF CONTACT NETWORKS INCORPORATING PARTICLE ROLLING RESISTANCE

力学学报. 2021, 53(6): 1634–1646

基于细观拓扑结构演化的颗粒材料剪胀性分析

DILATANCY ANALYSIS OF GRANULAR MATERIALS BASED ON MESOSCOPIC TOPOLOGICAL EVOLUTIONS

力学学报. 2022, 54(3): 707–718

应力各向异性对散粒体三维强度影响的拓扑机理

TOPOLOGICAL MECHANISM OF THE STRESS ANISOTROPY INFLUENCE ON THE THREE-DIMENSIONAL STRENGTH OF GRANULAR MATERIALS

力学学报. 2025, 57(6): 1–11

基于深度学习和细观力学的颗粒材料本构关系研究

CONSTITUTIVE RELATIONS OF GRANULAR MATERIALS BY INTEGRATING MICROMECHANICAL KNOWLEDGE WITH DEEP LEARNING

力学学报. 2021, 53(9): 2404–2415

基于深度强化学习算法的颗粒材料应力应变关系数据驱动模拟研究

DATA-DRIVEN STRESS-STRAIN MODELING FOR GRANULAR MATERIALS THROUGH DEEP REINFORCEMENT LEARNING

力学学报. 2021, 53(10): 2712–2723

椭球颗粒体系剪切过程中自由体积的分布与演化

DISTRIBUTION AND EVOLUTION OF FREE VOLUME OF ELLIPSOIDAL PARTICLE SYSTEMS DURING SHEARING

力学学报. 2021, 53(9): 2374–2383



关注微信公众号，获得更多资讯信息

基于细观拓扑结构演化的颗粒材料剪切诱导各向异性研究¹⁾

曹万达* 梅江洲* 刘嘉英† 周伟*,** 常晓林*,**,2) 马刚*,**

* (武汉大学水资源工程与调度全国重点实验室, 武汉 430072)

† (浙大城市学院土木工程系, 杭州 310015)

** (武汉大学水工岩石力学教育部重点实验室, 武汉 430072)

摘要 颗粒材料在剪切条件下通常呈现出显著的各向异性特征, 探究其演化规律对深入理解颗粒材料的宏观力学行为具有重要意义. 采用应变控制式光弹性试验装置开展颗粒材料不排水剪切试验, 揭示了剪切诱导各向异性的细观拓扑结构演化规律. 研究表明, 组构各向异性在加载初期迅速增加, 达到稳态后趋于稳定; 试验结果也证实了应力-力-组构关系的有效性. 通过将颗粒系统划分为强、弱接触系统, 发现强接触系统的各向异性远高于弱接触系统, 表明系统整体的各向异性主要由强接触系统主导. 进一步分析不同尺寸的细观力环结构的各向异性和传力性能, 结果表明, 不同尺寸的力环对各向异性的贡献存在差异, 大尺寸力环的各向异性更高, 而小尺寸的力环 (特别是 L3 力环) 结构更为稳定. 根据主应力水平, 将力环结构划分为强力环系统和弱力环系统, L3 力环参与强力环系统的比例最高, 其次是 L4 和 L5, L5+ 参与比例最低, 表明小力环结构在抵抗变形和承担外载荷中发挥重要作用. 最后对比分析了粒径分布对各向异性的影响, 发现宽级配试样表现出更显著的各向异性特征.

关键词 颗粒材料, 光弹性试验, 组构张量, 各向异性, 力环

中图分类号: TU43, TV641

文献标识码: A

DOI: 10.6052/0459-1879-25-100

CSTR: 32045.14.0459-1879-25-100

AN INVESTIGATION ON SHEAR-INDUCED ANISOTROPY OF GRANULAR MATERIALS BASED ON MESOSCOPIC TOPOLOGICAL EVOLUTION¹⁾

Cao Wanda* Mei Jiangzhou* Liu Jiaying† Zhou Wei*,** Chang Xiaolin*,**,2) Ma Gang*,**

* (State Key Laboratory of Water Resources Engineering and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

† (Department of Civil Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou 310015, China)

** (Key Laboratory of Rock Mechanics in Hydraulic Structural Engineering of the Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract Granular materials typically exhibit pronounced anisotropic behavior under shear conditions. Investigating the evolution of anisotropy is essential for gaining deeper insight into the macroscopic mechanical behavior of granular

收稿, 录用, 网络版发表.

1) 国家重点研发计划(2024YFC3210602)、国家自然科学基金(52322907; U23B20149和52179141)及湖北省自然科学基金(2025AFB136)资助项目.

2) 通讯作者: 常晓林, 教授, 研究方向为高坝结构设计理论与筑坝颗粒材料力学性质. E-mail: changxl@whu.edu.cn

引用格式: 曹万达, 梅江洲, 刘嘉英, 周伟, 常晓林, 马刚. 基于细观拓扑结构演化的颗粒材料剪切诱导各向异性研究. 力学学报, 2025, 57(7):

1646-1659

Cao Wanda, Mei Jiangzhou, Liu Jiaying, Zhou Wei, Chang Xiaolin, Ma Gang. An investigation on shear-induced anisotropy of granular materials based on mesoscopic topological evolution. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(7):

1646-1659

materials. In this study, undrained shear tests were conducted on granular materials using a strain-controlled photoelastic testing apparatus to investigate the mesoscopic topological evolution of shear-induced anisotropy of the granular assembly. The results show that fabric anisotropy of the granular assembly develops rapidly in the early loading stages and tends to be stable upon reaching a steady state. The experimental results further validate the effectiveness of the stress-force-fabric relationship. By categorizing the granular system into strong contact system and weak contact system, it was observed that the strong contact system exhibits much higher anisotropy than the weak contact system. This suggests that the anisotropy of the overall system is primarily governed by the strong contact system. The anisotropy and force transmission characteristics of force loops of different sizes were also examined. The results show that the contribution of force loops of different sizes to overall anisotropy varies significantly. Specifically speaking, force loops with larger sizes tend to exhibit higher anisotropy, whereas smaller force loops, especially L3, are more stable structures. Force loops were further categorized into strong force loop system and weak force loop system based on the magnitude of their principal stresses. Among them, L3 force loops have the highest participation in the strong force loop system, followed by L4 and L5, while the L5 + loops contribute the least. The results highlight the crucial role of small force loops in resisting deformation and carrying external loads, thereby ensuring the stability and integrity of the granular system under shear conditions. Finally, the influence of particle size distribution on anisotropy was analyzed, revealing that specimens with a wider gradation exhibit more pronounced anisotropic characteristics.

Key words granular materials, photoelastic test, fabric tensor, anisotropy, force loop

引言

颗粒物质是由大量离散固体颗粒通过相互接触形成的复杂系统,广泛存在于自然界和生产生活中^[1-2]。由于其内部结构固有的离散性,颗粒材料通常会呈现出显著的各向异性特征。各向异性对颗粒材料的强度、变形及稳定性具有重要影响^[3-4],深入了解颗粒材料各向异性有助于准确描述和预测颗粒材料的宏观力学行为。根据成因,颗粒材料的各向异性可以分为两种类型:原生各向异性和次生各向异性^[5]。原生各向异性是在颗粒材料的形成过程中产生的;而次生各向异性则是受到外部或内部作用力扰动后形成的。

剪切诱导各向异性是次生各向异性的典型表现形式,指在剪切过程中颗粒材料的接触方向和接触力方向逐渐趋向于主应力方向排列。颗粒物质固有的多尺度结构决定了其宏观力学行为与微细观结构密切相关。为了定量描述微细观结构的各向异性特征并建立其与宏观响应的联系,组构张量被引入作为表征颗粒材料内部结构各向异性的有效数学工具^[6]。组构理论已被广泛应用于研究颗粒形状^[7-8]、抗转动性^[9]、应力路径^[10]、级配^[11]及尺寸效应^[12-13]等因素对颗粒材料剪切诱导各向异性的影响,并揭示了组构各向异性与颗粒材料宏观抗剪强度之间的关系。进一步地, Rothenburg 等^[14]提出应力-力-组构关系,建立了二维圆盘颗粒体系中细观组构张量与宏观剪

切强度之间的跨尺度联系,该关系随后被拓展到三维体系^[15]和非圆颗粒体系^[16]中。此外,部分学者将组构各向异性引入到本构模型中^[17-19]以描述颗粒材料的本构行为。这些研究极大地丰富了对颗粒材料各向异性的理解,然而,当前研究主要依赖离散元模拟,关于颗粒材料各向异性的试验研究仍相对匮乏。

颗粒材料的研究手段主要包括数值模拟和物理试验。尽管离散元 (DEM)^[20]、连续-离散耦合 (FDEM)^[21]等数值模拟方法能够快速、高效地获取数据并已广泛应用于颗粒材料研究,但对于复杂力学行为的机制研究,仍需结合物理试验进行深入验证。光弹性技术作为一种二维应力测量技术,通过双折射效应将材料表面的应力分布以光学条纹的形式可视化。该技术是结构力学、断裂力学及岩石力学中的重要测量手段^[22]。光弹性技术在颗粒体系研究中的应用可追溯至 1950 年代^[23],但早期研究主要局限于对应力分布的定性描述,缺乏定量分析。随着计算机技术的发展,研究学者先后提出了梯度平方法和力逆解算法,实现了基于光弹性技术的颗粒间接触力定性与定量测量^[24-26]。基于该算法,近 20 多年来,研究学者对颗粒系统开展了广泛的研究,包括但不限于剪切各向异性^[25]、阻塞相变^[27]、能量涨落^[28]和屈服^[29]等现象。这些研究显著深化了对二维颗粒体系中接触力分布和力的传递特性的认知。

另一方面,颗粒物质的力学行为与其介观尺度

上的自组织结构密切相关^[30]. 作为典型的自组织结构, 力环在维持试样稳定性和抵抗变形方面起关键作用. 近年来, 力环结构已被成功应用于阐释颗粒材料宏观失稳破坏^[31-32]、临界状态^[33]、剪切带^[34]及剪胀性^[35]等复杂力学现象的成因和机制. 研究也表明, 力环结构的伸长方向与其力学行为之间存在显著关联^[36-37], 因此, 研究细观结构的各向异性特征, 可以为揭示颗粒材料整体各向异性的起源提供新的视角.

本文基于光弹性试验方法, 开展颗粒材料的不排水剪切试验. 首先分析了剪切过程中组构各向异性的演化规律, 揭示了不同划分阈值下强、弱接触系统对各向异性演化的贡献差异. 进一步地, 通过对不同尺寸的力环结构的各向异性和传力性能的研究, 阐明小尺寸力环在承担外载荷中的重要作用. 最后, 探究了粒径分布对各向异性演化特征的影响. 本研究不仅从试验的角度揭示了剪切过程中颗粒材料细观拓扑结构的各向异性演化规律, 还为建立剪切诱导各向异性条件下宏观力学行为的定量关联提供了新的试验依据和理论视角.

1 细观结构量

1.1 组构各向异性

颗粒材料各向异性包括几何各向异性和力学各向异性, 几何各向异性是指颗粒内部结构组构分布的各向异性, 包括接触法向和枝向量的各向异性; 力学各向异性指颗粒间接触力分布的各向异性, 包括法向接触力和切向接触力的各向异性. 采用 Oda^[6]提出的组构张量定义方法来量化接触法向, 组构张量可以表示为

$$\phi_{ij} = \int_{\Theta} E(\Theta) n_i n_j d\Theta = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c} n_i n_j \quad (1)$$

式中, N_c 为总接触数; n_i 和 n_j 分别为单位接触法向在 i 和 j 方向上的分量; $E(\Theta)$ 为接触法向的概率密度函数, 可用一个二阶傅里叶展开表示

$$E(\Theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + a_{ij}^c n_i n_j] \quad (2)$$

式中, a_{ij}^c 为接触法向各向异性张量

$$a_{ij}^c = 4\phi'_{ij} \quad (3)$$

式中, ϕ'_{ij} 为组构张量 ϕ_{ij} 的偏张量. 采用相似的方法, 可以分别定义枝向量、法向接触力和切向接触力的

张量 d_{ij} , N_{ij} , T_{ij}

$$d_{ij} = \int_{\Theta} \bar{d}(\Theta) n_i n_j d\Theta = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c} \frac{d^c n_i n_j}{1 + a_{kl}^c n_k n_l} \quad (4)$$

$$N_{ij} = \int_{\Theta} \bar{f}^n(\Theta) n_i n_j d\Theta = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c} \frac{f^n n_i n_j}{1 + a_{kl}^c n_k n_l} \quad (5)$$

$$T_{ij} = \int_{\Theta} \bar{f}^t(\Theta) n_i n_j d\Theta = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c} \frac{f^t n_i n_j}{1 + a_{kl}^c n_k n_l} \quad (6)$$

对应的概率密度函数可以表示为

$$\bar{d}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \bar{d}^0 [1 + a_{ij}^d n_i n_j] \quad (7)$$

$$\bar{f}^n(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \bar{f}^0 [1 + a_{ij}^n n_i n_j] \quad (8)$$

$$\bar{f}^t(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \bar{f}^0 [1 + a_{ij}^t n_i n_j] \quad (9)$$

式中, $\bar{d}^0$, $\bar{f}^0$ 分别为 Θ 空间中的平均枝向量长度和平均法向接触力. 对应的各向异性张量可表示为

$$a_{ij}^d = 4 \frac{d'_{ij}}{\bar{d}^0} \quad (10)$$

$$a_{ij}^n = 4 \frac{N'_{ij}}{\bar{f}^0} \quad (11)$$

$$a_{ij}^t = 4 \frac{T'_{ij}}{\bar{f}^0} \quad (12)$$

对 4 种各向异性张量 a_{ij}^c , a_{ij}^d , a_{ij}^n 和 a_{ij}^t , 可以计算对应的第二不变量来量化各向异性的程度, 二维颗粒体系下的第二不变量可表示为

$$a_* = \text{sign}(S_r) \sqrt{\frac{1}{2} a_{ij}^* a_{ij}^*} \quad (13)$$

式中, * 代表 c, d, n 或者 t , 即不同的各向异性张量; $\text{sign}(S_r)$ 根据 S_r 的符号取单位正负值; S_r 是一个无量纲的归一化参数, 定义为各向异性张量 a_* 与应力张量 σ 之间的双点积, 可表示为

$$S_r = \frac{a_{ij}^* \sigma'_{ij}}{\sqrt{a_{kl}^* a_{kl}^*} \sqrt{\sigma'_{mn} \sigma'_{mn}}} \quad (14)$$

S_r 表征各向异性张量 a_* 的主方向与应力张量 σ 的主方向之间的相对取向关系, 若 S_r 为正, 则表示两者的主方向较为接近; 若为负值, 则表示两者的主

方向趋近于互相垂直。

1.2 不同接触系统的各向异性

为量化不同接触系统对系统整体各向异性的贡献, 采用 Zhang 等^[38]提出的子系统各向异性定义方法, 组构张量、枝向量张量、法向接触力张量和切向接触力张量表示为

$$\phi_{ij}^e = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c^e} n_i n_j \quad (15)$$

$$d_{ij}^e = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c^e} \frac{d^c n_i n_j}{1 + a_{kl}^e n_k n_l} \quad (16)$$

$$N_{ij}^e = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c^e} \frac{f^n n_i n_j}{1 + a_{kl}^e n_k n_l} \quad (17)$$

$$T_{ij}^e = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in N_c^e} \frac{f^t n_i n_j}{1 + a_{kl}^e n_k n_l} \quad (18)$$

式中, N_c 为总系统的接触数; N_c^e 为强/弱接触系统中的接触数. 对应的各向异性张量可表示为

$$a_{ij}^c = 4(\phi_{ij}^e)' \quad (19)$$

$$a_{ij}^d = 4 \frac{(d_{ij}^e)'}{\bar{d}^0} \quad (20)$$

$$a_{ij}^n = 4 \frac{(N_{ij}^e)'}{\bar{f}^0} \quad (21)$$

$$a_{ij}^t = 4 \frac{(T_{ij}^e)'}{\bar{f}^0} \quad (22)$$

式中, $\bar{d}^0$ 和 $\bar{f}^0$ 分别为总系统的平均枝向量长度和平均法向接触力。

1.3 强弱接触系统

大量研究证明, 颗粒材料中存在几何结构和力学性能差异显著的强接触系统和弱接触系统^[38-42]. 为准确识别这两种接触系统, 采用 Peters 等^[43]提出的强弱接触系统的判断标准. 首先计算单颗粒的应力张量

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{V^p} \sum_{c=1}^{N_c} f_i^c r_j^c \quad (23)$$

式中, V^p 和 N_c 分别为颗粒 p 的面积和接触数; f_i^c 为

第 c 个接触的接触力在 i 方向上的分量; r_j^c 为第 c 个接触的枝向量在 j 方向上的分量. 通过下式可计算颗粒的大主应力

$$\sigma_1^p = \frac{\sigma_{11}^p + \sigma_{22}^p}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}^p - \sigma_{22}^p}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^p \sigma_{21}^p} \quad (24)$$

为区分强弱接触系统, 引入一个阈值 ζ , 若颗粒的大主应力大于 $\zeta \sigma_1^p$, 则认为该颗粒属于强接触颗粒, 否则为弱接触颗粒. 强接触颗粒之间的接触组成强接触系统, 其他接触组成弱接触系统。

2 光弹性试验方法

2.1 光弹试验装置及原理

如图 1 所示, 光弹试验装置由光源、两个圆偏振镜、加载装置和图像采集系统组成. 光源提供无偏振白光, 无偏光通过圆偏振镜转化为圆偏振光. 靠近光源的圆偏振镜称为起偏镜, 靠近图像采集系统的圆偏振镜称为检偏镜, 两偏振镜方向相互垂直, 共同组成偏振光场. 偏振光场中间为加载装置, 用于放置光弹性试样并施加外部载荷。

光弹性技术基于光弹性材料受力后产生双折射性的原理. 材料无应力时, 光线无法透过, 形成黑暗的图像. 当材料受到外力作用时, 表面每点会产生局部应力张量, 即存在一对方向互相垂直的大主应力和小主应力. 当偏振光透射过时, 会沿着主应力方向产生两道折射光线. 两道折射光线的折射率与主应力之间的关系可以用光弹性方程表示

$$n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (25)$$

式中, n_1 和 n_2 为两条折射光线对应的折射率; σ_1 和 σ_2 分别为试样表面任意点的大主应力和小主应力;

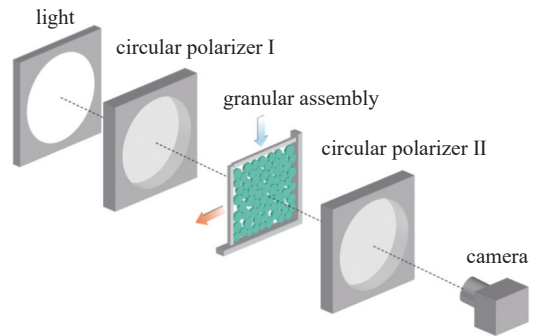


图 1 试验装置示意图

Fig. 1 The schematic of the experimental setup

C 为材料的应力-光学系数. 这种速度差导致了这两个波分量的相对相位差, 将圆偏振光转换为椭圆偏振光, 两个波分量的相位差可表示为

$$\alpha = \frac{2\pi Cd}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (26)$$

式中, d 为材料厚度, λ 为波长. 椭圆偏振光通过检偏镜之后, 最终成像. 材料表面任意点的光强表示为

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = I_0 \sin^2 \left[\frac{\pi Cd}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \quad (27)$$

式中, C 为材料的应力-光学系数, d 为材料厚度, λ 为波长. 该式表示材料表面的光弹性响应不仅与材料的应力状态有关, 也与所选择的材料性质, 材料厚度和光源有关.

本次试验采用的光弹性材料是聚碳酸酯, 该材料具有较高的光弹响应灵敏度、优良的抗冲击性能, 并且易于加工. 试验材料的制备方法为使用雕刻机将聚碳酸酯板切割成圆柱形颗粒. 试验中使用直径为 5 和 6 mm 两个尺寸的颗粒, 按照 1:1 的比例混合制成颗粒试样, 试验所用到的颗粒总数大约为 2340 个, 颗粒的厚度为 3 mm.

由于聚碳酸酯在制造和加工过程中会产生残余应力, 会对光弹条纹产生干扰, 因此有必要对试验材料进行退火操作以消除残余应力^[44]. 退火操作的具体步骤是先将光弹颗粒完全浸没于植物油中, 放置于烘箱中, 以 10 °C ~ 15 °C/h 的速度将烘箱的温度缓慢上升至 150 °C 左右, 之后保持在该温度大约 8 h 使其残余应力得以完全释放, 最后以 10 °C/h 将温度缓慢降低至室温.

2.2 试验过程与宏观响应

将混合均匀的颗粒试样置于试样腔中, 试样顶部和侧面均为刚性加载板, 以提供稳定的边界约束条件. 通过控制边界对颗粒试样进行各向同性的压缩, 直至达到预定围压 200 kPa, 试样的孔隙率约为 17.40%. 然后, 继续通过控制边界条件对颗粒试样开展不排水剪切. 在此过程中, 通过伺服电机驱动竖向加载板以恒定速度 (0.1%/min) 对试样施加轴向压缩. 为实现不排水条件下的恒体积剪切, 侧向加载板同样由伺服控制, 通过实时调节其位移速度使其沿水平方向逐渐向外移动, 确保整体体积保持恒定. 由于试验条件限制, 试验中采用了刚性边界条件, 一些研究中也采用柔性边界来模拟二维颗粒试样的剪切

过程^[45-46]. 相较于柔性边界, 刚性边界能够有效约束边界处颗粒的运动, 使其在受力作用下产生与边界近似一致的位移, 从而限制颗粒在横向方向上的过大位移和旋转. 该边界形式对接触力的分布具有显著影响. 由于刚性边界无法沿边界均匀施加围压, 易在局部区域诱发应力集中现象, 并促使接触力链在侧向方向上发展, 从而改变颗粒体系的力学响应特征^[45-46].

试验中每个载荷步的轴向应变增量为 0.05%, 每个载荷步下将会采集两张图像, 一张是在无偏振镜下采集的图像, 如图 2(a) 所示; 另一张是在偏振光条件下采集的图像, 如图 2(c) 所示. 在无偏振光图像中, 颗粒的颜色与背景形成明显对比, 可以直接对无偏振下的图像进行霍夫变换 (Hough transform) 以确定圆心的坐标和半径, 颗粒识别结果如图 2(b) 所示. 根据颗粒的圆心和半径, 从偏振光下的图像中分别提取出每个颗粒的光弹图像, 采用力逆求解算法求解接触力. 该算法以颗粒受到的接触力为自由参数, 对每个颗粒分别进行参数迭代拟合, 每一步迭代中对颗粒受到的接触力进行增加或减小, 并对比理论解与图像观测值之间的差异, 不断调整参数直至理论求解值与原始图像最为接近. 力逆求解算法的具体步骤可以参考 Daniels 等^[26] 和 Majmudar 等^[25,47] 的工作. 力逆求解算法应力重构图像如图 2(d) 所示, 与图 2(c) 对比可知, 该算法具有较高的求解精度.

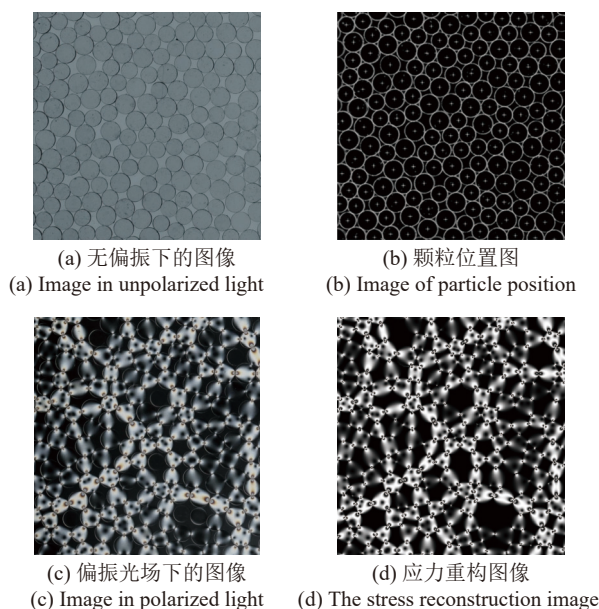


图 2 光弹性试验图像

Fig. 2 Photoelastic test images

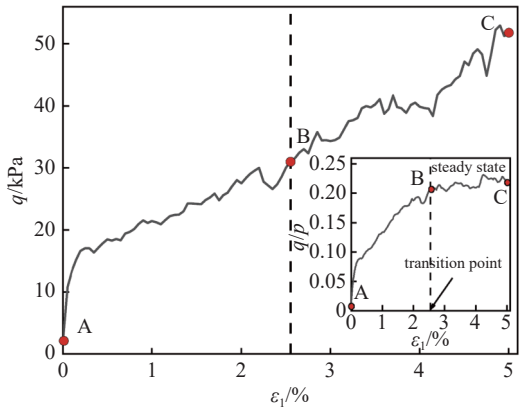
通过求解的接触力和接触方向, 可根据下式计算颗粒体系的应力张量

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c \in N_c} f_i^c l_j^c \quad (28)$$

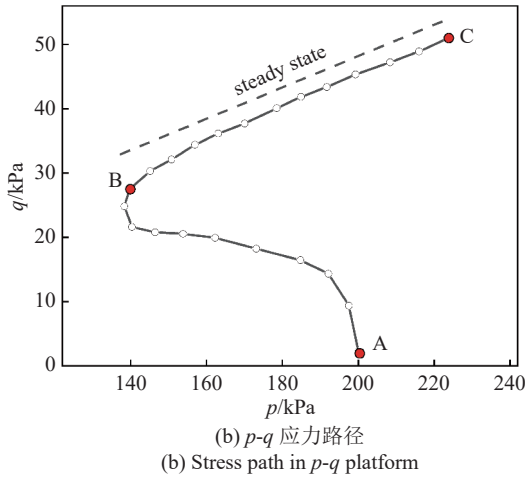
式中, V 为颗粒试样的体积, N_c 为颗粒试样的总接触数, f_i^c 为第 c 个接触的接触力在 i 方向上的分量, l_j^c 为第 c 个接触的枝向量在 j 方向上的分量. 得到试样的应力张量之后, 可根据下式计算颗粒试样的平均应力和偏应力

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ q &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中, σ_1 和 σ_2 分别为试样的最大主应力和最小主应力. 图 3(a) 和图 3(b) 分别给出偏应力/应力比随轴向应变的演化过程和对应的 p - q 平面的应力路径. 在



(a) 偏应力的演化曲线, 插图为偏应力的演化曲线
(a) Evolution of deviatoric stress. The inset denotes the evolution of stress ratio



(b) p - q 应力路径
(b) Stress path in p - q platform

图 3 不排水剪切下颗粒试样的宏观响应

Fig. 3 The macroscopic response of granular assemblies under undrained shear

整个加载过程中, 试样的偏应力 q 呈现整体持续增长的趋势, 没有出现明显的偏应力峰值点, 试样整体呈现出剪切硬化的特征. 而平均应力在加载初期先呈现出减小的趋势, 当达到一个相变点之后, 应力路径发生了偏转, 平均应力开始逐渐增加. 在应力路径发生偏转之后, p - q 平面的应力路径近似于一条直线, 应力路径发生偏转之后的状态可称为稳态. 达到相变点之前, 试样的应力比快速增长, 在进入稳态之后, 试样的应力比基本保持恒定, 相变点大约出现在轴向应变 $\varepsilon_1 = 2.55\%$. 图 3 中状态 A ~ C 分别表示初始状态、相变点和最终状态.

3 稳态各向异性

颗粒材料是通过颗粒之间相互接触形成的复杂网络结构, 其各向异性的演化可以通过接触网络揭示, 图 4 展示了不同应变状态下的接触网络演化. 在状态 A, 由于试样尚未受到剪切作用, 接触方向呈各向同性分布, 试样整体表现为各向同性. 在状态 B, 剪切作用导致接触网络发生快速调整和重排, 沿主应力方向的新增接触数量明显增多, 而垂直于主应力方向的接触数量减少, 同时已有接触向主应力轴旋转. 这种定向重排导致接触网络的各向异性迅速增强. 状态 C 中, 沿主应力方向的接触数进一步增

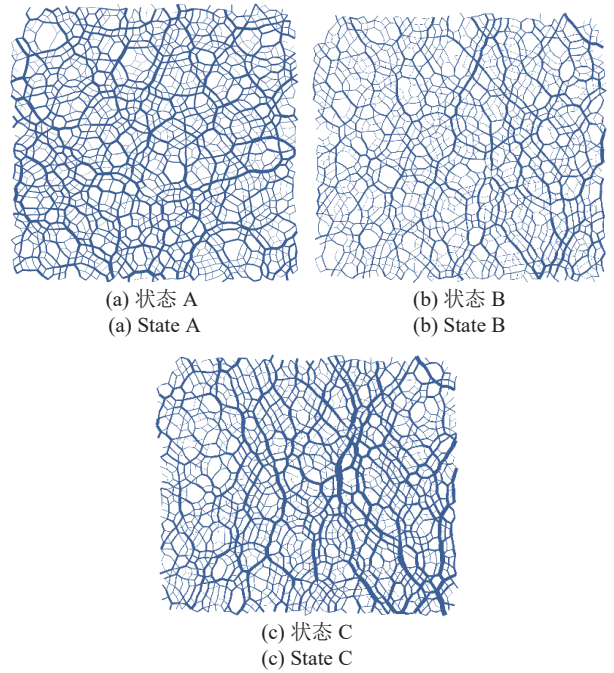


图 4 不同应变状态下的接触网络演化. 线宽代表接触力的大小
Fig. 4 Evolutions of contact network in different strain states. The width of lines represents the magnitude of contact force

加,网络各向异性特征更为显著.伴随着宏观应力的增加,平均接触力显著增强,可以观察到平行于主应力方向的强力链贯穿整个网络.

图 5 为试样在状态 A ~ C 的接触方向分布和接触应力分布.在初始状态下,试样的接触沿各方向大致成均匀分布,随着加载的进行,沿 60° 和 120° 的接触的数量逐渐增多,垂直于法向方向的接触数量逐渐减少,接触力的方向也逐渐倾向于法向方向,试样整体显现出明显的各向异性;对比初始稳态状态和最终状态,可以发现进入稳态之后,接触分布基本不会发生变化.进入稳态之后,无论接触分布还是接触力的分布都不是沿 90° 对称分布,而是沿逆时针方向发生了一定的偏转,对称轴大约为 100° .这可能是因为试验装置仅允许左侧延伸而保持右侧固定.

图 6(a) 给出各向异性系数 a_c , a_d , a_n 和 a_t 的演化曲线.组构各向异性和法向接触力各向异性主导了颗粒材料的剪切强度.在初始状态下,各向异性水平较低,试样整体呈现出各向同性;随着加载过程的进行, a_c 和 a_n 均出现了显著的增长,在达到稳态之后趋向于平稳.为了进一步探讨剪切强度与各向异

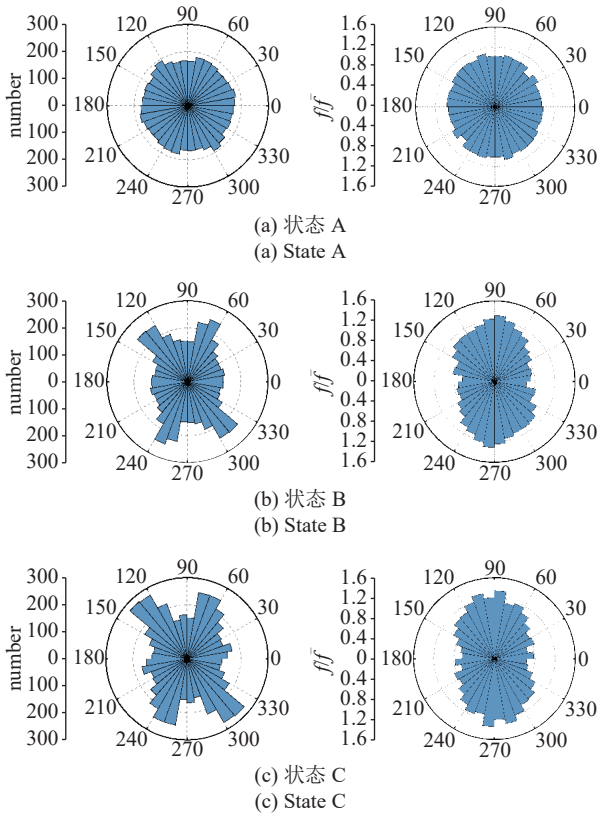
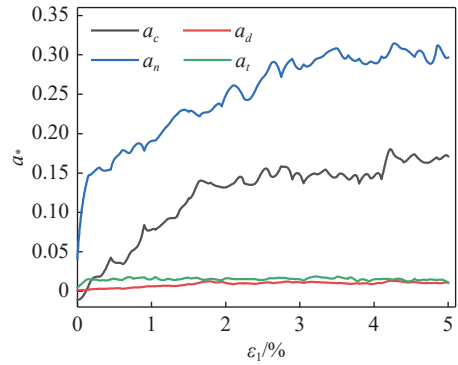
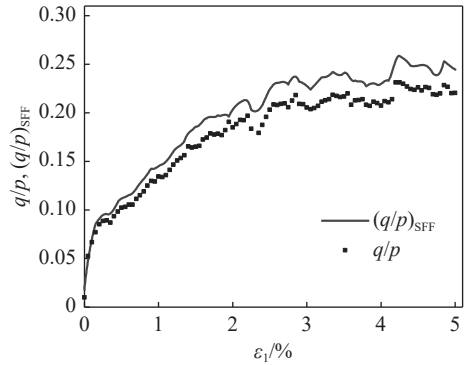


图 5 试样在不同轴向应变状态下的接触分布和接触力分布
Fig. 5 The distribution of contact and contact force of the assemblies under different axial strain states



(a) a 的演化曲线
(a) The evolution of a



(b) 应力-力-组构关系验证
(b) The verification of stress-force-fabric relationship

图 6 各向异性的演化

Fig. 6 The evolution of anisotropy

性之间的关系,对 Voivret 等^[48]提出的二维圆形颗粒的应力-力-组构关系进行验证

$$\frac{q}{p'} = \frac{1}{2}(a_c + a_d + a_n + a_t) \quad (30)$$

如图 6(b) 所示,试验中的应力比与公式中的应力比基本吻合,从试验的角度验证了应力-力-组构关系.需要注意的是,基于各向异性系数计算出的应力比略大于试验结果,这可能是由于光弹试验中微小接触力难以检测,导致各向异性系数偏高.

进一步分析不同接触系统的各向异性.根据第 1.3 节定义的方法,将整个网络划分为强接触系统和弱接触系统.由于阈值的选取会影响不同接触系统的特征^[3,41,49],因此选取不同的阈值 ($\zeta = 0.8 \sim 1.2$) 开展对比分析,以探讨其对各向异性演化特征的影响.图 7 给出不同阈值条件下,强接触系统和弱接触系统各向异性的演化.可以看出,在该阈值范围内,阈值的选取不会显著影响强弱接触系统对各向异性的贡献.强接触系统对各向异性的贡献始终远高于弱接触系统,表明强接触系统在各向异性形成中起到

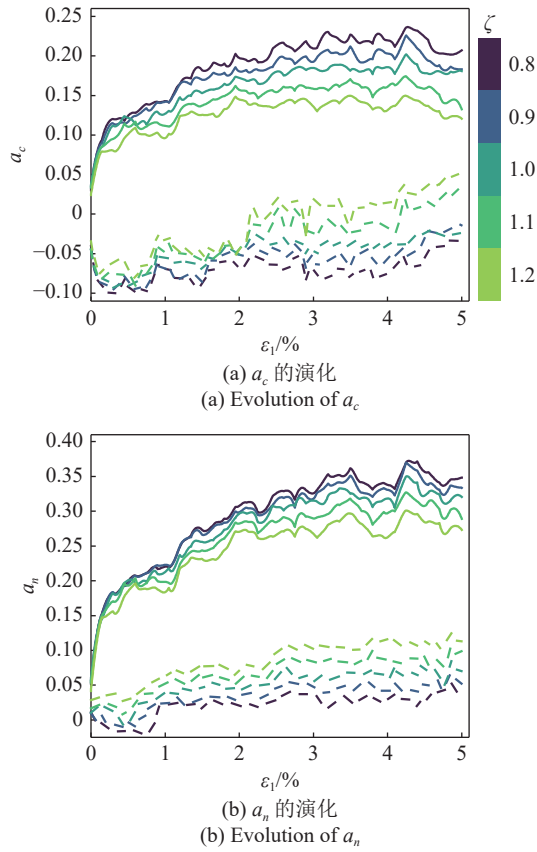


图 7 不同阈值下强弱接触系统中 a_c 和 a_n 的演化. 实线代表强接触系统, 虚线代表弱接触系统

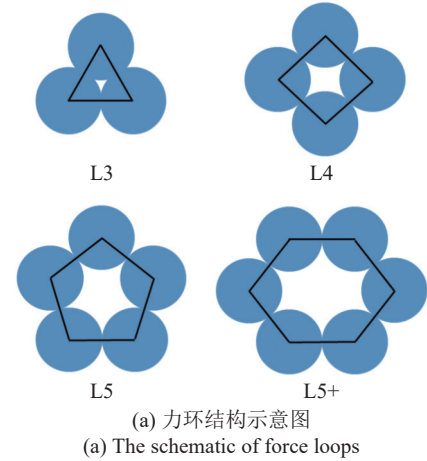
Fig. 7 The evolution of a_c and a_n of strong and weak contact systems under different thresholds. The solid line represents strong contact system and the dashed line represents the weak contact system

主导作用.

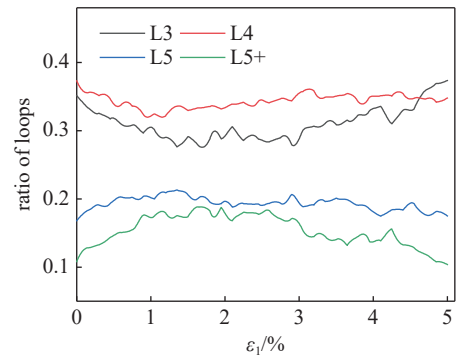
需要注意的是, 本节中采用的组构张量基于点接触定义, 对于复杂形状的颗粒而言, 其接触形态复杂, 接触形式不再局限于点接触, 而是转变为更加复杂的边缘咬合或点-面、面-面接触, 基于点接触定义的组构张量不再适用于这种复杂的接触方式, 对于非圆颗粒, 有必要引入基于接触面的物理量以对组构张量进行拓展.

4 细观力环结构的各向异性

力环结构是由颗粒通过互相接触形成的封闭多边形结构. 力环结构的性质主要取决于力环的边数. 通常来说, 边数小的力环更加密实且不易变形. 根据环的边数, 把环分为 4 种类型, 分别为 L3, L4, L5 和 L5+, 由于当环的边数大于 5 时, 环的性质区别不大, 因此把边数大于 5 的环归为 L5+. 环结构的示意图如图 8(a) 所示.



(a) 力环结构示意图



(b) 不同力环结构所占比例的演化曲线

(b) The evolution curve of ratios of different loops

图 8 不同尺寸的力环结构示意图及演化曲线

为了量化不同力环结构的数量演化, 定义力环所占比例为特定尺寸的力环的数量与总力环数量之间的比值. 图 8(b) 给出了不同力环占总力环的比例的演化曲线. 可以看出 L3 和 L5+ 是演化最活跃的一种环结构. 在加载初期, L3 先呈现出逐渐下降的趋势, 而在达到稳态之后, 由于平均应力的增加, 颗粒间接触增多, L3 也随之增加; 与之相反, L5+ 则呈现出先增加后减小的趋势. L4 和 L5 则表现得并不活跃, 其占比随着加载变化不明显.

为量化力环结构的各向异性, 采用 Nguyen 等^[36]提出的力环张量定义方法, 单个力环的张量可用下式表示

$$\mathbf{L}^h = \sum_{k=1}^{r^h} l^k \mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k \quad (31)$$

式中, l^k 为第 k 个接触的长度; $\mathbf{n}^k$ 为第 k 个接触的单位矢量; r^h 为该力环的边数. 根据定义的力环张量, 力环的伸长方向 $\mathbf{m}$ 定义为力环张量的主方向, 如

图 9 所示. $m = 90^\circ$ 表示力环结构的主方向平行于宏观加载方向. 图 10(a) 给出了应变状态 A ~ C 下的试样整体力环方向分布. 可以看出, 在初始时刻, 力环结构在不同方向近似均匀分布, 表明初始状态的各向同性. 当试样进入稳态之后, 主方向靠近 90° 的力环结构数量增加, 表明力环结构逐渐向宏观加载方向旋转以适应外部载荷. 为了研究不同尺寸的力环结构的各向异性, 图 10(b) 给出了状态 C 下的不同

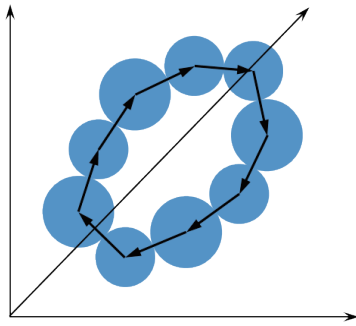
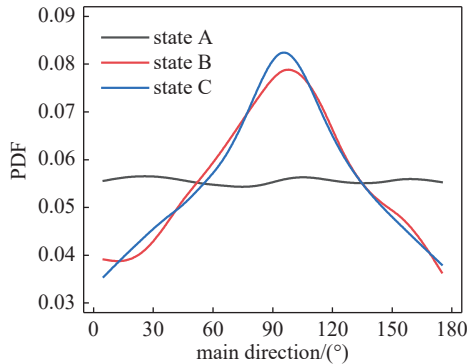


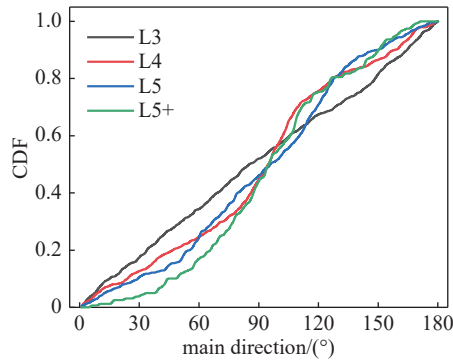
图 9 环的伸长方向示意图

Fig. 9 Schematic of the elongation direction of loops



(a) 试样在不同应变状态下的力环取向分布

(a) The distribution of the direction of force loops in different states



(b) 状态 C 下的不同尺寸力环的取向的累积概率密度分布

(b) The cumulative distribution of direction of different loops in state C

图 10 力环取向分布

Fig. 10 The distribution of the direction of force loops

尺寸的力环伸长方向的累计概率密度分布, 小尺寸的力环结构 L3 在各个方向近似均匀分布, 当力环的尺寸增加时, 力环伸长方向的分布开始变得不均匀, 伸长方向在 $60^\circ \sim 120^\circ$ 之间的力环所占比例逐渐增加, 证明了力环结构的各向异性主要由大尺寸的力环结构引起, 而小尺寸的力环结构 L3 是不易发生变形和旋转的.

在确定单个力环的主方向后, 对于一个特定的力环集合, 其组构张量可以用下式表示^[37]

$$\mathbf{F} = \frac{1}{V} \sum_{L \in T} V^L \mathbf{m}^L \otimes \mathbf{m}^L \quad (32)$$

式中, V 为集合中力环的总体积, V^L 为单个力环的体积. 用力环集合的组构张量的偏张量 ($F' = F_{11} - F_{22}$) 来描述力环集合的各向异性. 图 11 给出 4 种力环结构 L3, L4, L5 和 L5+ 的各向异性演化趋势. 可以看出, 对于 L3, 无论加载到什么状态, 其组构张量偏张量始终保持在一个极小的值, 这与前文中三力环结构取向均匀分布的结果一致. L4, L5 和 L5+ 为可变形的力环结构, 其组构张量偏张量随着试样加载均有明显的增加; 在达到稳态后, 各类环结构的各向异性均趋于稳定, 与试样整体的各向异性基本一致; 且 L5+ 的各向异性水平最高, 其次是 L5 和 L4, 进一步证明了较大尺寸的力环结构相较于小尺寸的力环具有更高的变形性能.

力环的各向异性的变化不仅反映了力环结构在加载过程中的变形行为, 还直接影响了其内部的应力分布和传递机制. 接下来将对力环结构的传力特性进行分析. 采用 Nguyen 等^[36] 提出的力环应力定义方法, 单个力环的应力张量可通过下式表示

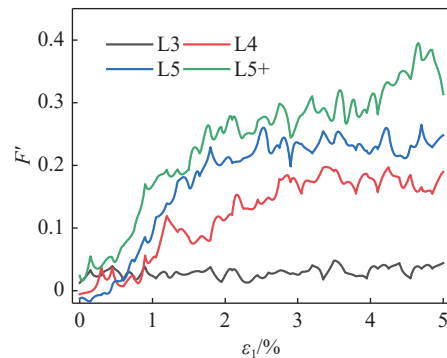


图 11 不同尺寸的力环结构各向异性

Fig. 11 The anisotropy of force loops of different sizes

$$\sigma^L = \frac{1}{\tilde{V}^L} \left(\sum_{c \in K_{in}^L} f_{in}^c \otimes l^c + \sum_{c \in K_{out}^L} f_{out}^c \otimes r^c \right) \quad (33)$$

式中, $\tilde{V}^L$ 为力环中空隙体积和参与力环的颗粒体积之和; K_{in}^L 为力环 L 内部接触的集合; K_{out}^L 为力环 L 内的颗粒与力环外的颗粒接触的集合; f^c 为第 c 个接触的接触力; l^c 和 r^c 分别为枝向量和半径向量. 对于一个力环集合体 S 而言, 考虑到不同的力环面积不同, 力环集合体 S 的应力张量定义为^[50]

$$\sigma^S = (\sum V^L \sigma^L) / (\sum V^L) \quad (34)$$

式中, V^L 为力环 L 的体积. 力环集合体 S 的平均应力和偏应力可表示为: $p^S = (\sigma_1^S + \sigma_2^S) / 2$, $q^S = (\sigma_1^S - \sigma_2^S) / 2$, 其中 σ_1^S 和 σ_2^S 分别为力环集合体的大主应力和小主应力. 为验证力环应力张量定义的合理性, 将通过力环定义的应力同宏观应力做对比, 如图 12 所示, 可以看出, 通过力环应力张量得到的平均应力和偏应力与宏观应力基本保持一致, 可以证明力环应力张量在剪切条件下的合理性.

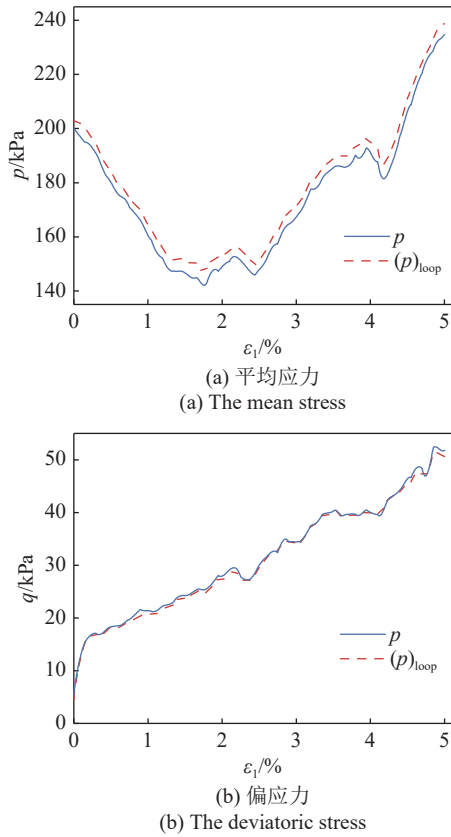


图 12 通过力环张量计算的应力与宏观应力之间的对比

Fig. 12 Comparison between stress derived from force tensor of loops with macroscopic stress

得到力环的应力张量之后, 根据下式计算单个力环的最大主应力

$$\sigma_1^L = \frac{\sigma_{11}^L + \sigma_{22}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}^L - \sigma_{22}^L}{2}\right)^2 + (\sigma_{12}^L)^2} \quad (35)$$

式中, σ^L 为力环 L 的应力张量. 当一个力环的主应力大于整个系统中的力环平均主应力时, 则可认为该力环属于强力环系统, 否则该力环归类为弱力环系统. 图 13 给出强/弱力环系统中的力环比例. 该力环

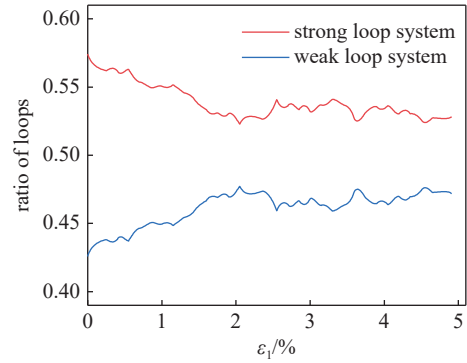


图 13 强/弱力环系统中的力环比例

Fig. 13 The ratio of loops of strong/weak force loop system

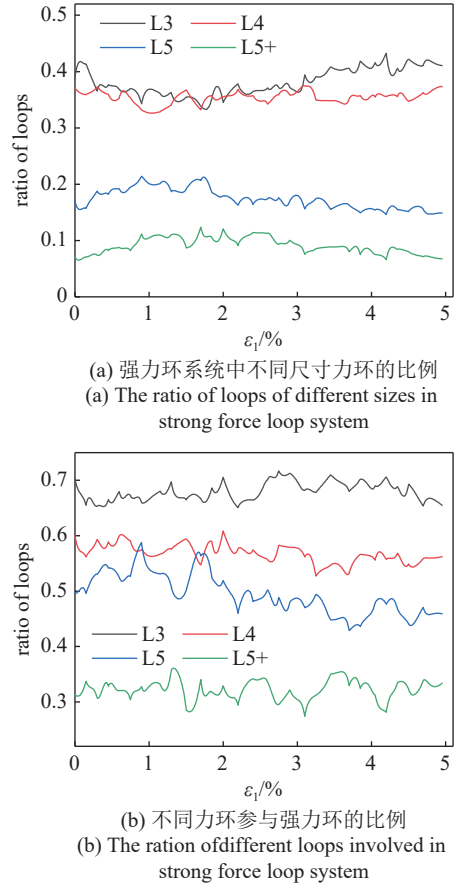


图 14 强力环系统中力环比例的演化曲线

Fig. 14 The ratio of force loops in strong force loop system

比例定义为强/弱力环系统中的力环数量与试样中的总力环数量之比. 可以看出, 在加载初期, 强力环系统所占的力环比例大约为 0.57, 随着加载的进行, 这一比例稍有下降, 达到稳态之后, 强力环系统中力环比例维持在 0.53 左右.

图 14(a) 给出强力环系统中不同尺寸的力环的比例演化, 该比例定义为强力环系统中不同尺寸的力环的数量与强力环总数的比值. 可以看出, 强力环系统中 L3 和 L4 占据的数量比例最高, 且在达到稳态之后, 其数量比例有持续增长的趋势; 而与之相反的是, L5 和 L5+ 的力环比例较低, 且在达到稳态之后, 其力环比例有所下降. 图 14(b) 给出不同尺寸力环参与强力环的比例. 该比例定义为强力环系统中某尺寸力环的数量与试样整体中该力环的数量之间的比值. 可以看出大约有 2/3 的 L3 力环参与到强力环系统中, 而 L4, L5 和 L5+ 的比例依次递减, 说明了小尺寸力环, 特别是 L3 力环在承受载荷中发挥重要的作用.

进一步验证不同尺寸的力环结构承受外部载荷中的作用. 图 15(a) 和图 15(b) 分别给出不同尺寸的力环的平均应力和偏应力的演化曲线. 可以看出, 所有类型的力环的平均应力和偏应力演化趋势均与宏

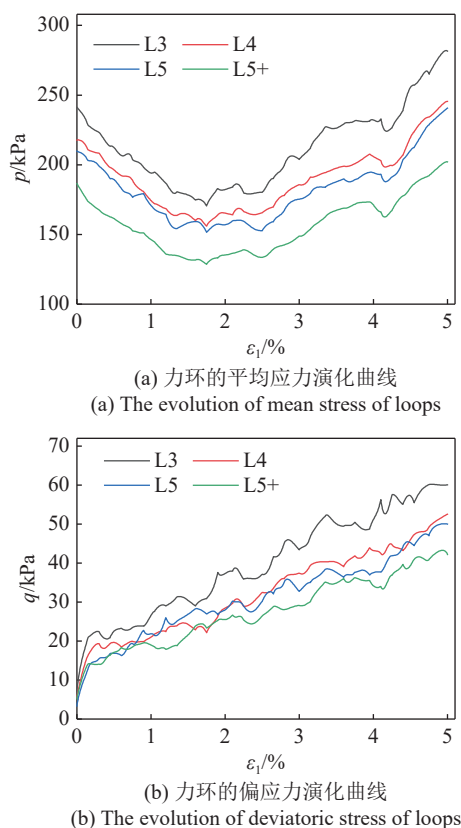


图 15 不同尺寸的力环的应力的演化曲线

Fig. 15 The evolution curve of stress of force loops of different sizes

观应力保持一致, 即在加载初期, 平均应力呈现出先降低的趋势, 达到稳态之后, 平均应力开始上升; 而偏应力则呈现出持续上升的趋势. 对比不同环结构承受的应力, L3 的平均应力和偏应力最大, 其次是 L4 和 L5+, L6 的应力水平最低, 说明了 L3 在承受外载荷中发挥的作用最大.

5 粒径分布对各向异性的影响

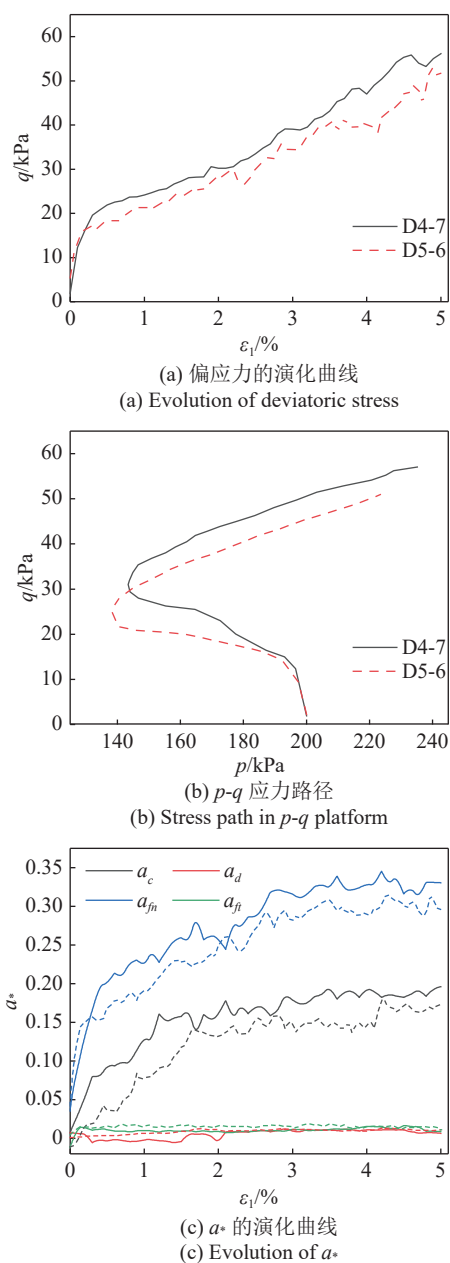


图 16 不同粒径分布试样的各向异性特征. 实线代表试样 D4-7, 虚线代表试样 D5-6

Fig. 16 The anisotropy characteristics of granular samples with different particle size distribution. The solid line represents D4-7, and the dashed line represents D5-6

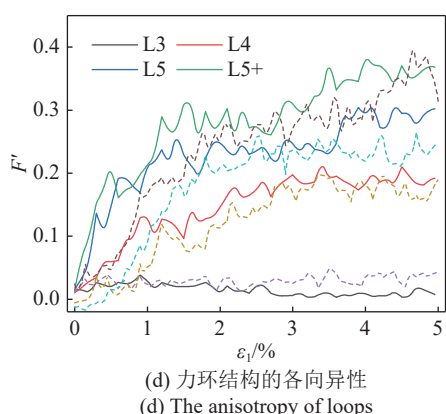


图 16 不同粒径分布试样的各向异性特征. 实线代表试样 D4-7, 虚线代表试样 D5-6 (续)

Fig. 16 The anisotropy characteristics of granular samples with different particle size distribution. The solid line represents D4-7, and the dashed line represents D5-6 (continued)

颗粒粒径分布是影响颗粒材料力学行为的重要因素, 为探究粒径分布对颗粒材料剪切诱导各向异性的影响, 在原试样的基础上, 设计了一组宽级配试样, 由直径为 4, 5, 6 和 7 mm 的圆盘状颗粒以 1:1:1:1 的比例混合而成, 原试样和新试样分别记为 D5-6 和 D4-7. 两组试样的宏观响应如图 16(a) 和图 16(b) 所示, 可以看出 D4-7 具有更高的应力水平, 且在相同平均应力下, D4-7 的偏应力更高, 表明了具有更高的应力比. 这是因为宽级配试样中, 小颗粒更容易填充到孔隙中, 试样更加密实. 图 16(c) 和图 16(d) 给出两组试样的组构张量和力环各向异性的演化曲线, 可以看出宽级配试样表现出更为显著的各向异性, 这是由于宽级配试样中, 小颗粒更易填充大颗粒之间的孔隙, 使试样更加密实, 并在剪切过程中提供更稳定的侧向支撑, 促使试样剪切强度提升, 从而诱使试样各向异性水平的发展.

6 结论

本文基于一套应变控制式光弹性试验装置, 开展了颗粒材料双轴不排水剪切试验. 通过细观组构张量分析, 系统研究了颗粒材料在剪切过程中的各向异性演化特征. 主要结论如下.

(1) 在剪切过程中, 接触方向和接触力方向均表现出较强的各向异性特征, 其方向均呈现向宏观加载方向靠拢的趋势. 试样的各向异性参数 a_c , a_d , a_n 和 a_t 在剪切过程中持续增加, 并在达到稳态之后保持稳定. 其中, 接触法向各向异性和法向接触力各向异性对试样的剪切强度贡献尤为显著. 试验结果进

一步验证了应力-力-组构关系的有效性, 颗粒试样的剪切强度与其各向异性水平之间成正比.

(2) 根据主应力大小, 将系统划分为强接触系统和弱接触系统. 检验了阈值 $\zeta = 0.8 \sim 1.2$ 时不同接触系统对各向异性的贡献, 发现在该阈值范围对接触系统各向异性的影响不显著. 强接触系统的组构各向异性和法向接触力各向异性均远高于弱接触系统, 这表明试样整体的各向异性主要源于强接触系统的贡献.

(3) 与接触力分布类似, 力环结构的取向分布在加载过程中表现出明显的各向异性特征, 即伸长方向接近宏观加载方向的力环比例逐渐增加, 并在达到稳态后趋于稳定. 不同尺寸的力环结构表现出不同的各向异性特征: 较大尺寸的力环结构具有较高的取向各向异性, 其伸长方向沿主应力方向分布较为集中, 且易于发生旋转和变形; 而小尺寸的力环 (特别是 L3 力环) 的各向异性水平较低, 其伸长方向沿各个方向均匀分布, 不易发生旋转和变形. 在传力性能方面, 根据主应力大小, 将力环结构划分为强力环系统和弱力环系统. 小尺寸力环参与到强力环系统的比例远高于大尺寸力环, 且小尺寸力环承受了大部分的应力.

(4) 对比了不同粒径分布的试样的各向异性演化特征, 粒径分布不会显著影响细观拓扑结构的演化规律, 但是相较于窄级配的试样, 宽级配的试样表现出更高的各向异性水平.

参 考 文 献

- Jaeger H, Nagel S, Behringer R. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 1996, 68(4): 1259-1273
- Mei J, Ma G, Cao W, et al. Graph neural network unveils the spatiotemporal evolution of structural defects in sheared granular materials. *International Journal of Plasticity*, 2025, 184: 104218
- 刘嘉英, 周伟, 马刚等. 颗粒材料三维应力路径下的接触组构特性. *力学学报*, 2019, 51(1): 26-35 (Liu Jiaying, Zhou Wei, Ma Gang, et al. Contact fabric characteristics of granular materials under three dimensional stress paths. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 26-35 (in Chinese))
- 杨仲轩, 廖栋, 钱建固等. 土的基本特性及本构关系. *土木工程学报*, 2025, 58(4): 88-107 (Yang Zhongxuan, Liao Dong, Qian Jiangu, et al. Fundamental behaviors and constitutive relationships of soils. *China Civil Engineering Journal*, 2025, 58(4): 88-107 (in Chinese))
- Casagrande A, Carillo N. Shear failure of anisotropic materials. *Journal of Boston Society of Civil Engineers*, 1944, 31(4): 74-87
- Oda M. Fabric tensor for discontinuous geological materials. *Soils*

- and Foundations*, 1982, 22(4): 96-108
- 7 周小文, 许衍彬, 赵仕威等. 偏心率对颗粒介质次生各向异性的影响. 华南理工大学学报 (自然科学版), 2022, 50(11): 141-154 (Zhou Xiaowen, Xu Yanbin, Zhao Shiwei, et al. Influence of eccentricity on induced anisotropy of granular media. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2022, 50(11): 141-154 (in Chinese))
- 8 Liu Y, Liu X, Ren J. Effect of particle shape on contact network and shear-induced anisotropy of granular assemblies: A DEM perspective. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2024, 150(3)
- 9 Zhao S, Evans T, Zhou X. Shear-induced anisotropy of granular materials with rolling resistance and particle shape effects. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, 150: 268-281
- 10 齐阳, 唐新军, 李晓庆. 粗粒土应力诱发各向异性真三轴试验颗粒流模拟研究. 岩土工程学报, 2015, 37(12): 2292-2300 (Qi Yang, Tang Xinjun, Li Xiaoqing. Stress-induced anisotropy of coarse-grained soil by true triaxial tests based on PFC. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, 37(12): 2292-2300 (in Chinese))
- 11 Pegah E, Gu X, Liu H. Fabric anisotropy of granular soils and its dependency on grading and particles specifications. *Acta Geotechnica*, 2024, 19: 7619-7633
- 12 Liu Y, Yan Z. Particle size effect on the evolution of stress and fabric in granular materials under true triaxial conditions. *International Journal of Geomechanics*. 2025, 25(4)
- 13 Shi X, He Z, Zhao J, et al. Determination of the size of representative volume element for gap-graded granular materials. *Powder Technology*, 2024, 437: 119578
- 14 Rothenburg L, Bathurst R. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Géotechnique*, 1989, 39(4): 601-614
- 15 Guo N, Zhao J. The signature of shear-induced anisotropy in granular media. *Computers and Geotechnics*, 2013, 47: 1-15
- 16 Zhao S, Zhou X. Effects of particle asphericity on the macro- and micro-mechanical behaviors of granular assemblies. *Granular Matter*, 2017, 19(2)
- 17 Li X, Dafalias Y. Anisotropic critical state theory: Role of fabric. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, 138(3): 263-275
- 18 Ueda K, Iai S. Constitutive modeling of inherent anisotropy in a strain space multiple mechanism model for granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2018, 43(3): 708-737
- 19 蒋明镜, 周卫, 刘静德等. 基于微观力学机制的各向异性结构性砂土的本构模型研究. 岩土力学, 2016, 37(12): 3347-3355 (Jiang Mingjing, Zhou Wei, Liu Jingde, et al. A constitutive model for anisotropic structured sandy soil based on micromechanical mechanism. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, 37(12): 3347-3355 (in Chinese))
- 20 Cundall P, Strack O. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 1979, 29(1): 47-65
- 21 汪泾周, 马刚, 赵婷婷等. 基于精确缩尺和粗粒化的颗粒材料 FDEM 模拟方法. 岩土工程学报, 2024, 46(11): 2371-2379 (Wang Jingzhou, Ma Gang, Zhao Tingting, et al. FDEM simulation for granular materials based on exact scaling and coarse granulation. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2024, 46(11): 2371-2379 (in Chinese))
- 22 仇巍, 陈金龙, 李林安等. 中国实验力学的开拓者——贾有权先生. 力学进展, 2023, 53(4): 866-879 (Qiu Wei, Chen Jinlong, Li Linan, et al. Professor Jia Youquan, the pioneer of experimental mechanics in China. *Advances in Mechanics*, 2023, 53(4): 866-879 (in Chinese))
- 23 Wakabayashi T. Photo-elastic method for determination of stress in powdered mass. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1950, 5(5): 383-385
- 24 Howell D, Behringer R, Veje C. Stress fluctuations in a 2D granular couette experiment: A continuous transition. *Physical Review Letters*, 1999, 82(26): 5241-5244
- 25 Majmudar T, Behringer R. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 2005, 435(7045): 1079-1082
- 26 Daniels K, Kollmer J, Puckett J. Photoelastic force measurements in granular materials. *Review of Scientific Instruments*, 2017, 88(5): 051808
- 27 Bi D, Zhang J, Chakraborty B, et al. Jamming by shear. *Nature*, 2011, 480: 355-358
- 28 Zheng J, Sun A, Wang Y, et al. Energy fluctuations in slowly sheared granular materials. *Physical Review Letters*, 2018, 121(24): 248001
- 29 Shang J, Wang Y, Pan D, et al. The yielding of granular matter is marginally stable and critical. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2024, 121(33): e2402843121
- 30 Tordesillas A, Lin Q, Zhang J, et al. Structural stability and jamming of self-organized cluster conformations in dense granular materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, 59(2): 265-296
- 31 Mei J, Ma G, Liu J, et al. Modeling shear-induced solid-liquid transition of granular materials using persistent homology. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2023, 176: 105307
- 32 Cao W, Mei J, Yang X, et al. A network-based investigation on static liquefaction of sheared granular materials. *Granular Matter*, 2024, 26(3)
- 33 Nicot F, Lin M, Wautier A, et al. Configurational mechanics in granular media. *Granular Matter*, 2024, 26(3)
- 34 Liu J, Nicot F, Zhou W. Sustainability of internal structures during shear band forming in 2D granular materials. *Powder Technology*, 2018, 338: 458-470
- 35 刘嘉英, 周伟, 姬翔等. 基于细观拓扑结构演化的颗粒材料剪胀性分析. 力学学报, 2022, 54(3): 707-718 (Liu Jiaying, Zhou Wei, Ji Xiang, et al. Dilatancy analysis of granular materials based on mesoscopic topological evolutions. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(3): 707-718 (in Chinese))
- 36 Nguyen N, Magoaric H, Cambou B. Local stress analysis in granular materials at a mesoscale. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, 36(14): 1609-1635
- 37 Nguyen N, Magoaric H, Cambou B. Analysis of local behaviour in granular materials. *Comptes Rendus Mécanique*, 2014, 342(3): 156-173

- 38 Zhang X, Wang W, Zhang T, et al. Contributions of strong and weak subnetworks to the shear strength of dense granular inertial flow. *Tribology International*, 2023, 177: 108022
- 39 Radjai F, Wolf D, Jean M, et al. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Physical Review Letters*, 1998, 80(1): 61-64
- 40 Liu J, Zhou W, Ma G, et al. Strong contacts, connectivity and fabric anisotropy in granular materials: A 3D perspective. *Powder Technology*, 2020, 366: 747-760
- 41 Liu J, Wu X, Jiang J, et al. A network-based investigation on the strong contact system of granular materials under isotropic and deviatoric stress states. *Computers and Geotechnics*, 2023, 153: 105077
- 42 刘嘉英, 许智超, 魏纲等. 加卸载状态下散粒体力链结构的复杂网络分析. *岩土力学*, 2023, 44(9): 2767-2778 (Liu Jiaying, Xu Zhichao, Wei Gang, et al. Complex network analysis of force chain structure for granular materials under loading and unloading conditions. *Rock and Soil Mechanics*, 2023, 44(9): 2767-2778 (In Chinese))
- 43 Peters J, Muthuswamy M, Wibowo J, et al. Characterization of force chains in granular material. *Physical Review E*, 2005, 72(4): 041307
- 44 Long E, Chen Q, Liu J. Evolution law and transformation mechanism of force chains in the flow of photoelastic particles under a flexible barrier. *Powder Technology*, 2023, 430: 118994
- 45 Cil M, Alshibli K. 3D analysis of kinematic behavior of granular materials in triaxial testing using DEM with flexible membrane boundary. *Acta Geotechnica*, 2014, 9: 287-298
- 46 Negi M, Mukherjee M. Effect of confining stress and lateral boundary conditions on the drained instability response of sand: A DEM based assessment across the length scales. *Granular Matter*, 2025, 27: 37
- 47 Majmudar T. Experimental studies of two-dimensional granular systems using grain-scale contact force measurements. [PhD Thesis]. Durham: Duke University, 2006
- 48 Voivret C, Radjaï F, Delenne J, et al. Multiscale force networks in highly polydisperse granular media. *Physical Review Letters*, 2009, 102(17): 178001
- 49 Jin Z, Liu J, Ma G, et al. How does the largest cluster in the strong network rule granular soil mechanics? A DEM study. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2024, 49(3): 839-859
- 50 王肖肖. 砂土临界状态与应力-剪胀的微细观机理及能量耗散分析. [博士论文]. 北京: 北京科技大学, 2024 (Wang Xiaoxiao. Microscopic mechanism and energy dissipation analysis of critical state and stress-dilatancy characteristics for sand. [PhD Thesis]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2024 (in Chinese))