

半车系统振动控制中的非线性能量汇设计与应用

王 义, 李旭龙, 魏 莎, 王 俊, 丁 虎, 陈立群

DESIGN AND APPLICATION OF NONLINEAR ENERGY SINK IN VIBRATION CONTROL OF A HALF-VEHICLE SYSTEM

Wang Yi, Li Xulong, Wei Sha, Wang Jun, Ding Hu, and Chen Liqun

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-24-537>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非线性能量汇胞元减振效率分析

ANALYSIS OF DAMPING EFFICIENCY OF NONLINEAR ENERGY SINK CELL

力学学报. 2023, 55(11): 2614-2623

动力吸振器复合非线性能量阱对线性镗杆系统的振动控制

VIBRATION CONTROL OF LINEAR BORING BAR BY DYNAMIC VIBRATION ABSORBER COMBINED WITH NONLINEAR ENERGY SINK

力学学报. 2021, 53(11): 3124-3133

简谐激励下黏弹性非线性能量阱的研究

RESEARCH ON A VISCOELASTIC NONLINEAR ENERGY SINK UNDER HARMONIC EXCITATION

力学学报. 2022, 54(9): 2567-2576

重构谐波平衡法及其求解复杂非线性问题应用

RECONSTRUCTION HARMONIC BALANCE METHOD AND ITS APPLICATION IN SOLVING COMPLEX NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

力学学报. 2024, 56(1): 212-224

具有组合非线性阻尼的非线性能量阱振动抑制响应分析

ANALYSIS ON VIBRATION SUPPRESSION RESPONSE OF NONLINEAR ENERGY SINK WITH COMBINED NONLINEAR DAMPING

力学学报. 2023, 55(4): 972-981

非线性振动能量俘获技术的若干进展

SOME ADVANCES IN NONLINEAR VIBRATION ENERGY HARVESTING TECHNOLOGY

力学学报. 2021, 53(11): 2894-2909



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

半车系统振动控制中的非线性能量汇设计与应用¹⁾

王 义* 李旭龙* 魏 莎*,†,**,2) 王 俊* 丁 虎*,†,** 陈立群*,†,**

* (上海大学力学与工程科学学院, 上海 200444)

† (上海市力学信息学前沿科学研究基地, 上海 200072)

** (上海飞行器力学与控制研究院, 上海 200092)

摘要 为提高乘车的舒适性, 提出一种针对半车系统的新型悬架系统控制方案. 该方案的核心是分布式布置非线性能量汇, 即将多个非线性能量汇分别安装于前车身、后车身和前后车轮. 基于牛顿第二定律建立了耦合非线性能量汇的半车系统的动力学方程. 利用谐波平衡法求解系统的近似解析解, 并使用四阶龙格库塔法验证了近似解析解的准确性. 随后, 为说明所提方案的有效性, 比较了原半车系统以及仅在车身前、后安装非线性能量汇和应用所提控制方案时系统的幅频响应. 进一步, 分析了所提控制方案中非线性能量汇质量、非线性弹簧刚度和阻尼对减振效果的影响. 结果表明, 在不改变附加非线性能量汇质量的条件下, 所提方案通过分布式布置非线性能量汇实现了车身和车轮的振动控制, 提升了乘车的舒适性和安全性. 对于车轮, 增大非线性能量汇质量有利于提高减振效率, 而非线性刚度和阻尼的增大可能存在减振效率的恶化; 对于车身, 增大非线性能量汇质量或减小阻尼同样有利于提高减振效果, 而非线性刚度的增大可能存在减振效率的恶化. 所提方案为车辆悬架设计提供了有用的指导, 同时也为非线性能量汇的工程应用提供了理论基础.

关键词 半车系统, 非线性能量汇, 车辆悬架, 谐波平衡法, 振动控制

中图分类号: O324, U46

文献标识码: A

DOI: 10.6052/0459-1879-24-537

CSTR: 32045.14.0459-1879-24-537

DESIGN AND APPLICATION OF NONLINEAR ENERGY SINK IN VIBRATION CONTROL OF A HALF-VEHICLE SYSTEM¹⁾

Wang Yi* Li Xulong* Wei Sha*,†,**,2) Wang Jun* Ding Hu*,†,** Chen Liqun*,†,**

* (School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

† (Shanghai Frontier Science Center of Mechanoinformatics, Shanghai 200072, China)

** (Shanghai Institute of Aircraft Mechanics and Control, Shanghai 200092, China)

Abstract To enhance ride comfort, this study proposes a novel suspension control scheme for a half-vehicle system. The core innovation of this scheme lies in the distributed arrangement of nonlinear energy sinks (NESs), which involves strategically installing multiple NESs at the front body, rear body, and front and rear wheels. The dynamic equations of the half-vehicle system, coupled with NESs, are derived based on the Newton's second law. The approximate analytical solution of the system is obtained using the harmonic balance method, and the accuracy is rigorously verified through numerical simulations employing the fourth-order Runge-Kutta method. To thoroughly evaluate the effectiveness of the

2024-11-25 收稿, 2025-01-15 录用, 2025-01-17 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目(12272211 和 12072181).

2) 通讯作者: 魏莎, 副教授, 主要研究方向为非线性振动. E-mail: weisha1219@126.com

引用格式: 王义, 李旭龙, 魏莎, 王俊, 丁虎, 陈立群. 半车系统振动控制中的非线性能量汇设计与应用. 力学学报, 2025, 57(3): 720-729

Wang Yi, Li Xulong, Wei Sha, Wang Jun, Ding Hu, Chen Liqun. Design and application of nonlinear energy sink in vibration control of a half-vehicle system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(3): 720-729

proposed scheme, the amplitude-frequency responses of three configurations are carefully analyzed: the original half-vehicle system, the system with NESs installed only at the front and rear of the vehicle body, and the system utilizing the proposed distributed control scheme. The results clearly demonstrate that the proposed approach significantly enhances vibration control performance compared to the other configurations. Additionally, the study systematically investigates the influence of key parameters, including NES mass, nonlinear spring stiffness, and damping, on the system's vibration reduction performance. The findings indicate that the distributed arrangement of NESs effectively controls vibrations of both the vehicle body and wheels without increasing the total mass of the NES. This configuration significantly improves ride comfort and safety. For wheel vibrations, increasing the NES mass enhances vibration reduction efficiency, whereas excessive increases in nonlinear stiffness or damping may lead to performance deterioration. For body vibrations, increasing the NES mass or reducing damping similarly improves vibration control, but excessive nonlinear stiffness may result in reduced performance. The proposed scheme not only offers an effective solution for vibration control but also provides valuable guidance for the design and optimization of vehicle suspension systems. Furthermore, it offers a solid theoretical foundation for the engineering applications of NES.

Key words half-vehicle system, nonlinear energy sink, vehicle suspension, harmonic balance method, vibration control

引言

近年来, 汽车行业发展迅速, 人们的生活水平有了很大提升. 汽车成为人们非常普遍的出行方式, 乘坐的舒适性和驾驶的安全性成为关键因素. 然而, 行驶过程中的振动问题是存在的, 这降低了乘坐的舒适性和驾驶的安全性^[1]. 研究表明, 车身和轮胎的振动都会影响车辆的乘坐舒适性、噪音、粗糙度甚至安全性^[2]. 按照车辆振动传递路径, 其减振设计主要是通过调节以下部件, 即轮胎^[3]、悬架^[4]和座椅^[5]. 通过调节车辆悬架进行减振是较为普遍的方式.

悬架系统通常包括 3 个主要的机械部件, 分别是连接车轮和车身的悬臂架, 将运动转化为势能的弹簧和旨在耗散动能的减振器^[6]. 根据车辆悬架控制方式的不同, 其可分为主动悬架^[7-8]、半主动悬架^[9-10]和被动悬架^[11-12]. 被动悬架因其结构简单、成本低和可靠性高等优点, 广泛应用于车辆悬架中, 许多学者对于被动悬架做了研究工作. 桑志国等^[13]提出了一种双气室油气悬挂系统, 与传统的悬架相比效果更好. 动态减振器在被动悬架中应用广泛. Brötz 等^[14]将一种流体动力减振器应用于车辆悬架中, 能够提高乘坐舒适性并减少车轮负载波动. Xu 等^[15]提出一种基于两端质量的可变转动惯量被动车辆悬架减振器, 提高了乘坐舒适性并减少了悬架偏转. 上述研究为悬架系统减振器的设计提供了有用指导. 然而线性减振器减振频带较窄, 仅能在主系统固有频率附近减振. 因此, 基于非线性减振器设计的被动悬架

受到了越来越多的关注.

非线性能量汇^[16-18](nonlinear energy sink, NES) 是一种被动非线性减振器. NES 由惯性元件、非线性立方刚度元件和阻尼元件组成, 可实现主系统能量的靶向传递^[19]. NES 可在很宽的频率范围内耗散能量, 并基本不改变主系统的固有频率^[20]. 近年来 NES 被广泛应用于航空航天^[21]、土木工程^[22]和机械工程^[23-24]中. Zhang 等^[25]将 NES 用于整艘航天器的减振设计, 研究发现 NES 在高频范围内随着非线性能量汇黏性阻尼的增加而表现良好. Chen 等^[26]提出了一种集成了负刚度的新型 NES, 其能够在系统受到地震激励时保护主要结构. Tehrani 等^[27]将 NES 和 TMD 应用于转子系统的减振设计, 并讨论了单、双吸振器在不同间隙下的减振性能. Zeng 等^[28]提出了一种结合了准零刚度隔振器、非线性能量吸收器和惯容器的悬架系统振动控制方案. 该方案可以获得更好的乘坐舒适性和操控稳定性. Wang 等^[29]将惰性非线性能量汇应用于半车系统, 研究其在垂直和俯仰方向上的动态性能. Wang 等^[30]将 NES 应用于 1/4 悬架系统中, 通过研究系统与 NES 间的能量传递解释了 NES 在悬架系统中的减振机理.

用于模拟的车辆模型主要分为 3 类, 即 1/4 车辆模型^[31]、半车模型^[32]和整车模型^[33]. 1/4 车辆模型仅包含两自由度, 忽略了车辆前后部件间的联系, 使得分析结果可能与实际差别较大; 而整车模型建模复杂, 分析较为困难. 因此本文选择具有 4 自由度的半车模型进行分析. 相对于 1/4 车辆模型, 半车模

型可以更全面地反映车辆的动态响应,并考虑了前后轮之间的相互作用。

目前多数研究重点关注车身的振动,而忽略了轮胎的振动.然而轮胎的振动同样会对车辆的乘坐舒适性、噪音、粗糙度甚至安全性产生负面影响^[2].本文的新颖之处在于提出了一种用于半车系统的新型被动悬架控制方案,以提升乘车的舒适性和安全性.采用牛顿第二定律建立了耦合 NES 的半车系统的动力学方程,使用谐波平衡法对所得方程进行求解.通过龙格库塔法验证上述结果的正确性.分析了 NES 质量、非线性刚度和阻尼对减振效率的影响,所得结论可为车辆悬架系统的设计与参数选择提供参考.

1 半车系统模型

图 1 给出了耦合 4 个 NES 的半车系统示意图.考虑前轮位移 z_1 、后轮位移 z_2 、车身位移 z_3 和车身俯仰角 θ 四个自由度.本文分析了多种 NES 的布置方式,包括将 4 个 NES 分别安装于前、后车身和前、后车轮 (方案 1),仅在前、后车身各安装一个 NES (方案 2) 和不安装 NES (方案 3).其中,方案 1 为所提控制方案,方案 2 为一般 NES 控制方案,方案 3 即为原半车系统.这里分别给出方案 1 和方案 2 的车辆动力学方程.

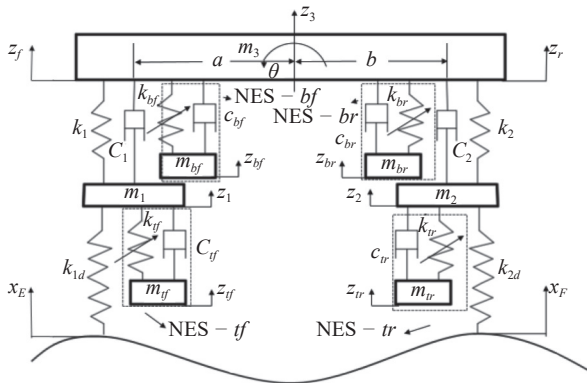


图 1 半车系统模型

Fig. 1 The half-vehicle system

1.1 方案 1 动力学方程

根据牛顿第二定律,可得车身的动力学方程为

$$m_3\ddot{z}_3 + k_1(z_f - z_1) + c_1(\dot{z}_f - \dot{z}_1) + k_2(z_r - z_2) + c_2(\dot{z}_r - \dot{z}_2) + k_{bf}(z_f - z_{bf})^3 + c_{bf}(\dot{z}_f - \dot{z}_{bf}) + k_{br}(z_r - z_{br})^3 + c_{br}(\dot{z}_r - \dot{z}_{br}) = 0 \quad (1)$$

$$I\ddot{\theta} - a[k_1(z_f - z_1) + c_1(\dot{z}_f - \dot{z}_1) + k_{bf}(z_f - z_{bf})^3 + c_{bf}(\dot{z}_f - \dot{z}_{bf})] + b[k_2(z_r - z_2) + c_2(\dot{z}_r - \dot{z}_2) + k_{br}(z_r - z_{br})^3 + c_{br}(\dot{z}_r - \dot{z}_{br})] = 0 \quad (2)$$

前轮的动力学方程为

$$m_1\ddot{z}_1 + k_{1d}(z_1 - x_E) + k_1(z_1 - z_f) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_f) + k_{tf}(z_1 - z_{tf})^3 + c_{tf}(\dot{z}_1 - \dot{z}_{tf}) = 0 \quad (3)$$

后轮的动力学方程为

$$m_2\ddot{z}_2 + k_{2d}(z_2 - x_F) + k_2(z_2 - z_r) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_r) + k_{tr}(z_2 - z_{tr})^3 + c_{tr}(\dot{z}_2 - \dot{z}_{tr}) = 0 \quad (4)$$

4 个 NES 的动力学方程为

$$m_{tf}\ddot{z}_{tf} + k_{tf}(z_{tf} - z_1)^3 + c_{tf}(\dot{z}_{tf} - \dot{z}_1) = 0 \quad (5)$$

$$m_{tr}\ddot{z}_{tr} + k_{tr}(z_{tr} - z_2)^3 + c_{tr}(\dot{z}_{tr} - \dot{z}_2) = 0 \quad (6)$$

$$m_{bf}\ddot{z}_{bf} + k_{bf}(z_{bf} - z_f)^3 + c_{bf}(\dot{z}_{bf} - \dot{z}_f) = 0 \quad (7)$$

$$m_{br}\ddot{z}_{br} + k_{br}(z_{br} - z_r)^3 + c_{br}(\dot{z}_{br} - \dot{z}_r) = 0 \quad (8)$$

其中, m_3 为车身质量, m_1 和 m_2 分别为前轮和后轮质量. I 为车身俯仰转动惯量, a 和 b 分别为前后轴距. k_1 , k_2 , c_1 和 c_2 分别为前后悬架刚度和阻尼. k_{1d} 和 k_{2d} 分别为简化的前后轮与地面间的连接刚度. m_{bf} 和 m_{br} 分别为安装在车身后 NES 的质量, k_{bf} 和 k_{br} 分别为安装在车身后 NES 的非线性刚度, c_{bf} 和 c_{br} 分别为安装在车身后 NES 的阻尼. m_{tf} 和 m_{tr} 分别为安装在前后轮 NES 的质量, k_{tf} 和 k_{tr} 分别为安装在前后轮 NES 的非线性刚度, c_{tf} 和 c_{tr} 分别为安装在前后轮 NES 的阻尼. z_{bf} 和 z_{br} 分别表示安装在车身后 NES 的位移. z_{tf} 和 z_{tr} 分别表示安装在前后轮 NES 的位移. $x_E = A_1\cos(\omega_1 t)$ 和 $x_F = A_1\cos(\omega_1 t)$ 分别为前轮和后轮受到的位移激励. z_f 和 z_r 分别是车身前部和车身后部的位移, 表示为

$$z_f = z_3 - a\sin\theta \quad (9)$$

$$z_r = z_3 + b\sin\theta \quad (10)$$

1.2 方案 2 动力学方程

由 1.1 节类似的过程,可得到方案 2 中车身的动力学方程为

$$m_3\ddot{z}_3 + k_1(z_f - z_1) + c_1(\dot{z}_f - \dot{z}_1) + k_2(z_r - z_2) + c_2(\dot{z}_r - \dot{z}_2) + k_{bf}(z_f - z_{bf})^3 + c_{bf}(\dot{z}_f - \dot{z}_{bf}) + k_{br}(z_r - z_{br})^3 + c_{br}(\dot{z}_r - \dot{z}_{br}) = 0 \quad (11)$$

$$I\ddot{\theta} - a[k_1(z_f - z_1) + c_1(\dot{z}_f - \dot{z}_1) + k_{bf}(z_f - z_{bf})^3 + c_{bf}(\dot{z}_f - \dot{z}_{bf})] + b[k_2(z_r - z_2) + c_2(\dot{z}_r - \dot{z}_2) + k_{br}(z_r - z_{br})^3 + c_{br}(\dot{z}_r - \dot{z}_{br})] = 0 \quad (12)$$

前轮的动力学方程为

$$m_1\ddot{z}_1 + k_{1d}(z_1 - x_E) + k_1(z_1 - z_f) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_f) = 0 \quad (13)$$

后轮的动力学方程为

$$m_2\ddot{z}_2 + k_{2d}(z_2 - x_F) + k_2(z_2 - z_r) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_r) = 0 \quad (14)$$

位于前和后车身的两个 NES 的动力学方程为

$$m_{bf}\ddot{z}_{bf} + k_{bf}(z_{bf} - z_f)^3 + c_{bf}(\dot{z}_{bf} - \dot{z}_f) = 0 \quad (15)$$

$$m_{br}\ddot{z}_{br} + k_{br}(z_{br} - z_r)^3 + c_{br}(\dot{z}_{br} - \dot{z}_r) = 0 \quad (16)$$

相较于方案 1, 2 未在前和后车轮安装 NES. 为便于进行比较, 设置方案 1 和 2 中附加的 NES 总质量相同. 两个方案中安装于车身的 NES 非线性刚度和阻尼也分别取值相同.

2 近似解析分析与数值验证

采用谐波平衡法求解系统动力学方程. 假设方程的解为^[34]

$$z_p(t) = a_{p,0} + \sum_{i=1}^n a_{p,i} \cos(i\omega t) + \sum_{i=1}^n b_{p,i} \sin(i\omega t) \quad (17)$$

其中, $a_{p,i}$ 和 $b_{p,i}$ 是谐波系数; p 描述自由度, 取值范围为 1, 2, $\dots$, 8; i 描述谐波阶数, 取值范围为 1, 2, $\dots$, n ; n 是谐波平衡法的阶数. 为便于表达, 车身俯仰角 θ 及位于前轮、后轮、前车身和后车身的 NES 位移分别用 $z_4, z_5, \dots, z_8$ 表示. 由式 (17) 可得, 相应的速度和加速度方程为

$$\frac{dz_p}{dt} = \sum_{i=1}^n i\omega b_{p,i} \cos(i\omega t) - \sum_{i=1}^n i\omega a_{p,i} \sin(i\omega t) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 z_p}{dt^2} = - \sum_{i=1}^n (i\omega)^2 a_{p,i} \cos(i\omega t) - \sum_{i=1}^n (i\omega)^2 b_{p,i} \sin(i\omega t) \quad (19)$$

将式 (17)~式 (19) 代入式 (1)~式 (10) 中, 平衡常数项、 $\cos(i\omega t)$ 和 $\sin(i\omega t)$ 的系数. 可以得到如下方程组

$$\begin{aligned} & F_{zj,0}(\mathbf{A}, \omega) + F_{zj,c1}(\mathbf{A}, \omega) \cos(\omega t) + \\ & F_{zj,s1}(\mathbf{A}, \omega) \sin(\omega t) + F_{zj,c2}(\mathbf{A}, \omega) \cos(2\omega t) + \\ & F_{zj,s2}(\mathbf{A}, \omega) \sin(2\omega t) + \dots + F_{zj,cn}(\mathbf{A}, \omega) \cos(n\omega t) + \\ & F_{zj,sn}(\mathbf{A}, \omega) \sin(n\omega t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\mathbf{A} = [a_{p,0}, a_{p,1}, b_{p,1}, \dots, a_{p,n}, b_{p,n}]$; $F(\cdot)$ 表示各谐波分量的系数; 下标 cn 和 sn 分别表示偶谐波和奇谐波阶数.

取所有一次谐波系数为 0, 可以得到 $(16n + 8)$ 个非线性方程

$$\begin{aligned} & F_{zj,0}(\mathbf{A}, \omega) = 0, F_{zj,c1}(\mathbf{A}, \omega) = 0, F_{zj,s1}(\mathbf{A}, \omega) = 0, \\ & \dots, F_{zj,cn}(\mathbf{A}, \omega) = 0, F_{zj,sn}(\mathbf{A}, \omega) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}, \omega) = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\mathbf{F} = [F_{z1,0}, F_{z1,c1}, F_{z1,s1}, \dots, F_{z1,cn}, F_{z1,sn}, \dots, F_{z8,0}, F_{z8,c1}, F_{z8,s1}, \dots, F_{z8,cn}, F_{z8,sn}]^T \quad (23)$$

方程组 (22) 可写为

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (24)$$

其中, $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{16n+9}\}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}, \omega)$.

方程 (24) 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{DF}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_{16n+9}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{16n+8}}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial F_{16n+8}}{\partial Q_{16n+9}} \end{pmatrix}_{(16n+8) \times (16n+9)} \quad (25)$$

$(16n + 9)$ 维向量构造如下

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{Q}) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{16n+9}]^T \quad (26)$$

$$\psi_i = (-1)^{i+1} \det \left[\frac{\partial F}{\partial Q_1} \dots \frac{\partial F}{\partial Q_{i-1}} \frac{\partial F}{\partial Q_{i+1}} \dots \frac{\partial F}{\partial Q_{16n+9}} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, 16n + 9) \quad (27)$$

由于雅可比矩阵的每一行与其对应的代数余子式向量的点积恒为 0, 可以得到

$$\left\{ \frac{\partial F_i}{\partial Q_1} \frac{\partial F_i}{\partial Q_2} \dots \frac{\partial F_i}{\partial Q_{16n+9}} \right\} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 16n + 8) \quad (28)$$

其中, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{Q})$ 是解曲线的切向量, 其单位切向量表示

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{Q}) = \frac{\boldsymbol{\psi}}{\|\boldsymbol{\psi}\|} \quad (29)$$

其中, $\|\psi\|$ 表示向量 ψ 的模.

为了避免用改进的欧拉法计算系统幅频响应时出现拐点, 在局部伪弧长法的基础上引入了弧长 s . 该非线性系统包含 $(16n + 8)$ 个方程, 需要添加一个约束方程使 $(16n + 9)$ 个未知量可解. 补充方程为

$$\tau \cdot \Delta Q - \Delta s = 0 \tag{30}$$

其中, 符号 Δ 表示变量的微小变化. 然后, 求解方程式 (24) 的问题变换为求解以下方程

$$\left. \begin{aligned} F(Q) &= 0 \\ \tau \cdot \Delta Q - \Delta s &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

方程 (31) 被转换为柯西问题

$$\frac{dQ}{ds} = \tau(Q_0), \quad Q(0) = Q_0 \tag{32}$$

方程 (32) 可以用改进的欧拉法来求解. 可以得到预测解. 通过控制解的精度, 用牛顿迭代法校正预测解.

$$\left. \begin{aligned} Q_v^0 &= Q_v \\ Q_v^l &= Q_v^{l-1} - \left[\frac{DF(Q)}{\psi(Q_k)} \right] \left[\begin{aligned} F(Q_v^{l-1}) \\ 0 \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

通过上述伪弧长延伸过程, 可以求出代数方程的解.

定义 NES 减振效率表达式如下

$$\eta = \frac{A_N - A_{NES}}{A_N} \times 100\% \tag{34}$$

其中, A_N 和 A_{NES} 分别为原半车系统的幅值与耦合 NES 系统的幅值.

选取半车系统的结构参数如表 1 所示. 表 2 列出了方案 1 中各 NES 的参数值. 采用 4 阶龙格库塔法求解方程式 (1) ~ 式 (10), 可以得到所提控制方案 (方案 1) 所对应的系统在路面位移激励下的数值解. 谐波阶数 $n = 3$. 假设系统受到的道路激励幅值 A_1 和 A_2 均为 0.03 m. 图 2(a) ~ 图 2(c) 分别展示了前、后轮和车身的幅频响应曲线. 图中实线和圆标点分别为通过谐波平衡法和 4 阶龙格库塔法得到的结果. 从图 2 中结果可以看出, 谐波平衡法的结果和 4 阶龙格库塔法的结果吻合较好, 说明了谐波平衡法结果的准确性.

讨论不同 NES 安装方案下的减振性能. 为便于比较, 设置方案 2 中附加的 NES 总质量与方案 1 相同. 表 3 列出了方案 2 中各 NES 的参数值. 以下算例均是基于表 1 的半车系统参数. 图 3(a) ~ 图 3(c)

表 1 半车系统结构参数

Table 1 Structural parameters of the half-vehicle system		
Parameter	Notation	Value
vehicle body mass	m_3/kg	690
front wheel mass	m_1/kg	40
rear wheel mass	m_2/kg	45
pitch moment of inertia	$I/(\text{kg} \cdot \text{m})$	1222
front axle distance	a/m	1.3
rear axle distance	b/m	1.5
front suspension stiffness	$k_1/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2.0×10^4
rear suspension stiffness	$k_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2.2×10^4
front suspension damping	$c_1/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1000
rear suspension damping	$c_2/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1000
front wheel stiffness	$k_{1d}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2.0×10^5
rear wheel stiffness	$k_{2d}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	2.0×10^5

表 2 NES 结构参数 (方案 1)

Table 2 Structural parameters of the NES (scheme 1)		
Parameter	Notation	Value
mass of the front wheel NES	m_{ff}/kg	20
mass of the rear wheel NES	m_{fr}/kg	20
mass of the front vehicle body NES	m_{bf}/kg	50
mass of the rear vehicle body NES	m_{br}/kg	50
stiffness of the front wheel NES	$k_{ff}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	2.1×10^6
stiffness of the rear wheel NES	$k_{fr}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	2.1×10^6
stiffness of the front vehicle body NES	$k_{bf}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	1.3×10^5
stiffness of the rear vehicle body NES	$k_{br}/(\text{N} \cdot \text{m}^{-3})$	1.3×10^5
damping of the front wheel NES	$c_{ff}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1000
damping of the rear wheel NES	$c_{fr}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	1000
damping of the front vehicle body NES	$c_{bf}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	300
damping of the rear vehicle body NES	$c_{br}/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	300

分别给出了方案 1 (4 个 NES 分别安装在前后车身和前后车轮)、方案 2 (仅在车身后各安装 1 个 NES) 和方案 3 (不安装 NES) 的幅频响应结果. 从图中方案 3 的结果 (蓝色实线) 可以发现, 前、后车轮在第二阶共振峰处具有较大的幅值, 而车身在第一阶共振峰处具有较大的幅值. 因此, 本文重点关注车轮的第二阶共振峰和车身的第二阶共振峰的减振. 如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 应用方案 2 (黑色虚线) 并不

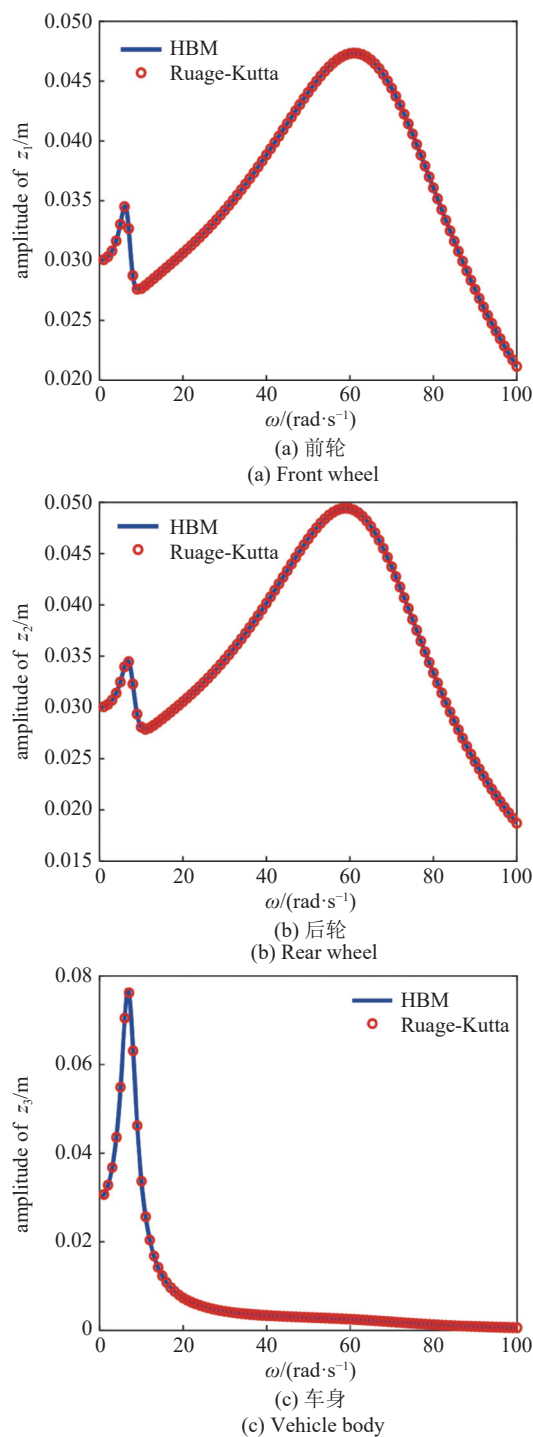


图 2 路面简谐激励下谐波平衡法与龙格库塔法结果对比

Fig. 2 Comparison of results between the harmonic balance method and the Runge-Kutta method under harmonic road excitation

能显著降低前轮和后轮的共振幅值. 而方案 1 (红色虚线) 在不增加附加 NES 质量的条件下, 通过在车身和车轮上分布式安装 NES 使得前轮和后轮的第二阶共振幅值分别降低了 31.73% 和 31.64%. 图 3(c) 结果进一步表明, 方案 1 会略微降低车身的减振效率, 但仍可有效降低车身的振动幅值. 通过方案 1 实

表 3 NES 结构参数 (方案 2)

Table 3 Structural parameters of the NES (scheme 2)		
Parameter	Notation	Value
mass of the front vehicle body NES	m_{bf}/kg	70
mass of the rear vehicle body NES	m_{br}/kg	70
stiffness of the front vehicle body NES	$k_{bf}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-3})$	1.3×10^5
stiffness of the rear vehicle body NES	$k_{br}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-3})$	1.3×10^5
damping of the front vehicle body NES	$c_{bf}/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	300
damping of the rear vehicle body NES	$c_{br}/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	300

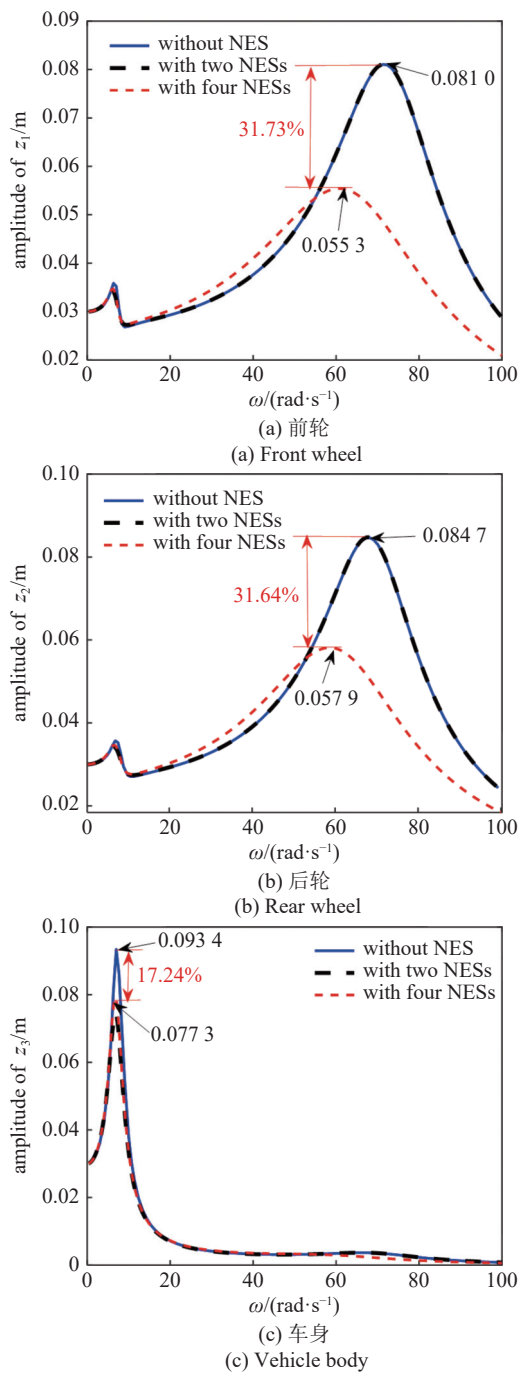


图 3 方案 1, 2 和 3 得到的幅频响应曲线

Fig. 3 Amplitude-frequency response curves obtained from schemes 1, 2, and 3

现了同时控制车身与车轮的振动。

3 参数分析

本节将方案 1 应用于半车系统减振. 同样关注车轮的第二阶共振峰和车身的第二阶共振峰. 首先分析附加于车轮的 NES 质量对减振效率的影响. 除附加于车轮的 NES 质量外, 其余参数如表 2 所示. 图 4(a) 和图 4(b) 分别为不同车轮 NES 质量下, 前轮和后轮的幅频响应曲线. 从图 4 中结果可以看出, 随着 m_{jf} 的增大, 前轮的第二阶共振峰值减小. 与此同时, 随着 m_{jr} 的增大, 后轮的第二阶共振峰值也减小. 结果表明, 增大附加于车轮的 NES 质量有利于提高方案 1 的减振效率. 换句话说, 随着附加于车轮的 NES 质量的增大, 车辆的乘坐舒适性和安全性得到改善.

其次分析附加于车身的 NES 质量对减振效率的影响. 除附加于车身的 NES 质量外, 其余参数如

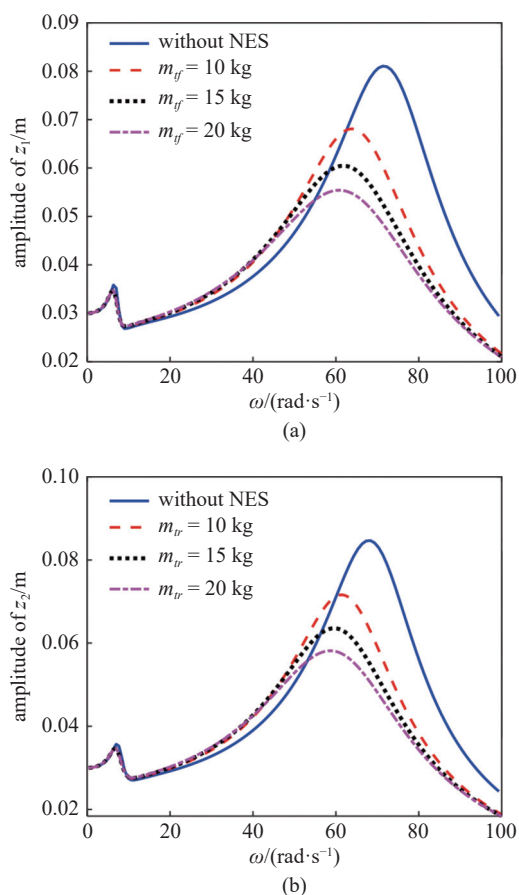


图 4 (a) 不同 m_{jf} 下前轮幅频响应曲线和 (b) 不同 m_{jr} 下后轮幅频响应曲线

Fig. 4 (a) Amplitude-frequency response curves of the front wheel under different m_{jf} conditions and (b) amplitude-frequency response curves of the rear wheel under different m_{jr} conditions

表 2 所示. 图 5 为不同车身 NES 质量下的车身幅频响应曲线. 从图 5 中结果可以看出, 随着 m_{bf} 和 m_{br} 的增大, 车身的第二阶共振峰逐渐减小. 结果表明, 增大附加于车身的 NES 质量有利于提高方案 1 的减振效率, 从而提高车辆的乘坐舒适性.

接下来分析附加于车轮的 NES 非线性刚度对减振效率的影响. 除附加于车轮的 NES 非线性刚度外, 其余参数如表 2 所示. 图 6(a) 和图 6(b) 分别为不同车轮 NES 刚度下, 前轮和后轮的幅频响应曲线. 从图 6 中结果可以看出, 随着 k_{jf} 的增大, 前轮的第二阶共振峰先减小, 后增大. 当 k_{jf} 增大到一定值时, 前轮的第二阶共振峰会出现向左偏移的现象, 同时减振效率也会显著降低. 随着 k_{jr} 的增大, 后轮表现出与前轮相同的现象. 因此, 当车轮 NES 的非线性刚度取一个合理的值时, 能够显著提高减振效率, 改善车辆的舒适性和安全性.

然后分析附加于车身的 NES 非线性刚度对减振效率的影响. 除附加于车身的 NES 非线性刚度外, 其余参数如表 2 所示. 图 7 为不同车身 NES 非线性刚度下的车身幅频响应曲线. 从图 7 中可以看出, 随着 k_{bf} 和 k_{br} 的增大, 车身的第二阶共振峰先减小, 后增大. 系统响应受 NES 非线性刚度影响较小. 结果表明, 优化设计附加于车身的 NES 非线性刚度, 对其减振性能的提升不明显.

分析附加于车轮的 NES 阻尼对减振效率的影响. 除附加于车轮的 NES 阻尼外, 其余参数如表 2 所示. 图 8(a) 和图 8(b) 分别为不同车轮 NES 阻尼下, 前轮和后轮幅频响应曲线. 从图 8 中结果可以看出, 随着 c_{jf} 增大, 前轮的第二阶共振峰先减小后增大.

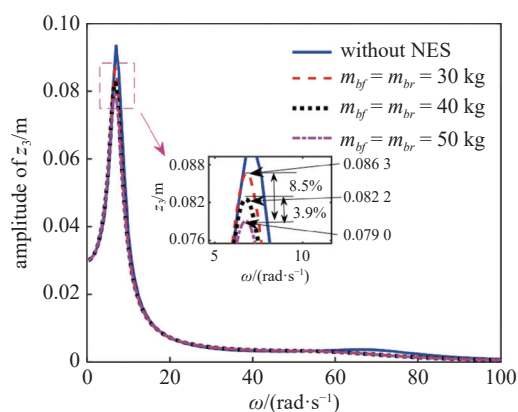


图 5 不同车身 NES 质量下车身幅频响应曲线

Fig. 5 Amplitude-frequency response curves of the vehicle body under different NESs masses

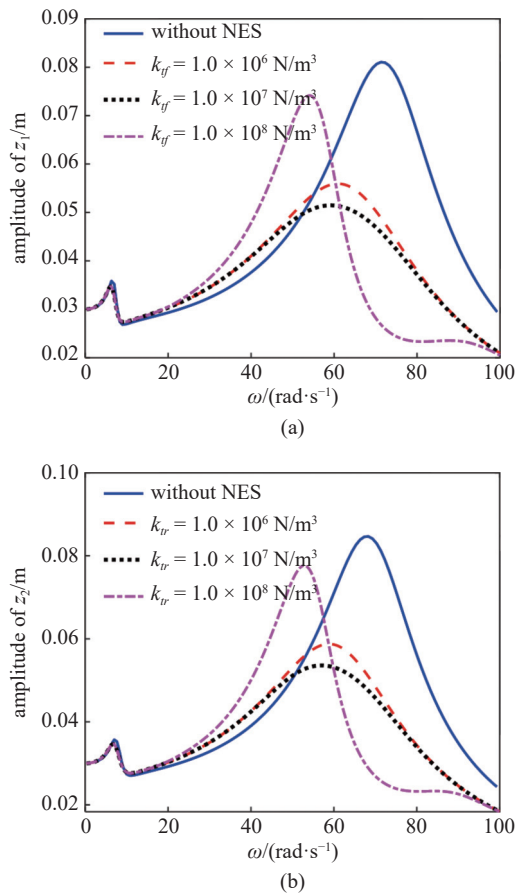


图 6 (a) 不同 k_{ff} 下的前轮幅频响应曲线和 (b) 不同 k_{rr} 下的后轮幅频响应曲线

Fig. 6 (a) Amplitude-frequency response curves of the front wheel under different k_{ff} conditions and (b) amplitude-frequency response curves of the rear wheel under different k_{rr} conditions

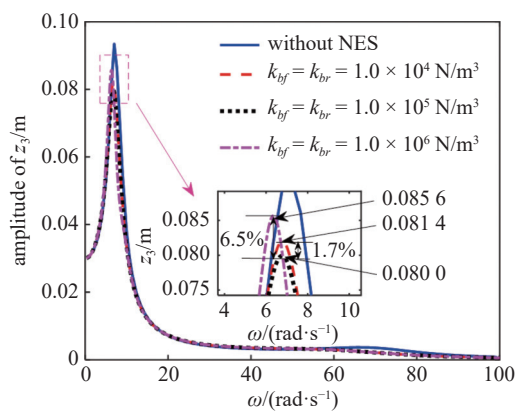


图 7 不同车身 NES 非线性刚度下车身幅频响应曲线

Fig. 7 Amplitude-frequency response curves of the vehicle body under different NESs nonlinear stiffnesses

随着 c_{rr} 增大, 后轮的二阶共振峰也先减小后增大. 结果表明, 附加于车轮的 NES 阻尼过高或过低都会降低减振效率.

最后分析附加于车身的 NES 阻尼对减振效率

的影响. 除附加于车身的 NES 阻尼外, 其余参数如表 2 所示. 图 9 为不同车身 NES 阻尼下的车身幅频响应曲线. 从图 9 中可以看出, 随着 c_{bf} 和 c_{br} 的增大, 车身的一阶共振峰逐渐增大. 说明较小的车身 NES 阻尼可以获得较好的减振效果.

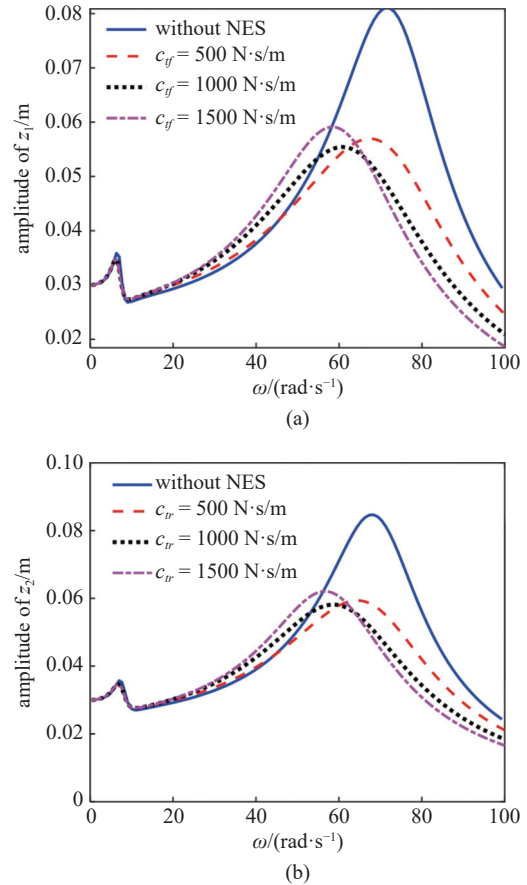


图 8 (a) 不同 c_{ff} 下的前轮幅频响应曲线和 (b) 不同 c_{rr} 下的后轮幅频响应曲线

Fig. 8 (a) Amplitude-frequency response curves of the front wheel under different c_{ff} conditions and (b) amplitude-frequency response curves of the rear wheel under different c_{rr} conditions

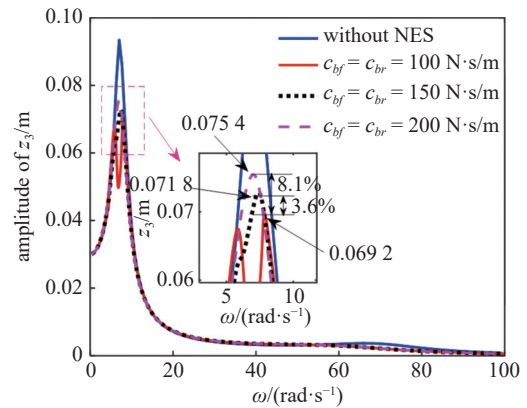


图 9 不同车身 NES 阻尼下的车身幅频响应曲线

Fig. 9 Amplitude-frequency response curves of the vehicle body under different NESs damping

4 结 论

本文将 NES 应用于车辆悬架设计, 通过将 NES 合理分布在车辆的不同位置, 以提高乘坐的舒适性和安全性. 利用牛顿第二定律建立了耦合 NES 的半车系统的动力学方程. 利用谐波平衡法求解系统在道路谐波激励下的位移幅值响应, 并通过 4 阶龙格库塔法进行数值验证, 证明了谐波平衡法结果的准确性. 分析了 NES 质量、非线性刚度和阻尼对方案 1 减振效率的影响. 所得结论如下.

(1) 提出了一种新的悬架系统控制方案. 该方案将多个 NES 分别安装在车身前部、车身后部、前轮和后轮上, 在不增加 NES 附加质量的条件下, 可以同时控制车身和车轮的振动, 提升了车辆舒适性和安全性.

(2) 耦合 NES 的半车系统是一个非线性系统. 利用谐波平衡法得到了该系统的近似解析解, 并且其结果与数值结果吻合良好, 验证了该方法在分析非线性振动系统方面的有效性.

(3) 参数分析结果表明, 对于车轮, 可通过增大 NES 质量来提高减振效率, 而对于非线性刚度和阻尼, 应避免过度调整, 防止减振效果变差; 对于车身, 增大 NES 质量或减小阻尼是提高减振效果的有效途径, 然而, 非线性刚度的增大可能会降低减振效率, 应避免过度调整.

参 考 文 献

- Yoo J, Lim S, Kim W, et al. Evaluation of vibrotactile sensation level for vehicle accelerator pedal vibration considering the sensitivity of the foot sole. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2023, 37(3): 1207-1221
- Yu X, Huang H, Zhang T. A theoretical three-dimensional ring based model for tire high-order bending vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 459: 114820
- Wang RR, Wang JM. Tire-road friction coefficient and tire cornering stiffness estimation based on longitudinal tire force difference generation. *Control Engineering Practice*, 2013, 21(1): 65-75
- 张文静, 牛江川, 申永军等. 基于分数阶磁流变液阻尼器模型的车辆悬架组合控制. *力学学报*, 2021, 53(7): 2037-2046 (Zhang Wenjing, Niu Jiangchuan, Shen Yongjun, et al. Combined control of vehicle suspension with fractional-order magnetorheological fluid damper model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(7): 2037-2046 (in Chinese))
- Shangguan WB, Shui YJ, Rakheja S. Kineto-dynamic design optimisation for vehicle-specific seat-suspension systems. *Vehicle System Dynamics*, 2017, 55(11): 1643-1664
- Atindana VA, Xu X, Nyedeb AN, et al. The evolution of vehicle pneumatic vibration isolation: A systematic review. *Shock and Vibration*, 2023, 1: 1716615
- Pang H, Luo JB, Wang MX, et al. A stability guaranteed nonfragile fault-tolerant control approach for Markov-type vehicle active suspension system subject to faults and disturbances. *Journal of Vibration and Control*, 2024, 30(5-6): 929-942
- 刘沿修, 石怀龙, 曾京等. 高速列车主动横向悬挂系统 Hopf 分岔特性. *力学学报*, 2024, 56(4): 1088-1097 (Liu Yanxiu, Shi Huaidong, Zeng Jing, et al. Hopf bifurcation characteristics of a high-speed train with active lateral suspension control. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(4): 1088-1097 (in Chinese))
- 曹洪勇, 付彬, 王旭等. 高速动车组一系垂向半主动悬挂研究. *力学学报*, 2024, 56(8): 2423-2435 (Cao Hongyong, Fu Bin, Wang Xu, et al. Study on semi-active primary vertical suspension of high-speed electric multiple unit. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(8): 2423-2435 (in Chinese))
- Liu YL, Shi DY, Yang XF, et al. The adverse effect and control of semi-active inertial suspension of hub motor driven vehicles. *International Journal of Automotive Technology*, 2024, 25(4): 777-788
- Yang M, Luo X, Zhang X, et al. Enhancing suspension vibration reduction by diagonal inerter. *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, 2022, 43(10): 1531-1542
- Smith MC, Wang FC. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle System Dynamics*, 2004, 42(4): 235-257
- 桑志国, 董明明, 赵凯等. 双气室油气悬挂特性研究. *北京理工大学学报*, 2018, 38(5): 499-504 (Sang Zhiguo, Dong Mingming, Zhao Kai, et al. Study on characteristics of the dual-chamber hydro-pneumatic suspension. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2018, 38(5): 499-504 (in Chinese))
- Brötz N, Rexer M, Puff N, et al. Fluid dynamic vibration absorber for vehicle suspension system. *Vehicle System Dynamics*, 2024, 62(5): 1122-1141
- Xu TY, Liang M, Li C, et al. Design and analysis of a shock absorber with variable moment of inertia for passive vehicle suspensions. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 355: 66-85
- 李猛, 李孙飏, 丁虎. 非线性能量汇胞元减振效率分析. *力学学报*, 2023, 55(11): 2614-2623 (Li Meng, Li Sunbiao, Ding Hu. Analysis of damping efficiency of nonlinear energy sink cell. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(11): 2614-2623 (in Chinese))
- 范舒铜, 申永军. 简谐激励下黏弹性非线性能量阱的研究. *力学学报*, 2022, 54(9): 2567-2576 (Fan Shutong, Shen Yongjun. Research on a viscoelastic nonlinear energy sink under harmonic excitation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(9): 2567-2576 (in Chinese))
- Zhang S, Zhou J, Ding H, et al. Fractional nonlinear energy sinks. *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, 2023, 44(5): 711-726
- Gendelman O, Manevitch LI, Vakakis AF, et al. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 2001, 68(1): 34-41
- Yang K, Zhang YW, Ding H, et al. Nonlinear energy sink for whole-spacecraft vibration reduction. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME*, 2017, 139(2): 021011
- Guo HL, Cao SQ, Yang TZ, et al. Aeroelastic suppression of an air-

- foil with control surface using nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(2): 857-872
- 22 Sun YH, Zhang YW, Ding H, et al. Nonlinear energy sink for a fly-wheel system vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 429: 305-324
- 23 Wang Y, Wang P, Meng H, et al. Dynamic performance and parameter optimization of a half-vehicle system coupled with an inerter-based X-structure nonlinear energy sink. *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, 2024, 45(1): 85-110
- 24 马凯, 杜敬涛, 刘杨等. 调谐质量阻尼器和非线性能量阱抑制内燃机闭环轴系扭转振动的比较研究. *力学学报*, 2024, 56(1): 236-246 (Ma Kai, Du Jingtao, Liu Yang, et al. A comparative study on the torsional vibration attenuation of closed-loop internal combustion engine shafting using tuned mass damper and nonlinear energy sink. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(1): 236-246 (in Chinese))
- 25 Zhang YW, Zhou L, Wang S, et al. Vibration power flow characteristics of the whole-spacecraft with a nonlinear energy sink. *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*, 2019, 38(2): 341-351
- 26 Chen YY, Qian ZC, Chen K, et al. Seismic performance of a nonlinear energy sink with negative stiffness and sliding friction. *Struct Control Health Monit*, 2019, 26(11): e2437
- 27 Tehrani GG, Dardel M, Pashaei MH. Passive vibration absorbers for vibration reduction in the multi-bladed rotor with rotor and stator contact. *Acta Mechanica*, 2020, 231(2): 597-623
- 28 Zeng YC, Ding H, Du RH, et al. A suspension system with quasi-zero stiffness characteristics and inerter nonlinear energy sink. *Journal of Vibration and Control*, 2022, 28(1-2): 143-158
- 29 Wang Y, Xu BB, Dai JG, et al. Enhanced dynamic performance of a half-vehicle system using inerter-based nonlinear energy sink. *Journal of Vibration and Control*, 2024, 30(13-14): 2857-2880
- 30 Wang J, Du TK, Liu YQ, et al. Distributed control of vehicle suspension system based on nonlinear energy sink. *Journal of Vibration and Control*, 2025, <https://doi.org/10.1177/10775463241248551>
- 31 Lee HG, Sung KG, Choi SB, et al. Performance evaluation of a quarter-vehicle MR suspension system with different tire pressure. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2011, 12(2): 203-210
- 32 Liu S, Zheng T, Zhao DX, et al. Strongly perturbed sliding mode adaptive control of vehicle active suspension system considering actuator nonlinearity. *Vehicle System Dynamics*, 2022, 60(2): 597-616
- 33 Li Y, Deng HF, Xu X, et al. Modelling and testing of in-wheel motor drive intelligent electric vehicles based on co-simulation with Carsim/Simulink. *IET Intelligent Transport Systems*, 2019, 13(1): 115-123
- 34 Luo ACJ, Huang JZ. Analytical solutions for asymmetric periodic motions to chaos in a hardening Duffing oscillator. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(1-2): 417-438