

## 基于XGBoost-SHAP的串列布置三圆柱水动力学特性参数预测

钟家文, 周水根, 宋金泽, 朱红钧

## PREDICTION OF HYDRODYNAMIC CHARACTERISTICS PARAMETERS OF THREE TANDEM CIRCULAR CYLINDERS BASED ON XGBoost-SHAP

Zhong Jiawen, Zhou Shuigen, Song Jinze, and Zhu Hongjun

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-24-493>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 串列布置三圆柱涡激振动频谱特性研究

STUDY ON THE SPECTRUM CHARACTERISTICS OF VORTEX-INDUCED VIBRATION OF THREE TANDEM CIRCULAR CYLINDERS

力学学报. 2021, 53(6): 1552-1568

#### 串列三圆柱流固耦合响应的尾流干涉与动态演变特性研究

STUDY ON THE WAKE INTERFERENCE AND DYNAMIC EVOLUTION CHARACTERISTICS OF THE FLUID-STRUCTURE INTERACTION OF THREE TANDEM CIRCULAR CYLINDERS

力学学报. 2024, 56(4): 1178-1186

#### 平面剪切来流作用下串列布置三圆柱流致运动特性研究

STUDY OF FLOW-INDUCED MOTION CHARACTERISTICS OF THREE TANDEM CIRCULAR CYLINDERS IN PLANAR SHEAR FLOW

力学学报. 2019, 51(3): 787-802

#### 低雷诺数下串列布置双圆柱涡激振动特性研究

STUDY ON THE VORTEX-INDUCED VIBRATION CHARACTERISTICS OF TWO TANDEM CYLINDERS AT LOW REYNOLDS NUMBER

力学学报. 2022, 54(1): 68-82

#### 串列双锥柱绕流流动特性的大涡模拟研究

LARGE EDDY SIMULATION OF FLOW PAST TWO CONICAL CYLINDERS IN TANDEM ARRANGEMENT

力学学报. 2022, 54(5): 1209-1219

#### 均匀旋转对圆柱水动力及流动结构的影响

HYDRODYNAMICS AND FLOW STRUCTURES OF A UNIFORMLY ROTATING CIRCULAR CYLINDER

力学学报. 2024, 56(4): 928-942



关注微信公众号，获得更多资讯信息

# 基于 XGBoost-SHAP 的串列布置三圆柱水动力学特性参数预测<sup>1)</sup>

钟家文 周水根 宋金泽 朱红钧<sup>2)</sup>

(西南石油大学油气藏地质及开发工程全国重点实验室, 成都 610500)

**摘要** 基于极限梯度提升 (eXtreme Gradient Boosting, XGBoost) 算法和 SHAP (SHapley Additive exPlanations) 分析对低雷诺数下串列三圆柱绕流的水动力学特性参数进行了机器学习研究, 采用开源计算流体力学软件 OpenFOAM 模拟并建立了在不同工况下各圆柱的升阻力和涡脱频率数据集. 对比决定系数、绝对误差和误差率等参数, 基于 XGBoost 算法建立的机器学习模型经过超参数优化后具有良好的预测性能, 在对数据集范围之外的文献参数预测中, 最大误差率为 16.03%, 经过二次学习后可降低至 0.71%. 利用 SHAP 分析分别解释模型在整体和局部的预测结果, 得到雷诺数、上游间距和下游间距分别对串列三圆柱的 9 个水动力特征参数累计平均贡献度, 并开展了归因分析. 此外, 捕捉到输入特征局部贡献值的异变, 结合流场结构分析发现, 当上游间距为 2、下游间距从 2 增大为 3 时, 下游间距对下游圆柱的平均阻力的 SHAP 值由 -0.22 增大到 0.03, 对升力均方根值的 SHAP 值由 -0.22 增大到 0.04, 尾流干涉模式由拓展体变为交替再附着模式. 当上游间距为 6 时, 下游间距从 2 增大到 6 时, SHAP 局部分析量化了双排涡结构中下游圆柱的水动力特征变化规律.

**关键词** 串列三圆柱, 升阻力, 涡脱频率, 极限梯度提升, 沙普利加性解释

中图分类号: O357.1

文献标识码: A

DOI: 10.6052/0459-1879-24-493

CSTR: 32045.14.0459-1879-24-493

## PREDICTION OF HYDRODYNAMIC CHARACTERISTICS PARAMETERS OF THREE TANDEM CIRCULAR CYLINDERS BASED ON XGBoost-SHAP<sup>1)</sup>

Zhong Jiawen Zhou Shuigen Song Jinze Zhu Hongjun<sup>2)</sup>

(State Key Laboratory of Oil and Gas Reservoir Geology and Exploitation, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

**Abstract** A machine learning study on the hydrodynamic characteristic parameters of a tandem three-cylinder flow at low Reynolds numbers was carried out based on the XGBoost (eXtreme Gradient Boosting) algorithm and SHAP (SHapley Additive exPlanations) analysis. The open-source computational fluid dynamics software OpenFOAM was employed to simulate and establish datasets of lift and drag forces and vortex shedding frequencies of each cylinder under various conditions. By comparing parameters such as the coefficient of determination, absolute error, and error rate, the machine learning model based on the XGBoost algorithm, after hyper-parameter optimization, exhibited excellent

2024-10-24 收稿, 2024-12-17 录用, 2024-12-19 网络版发表.

1) 四川省杰出青年科学基金资助项目(2023NSFSC1953).

2) 通讯作者: 朱红钧, 教授, 主要研究方向为海洋管柱多场多相耦合力学. E-mail: ticky863@126.com

引用格式: 钟家文, 周水根, 宋金泽, 朱红钧. 基于 XGBoost-SHAP 的串列布置三圆柱水动力学特性参数预测. 力学学报, 2025, 57(4): 843-853

Zhong Jiawen, Zhou Shuigen, Song Jinze, Zhu Hongjun. Prediction of hydrodynamic characteristics parameters of three tandem circular cylinders based on XGBoost-SHAP. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(4): 843-853

predictive performance. In the prediction of literature parameters outside the dataset range, the maximum error rate was 16.03%, which could be reduced to 0.71% after secondary learning. By using SHAP analysis to explain the model's prediction results both globally and locally, the cumulative average contribution degrees of Reynolds number, upstream spacing, and downstream spacing to the nine hydrodynamic characteristic parameters of the tandem three-cylinder configuration were obtained, and an attribution analysis was conducted. Additionally, the local contribution value variations of the input features were captured. Through combined analysis with the flow field structure, it was discovered that when the upstream spacing was 2 and the downstream spacing increased from 2 to 3, the SHAP value of the downstream spacing to the average drag force of the downstream cylinder increased from  $-0.22$  to  $0.03$ , and the SHAP value to the root mean square lift force increased from  $-0.22$  to  $0.04$ . It was discovered that the wake interference pattern transformed from an expanded body to an alternating reattachment pattern. When the upstream spacing was 6 and the downstream spacing increased from 2 to 6, the SHAP local analysis quantified the variation laws of the hydrodynamic characteristics of the downstream cylinder in the double-row vortex structure.

**Key words** three tandem circular cylinders, lift and drag coefficients, vortex shedding frequency, XGBoost, SHAP

## 引言

串列布置是工程中常见的形式之一,如海洋平台桩腿、海洋立管和桥梁支撑柱等<sup>[1-2]</sup>,研究串列三圆柱的水动力特征及相互影响对工程设计具有指导意义<sup>[3]</sup>.通过文献调研,串列三圆柱的水动力学特征,包括升阻力、尾流特征及涡脱频率受雷诺数( $Re = UD/v$ ,  $U$ 为迎流速度,  $D$ 为圆柱直径,  $v$ 为流体运动黏度)和圆柱间距( $L_1^* = L_1/D$ 和 $L_2^* = L_2/D$ ,  $L_1$ 为上游间距,  $L_2$ 为下游间距)控制<sup>[4]</sup>.

Igarashi 等<sup>[5]</sup>实验测试了  $Re = 1.0 \times 10^4 \sim 4.0 \times 10^4$  下等距  $L/D = 1.03 \sim 3.82$  串列三圆柱绕流发现,平均阻力系数的临界间距为  $L/D = 3.53$ ,上游圆柱的平均阻力系数在临界间距之前随着间距的增大而逐渐减小,直到间距比大于 2.8 之后开始增大,且中间圆柱阻力系数在  $L/D < 3.53$  为负,  $L/D > 3.53$  为正,而下游圆柱阻力系数在  $L/D > 3.53$  之后缓慢增长,下游圆柱涡脱频率主要受间距的影响.杨群等<sup>[6]</sup>在  $Re = 3.4 \times 10^4$  实验测试结果同样证实了串列三圆柱的绕流存在两个完全不同的尾流模式,临界间距在  $3.5 \sim 4.0$  之间,两个模式下的平均压力分布与平均阻力系数存在明显的差异,并且在 Igarashi 等<sup>[5]</sup>的基础上,将间距范围扩大到  $L/D = 1.2 \sim 12$ ,发现上游圆柱阻力系数在临界间距  $L/D = 3.5$  之前随着间距增大而减小.刘小兵等<sup>[7]</sup>发现在临界间距附近,上游圆柱和中间圆柱的脉动升力达到最大,上游圆柱的升力系数均方根值约为单圆柱的 1.3 倍,中间圆柱为单圆柱的 2.2 倍.此外,下游圆柱的流体力系数分布表

现出两个临界间距比<sup>[8]</sup>,分别为  $L/D_{cr1} = 2.0 \sim 2.5$  和  $L/D_{cr2} = 3.5 \sim 4.0$ ,在第一个临界间距附近,升阻力的脉动均超过单圆柱. Harichandan 等<sup>[9]</sup>在  $Re = 100, 200$  下的结果表明,间距越小,下游圆柱上的升力越大,会发生尾流诱导的颤振,上游和中间圆柱分离的剪切层或旋涡会干扰下游圆柱的涡脱. Alam 等<sup>[10]</sup>分析了  $Re = 200$  下不等间距  $L_1/D = 3.5 \sim 5.25$  和  $L_2/D = 3.6 \sim 5.5$  的串列三圆柱流体力学和涡脱相位差特性,发现串列三圆柱的水动力特性对  $L_1/D$  更敏感,涡脱同相时脉动升力大但是阻力和涡脱频率较小,反相时升力则较小. Hosseini 等<sup>[11]</sup>指出当间距小于 6.5 时,串列三圆柱与双柱有相似的流动机制. Zhu 等<sup>[12]</sup>在  $Re = 160$  对于等距串列三圆柱尾流干涉提出了拟同脱落 QCS (quasi-co-shedding) 模式,对应间距范围为  $L/D = 3.5 \sim 6.5$ ,在该模式下,下游圆柱处于上游双排涡中间,平均阻力系数随间距的增大基本保持不变,而各圆柱的升力系数均方根值随着间距的增大而减小,涡脱频率随着间距的增大均增大,脱离 QCS 模式后,下游圆柱的平均阻力和升力均方根值均增大,而涡脱频率则是大幅下降.此外, Duong 等<sup>[13]</sup>发现在串列三椭圆柱绕流时同样存在该现象.

综上所述,由于串列三圆柱周围的流体流动是非定常的,并且各个圆柱上的升阻力与雷诺数和间距呈非线性关系,且现有的研究常采用控制变量法,研究单一参数对串列三圆柱绕流的影响,而通过模拟和实验两种途径获得各个圆柱上的升阻力都需要大量的计算资源和实验成本.近年来,基于极限梯度提升的集成学习算法 XGBoost (eXtreme Gradient

Boosting) 以优越的性能和泛化能力在各种复杂数据分析中表现出色<sup>[14-16]</sup>. 在钝体绕流方面, Li 等<sup>[17]</sup> 将  $Re = 100, 3900$  的圆柱绕流模拟数据进行训练, 指出与传统方法相比, XGBoost 可以处理多个输入变量, 这些输入变量反映了湍流的不同性质, 包括非定常、涡旋拉伸和三维性. Meddage 等<sup>[18]</sup> 采用训练后的 XGBoost 模型准确预测了方柱整个流动时间内的瞬态风压并很好地捕捉到特殊的流动特征.

然而, XGBoost 算法也存在和其他算法如神经网络、支持向量机相同的问题, 即建模过程隐式复杂, 模型可解释性不强. 为此, 本文采用 SHAP (SHapley Additive exPlanations) 作为机器学习 XGBoost 算法的解释工具, 可详细分析每个样本的各个特征对模型预测结果的影响正负性并提供每个特征对模型预测的影响规律<sup>[15]</sup>, 从而解释机器学习模型与物理机制的关系. SHAP 可对 XGBoost 模型的预测结果进行整体和局部的解释, 详细分析  $Re, L_1$  和  $L_2$  分别对模型预测结果的贡献值并自动排序. 因此, 本文使用 XGBoost-SHAP 方法建立串联三圆柱水动力特性预测模型, 将模型的预测值与数值模拟结果和文献结果进行比较, 并结合流体流动机制解释机器学习模型.

## 1 CFD 模拟与数据集

### 1.1 控制方程

通过求解非定常二维不可压缩 Navier-Stokes (N-S) 方程, 模拟串联三圆柱周围的流动<sup>[12]</sup>

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2)$$

其中,  $x_i$  为坐标轴,  $u_i$  为流体在  $x_i$  方向上的速度,  $t$  为时间,  $\rho$  为流体密度,  $p$  为压力,  $\nu$  为流体的运动黏度. 利用开源计算流体力学 (CFD) 求解器 OpenFOAM 进行求解计算<sup>[19]</sup>, 利用模拟的结果建立串联三圆柱数据库, 进而开展基于数据驱动的水动力特征研究.

### 1.2 问题描述

如图 1 所示, 3 个圆柱依次为 C1, C2 和 C3, 并以 C1 的圆心为坐标原点, 圆柱直径为  $D$ . 数值模拟计算域的宽度设置为  $40D$ , 此时阻塞率为 2.5% 可忽

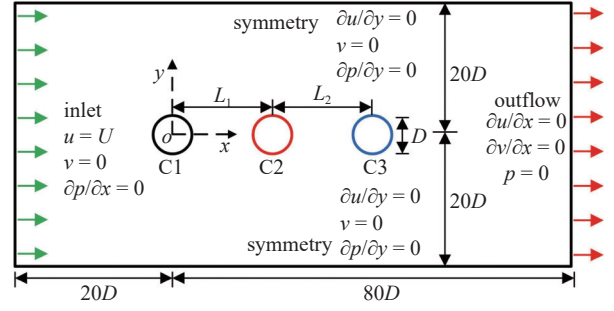


图 1 计算域和边界条件

Fig. 1 Computational domain and boundary conditions

略计算域宽度对圆柱周围流场的影响<sup>[20]</sup>. 圆柱上游长度设置为  $20D$ , 避免入口干扰 C1 周围流动. C1 距离出口  $80D$ , 以充分捕捉串联三圆柱的尾迹发展.

左侧入口边界设为速度入口 ( $u = U, v = 0$ ), 压力边界条件为零压梯度, 右侧出口边界设为压力出口 ( $\partial u / \partial x = 0, \partial v / \partial x = 0, p = 0$ ), 上、下边界设为对称边界 ( $\partial u / \partial y = 0, v = 0$ ), 柱体表面边界设为速度无滑移, 压力沿法向方向梯度为零. 为保证数值收敛, 选定时间步长  $\Delta t = 0.01$ , 以满足 CFL 条件, 即  $U_{\max} \times \Delta t / \Delta x \leq 0.5$ <sup>[21]</sup>.

### 1.3 数据集评估

在进行 CFD 数值模拟的过程中, 监测各个圆柱上的流体力并计算平均阻力和脉动升力系数

$$C_{D,\text{mean}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F_{D,i}}{0.5 \rho U^2 D} \quad (3)$$

$$C_{L,\text{mean}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F_{L,i}}{0.5 \rho U^2 D} \quad (4)$$

$$C_{L,\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_{L,i} - C_{L,\text{mean}})^2} \quad (5)$$

其中,  $C_{D,\text{mean}}$  为平均阻力系数,  $C_{L,\text{rms}}$  为升力系数均方根值. 此外, 各圆柱上的旋涡脱落频率也是重点关注的参数, 通过特征速度与特征尺寸进行无量纲化

$$St = \frac{fD}{U} \quad (6)$$

其中,  $f$  为涡脱频率. 串联三圆柱上的流体力 and 涡脱频率受雷诺数  $Re$  和各圆柱间距  $L_1^*$  和  $L_2^*$  的共同作用, 对应关系如下

$$(C_{D,\text{mean}}, C_{L,\text{rms}}, St)_i = \Gamma(Re, L_1^*, L_2^*), \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$



在 CFD 模拟建立数据集过程中, 雷诺数范围为  $Re = 40 \sim 160$ , 各圆柱间距范围为  $L_1^*, L_2^* = 1.5 \sim 10$ . 根据模拟结果, 建立了 500 种不同工况下的数据集, 其中每条数据均包含 3 个输入特征以及 9 个水动力特征参数.

机器学习的效果由数据集决定, 为了保证数据集的准确性, 在建立数据集之前, 分别用单圆柱和串联三圆柱进行了方法验证. 如表 1 所示, 本文所采用的数值模拟方法与 Williamson<sup>[3]</sup> 的实验和 Jiang 等<sup>[22]</sup> 的 DNS 模拟结果均吻合较好, 同时也能捕捉到圆柱绕流从定常 Foppl 涡向非定常 Karman 涡街转换的临界雷诺数  $Re_{cr} = 47$ <sup>[23]</sup>.

如图 2 所示, 在  $Re = 160, L_1^* = L_2^* = 5.0$  下, 将本文数值模拟的数据集中的一组结果与文献 [12] 对比, 结果吻合较好, 最大误差为 7.24%.

图 3 展示了数据集中各参数的皮尔逊相关系数, 当  $r = -1$  时, 两个参数呈线性负相关, 当  $r = 1$  时, 则为线性正相关,  $r$  值介于中间则弱相关, 特别是当  $r = 0$  时, 两个参数没有线性关系. 在相关系数矩阵中, 除对角线上以外, 当水动力特征参数只与 1 个输入特征参数的  $r$  值不为 0 时为简单线性相关, 与多个输入特征参数的  $r$  值不为 0 时则存在复杂的非线性关系. 通过图 3 可知, 输入特征与串联三柱水动力特征存在复杂的非线性关系.

表 1 单圆柱绕流涡脱频率

| Table 1 Comparison results of a single cylinder |                              |           |           |            |
|-------------------------------------------------|------------------------------|-----------|-----------|------------|
| $Re$                                            | $Re = 46$                    | $Re = 47$ | $Re = 50$ | $Re = 100$ |
| Williamson <sup>[3]</sup>                       | —                            | 0.122     | 0.125     | 0.164      |
| $St$                                            | Jiang et al. <sup>[22]</sup> | —         | 0.120     | 0.124      |
| present work                                    | 0                            | 0.120     | 0.124     | 0.165      |

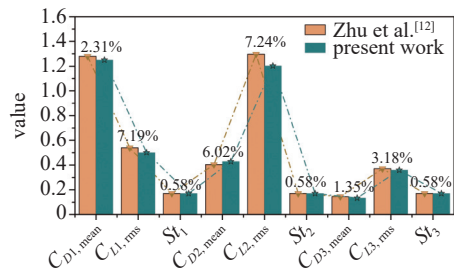


图 2  $Re = 160, L_1^* = L_2^* = 5.0$  串联三柱绕流结果对比  
Fig. 2 Comparison results of three tandem cylinders at  $Re = 160$  with  $L_1^* = L_2^* = 5.0$

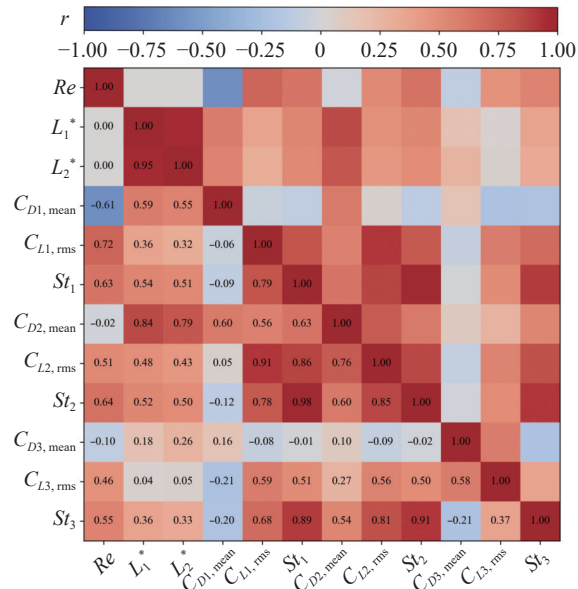


图 3 皮尔逊相关系数矩阵  
Fig. 3 Pearson correlation coefficient matrix

2 XGBoost-SHAP 方法

2.1 XGBoost 集成学习方法

由 Chen 等<sup>[24]</sup> 提出的 XGBoost 算法是对梯度提升决策树算法的一种新颖改进方法, 特别适用于分类回归树. 该技术基于“提升”理念, 通过结合弱学习器的预测和加法训练方法, 构建出一个强学习器. XGBoost 有助于避免过拟合, 并优化计算能力<sup>[25]</sup>. 通过最小化目标函数, 允许将预测项和正则化项结合, 同时保持尽可能快的处理速度. 在训练过程中, XGBoost 算法自动执行相似估计. XGBoost 中的加法学习机制被描述为: 为了修正弱学习器的局限性, 首先对完整的输入数据集进行拟合第一个学习器, 然后对残差拟合第二个模型. 在条件未达到停止之前, 这种可接受的方法会多次执行. 每个学习器预测的总和生成最终模型的预测. XGboost 的模型表达式为

$$\hat{y}_i = \sum_{k=1}^K f_k(x_i), \quad f_k \in F \tag{8}$$

其中,  $x_i$  为第  $i$  个样本,  $\hat{y}_i$  为  $x_i$  的预测值,  $K$  为当前树的总数,  $F$  为所有可能的树模型空间,  $f_k$  为  $K$  中一个树模型. 每次迭代不影响原模型, 添加一个新的树模型到模型中, 在原残差的基础上寻找最小残差, 迭代过程如下

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}_i^0 &= 0 \\ \hat{y}_i^1 &= f_1(x_i) = \hat{y}_i^0 + f_1(x_i) \\ &\vdots \\ \hat{y}_i^k &= f_1(x_i) = \hat{y}_i^{k-1} + f_k(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

XGBoost 的目标函数为

$$L_{\text{obj}} = \sum_{i=1}^n l(\hat{y}_i, y_i) + \sum_{k=1}^K \Omega(f_k) \quad (10)$$

$$\Omega(f_k) = \gamma T + \lambda \frac{1}{2} \sum_{j=1}^T w_j^2 \quad (11)$$

其中,  $\sum_{i=1}^n l(\hat{y}_i, y_i)$  为模型的损失函数,  $\sum_{k=1}^K \Omega(f_k)$  为模型的正则项,  $T$  为模型树的叶子节点数量;  $w$  为叶子节点值;  $\gamma$  和  $\lambda$  分别是控制叶子节点数量和叶子节点值的权重系数。

为了让目标函数收敛更快, 对损失函数部分进行泰勒二次展开近似替换, 进行整理后第  $t$  次的目标函数为

$$L_{\text{obj}}^t \approx \sum_{i=1}^n \left[ l(\hat{y}_i^{t-1}, y_i) + g_i f_t(X_i) + \frac{1}{2} h_i f_t^2(X_i) \right] + \Omega(f_t) \quad (12)$$

其中,  $g_i = \partial_{\hat{y}_i^{t-1}} l(y_i, \hat{y}_i^{t-1})$ ,  $h_i = \partial_{\hat{y}_i^{t-1}}^2 l(y_i, \hat{y}_i^{t-1})$ . 当  $t-1$  次模型确定时,  $l(\hat{y}_i^{t-1}, y_i)$  作为常数项移除后的目标函数为

$$\tilde{L}_{\text{obj}}^t = \sum_{i=1}^n \left[ g_i f_t(X_i) + \frac{1}{2} h_i f_t^2(X_i) \right] + \Omega(f_t) \quad (13)$$

定义集合  $I_j = \{i \mid q(x_i) = j\}$ , 即所有被分类到第  $j$  个叶子节点的值  $I_j$ , 则根据正则项扩展得到

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\text{obj}}^t &= \sum_{i=1}^n \left[ g_i f_t(X_i) + \frac{1}{2} h_i f_t^2(X_i) \right] + \gamma T + \lambda \frac{1}{2} \sum_{j=1}^T w_j^2 = \\ &\sum_{j=1}^T \left[ \left( \sum_{i \in I_j} g_i \right) w_j + \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in I_j} h_i + \lambda \right) w_j^2 \right] + \gamma T \end{aligned} \quad (14)$$

其中, 在计算第  $j$  个最优叶子节点值时

$$w_j^* = \sum_{i \in I_j} g_i / \left( \sum_{i \in I_j} h_i + \lambda \right) \quad (15)$$

即可得到最优目标函数值

$$\tilde{L}_{\text{obj}}^t = \left( \sum_{i \in I_j} g_i \right)^2 / \left( \sum_{i \in I_j} h_i + \lambda \right) + \gamma T \quad (16)$$

## 2.2 SHAP 可解释分析方法

可解释性不佳是阻碍机器学习算法在实际工程中应用的重要因素, 而对于 XGBoost 这种复杂的集成算法更需要一种直观的表达, 将机器学习与物理机制联系, 以提高数据驱动在串联三圆柱水动力学特征分析的实用性. 由 Lundberg 等<sup>[26]</sup> 提出的 SHAP 方法将各个特征值视为贡献者并计算其贡献值, 所有特征值对模型输出的贡献值的和即为模型的最终预测

$$f(x) = g(z^*) = \phi_0 + \sum_{i=1}^M \phi_i z_i^* \quad (17)$$

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!(M-|S|-1)!}{M!} [f(S \cup \{i\}) - f(S)] \quad (18)$$

其中,  $f(x)$  为机器学习模型;  $z_i^* \in \{0, 1\}$ , 有特征输入时,  $z_i^* = 1$ , 反之为 0;  $M$  为特征值的数量;  $\phi_i$  为对应特征值的贡献值;  $N$  为所有输入特征的集合;  $S$  为包含  $z^*$  中非零索引的集合。

## 2.3 超参数优化

采用树结构概率密度估计 (tree-structured parzen estimator, TPE) 和  $K$  折交叉验证 (K-fold cross validation, K-Fold CV) 来进行超参数优化和模型训练<sup>[27]</sup>. XGBoost 模型中主要进行优化的关键超参数包括弱学习器数量 ( $n_{\text{estimators}}$ )、树的最大深度 ( $\text{max\_depth}$ ) 和学习率 ( $\text{learning\_rate}$ ). 本文中超参数优化范围详见表 2.

表 2 超参数优化区间

| Parameters              | Range       | Iteration |
|-------------------------|-------------|-----------|
| $n_{\text{estimators}}$ | [100, 200)  | 1         |
| $\text{max\_depth}$     | [1, 5)      | 1         |
| $\text{learning\_rate}$ | [0.01, 0.5) | 0.01      |

## 3 分析与讨论

### 3.1 模型性能评价

采用决定系数  $R^2$  和绝对误差  $MAE$  这两个指标综合评价模型性能<sup>[18]</sup>, 表达式分别为

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (19)$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \tag{20}$$

式中,  $y_i$  为真实值,  $\hat{y}_i$  为预测值,  $\bar{y}_i$  为平均值,  $n$  为计算样本数.  $R^2$  越接近于 1、 $MAE$  越接近于 0, 模型性能越好, 预测值和真实值差距越小.

如图 4 所示, 在 10 折交叉验证下,  $R^2$  值基本在  $R^2 = 0.9$  线以上, 只有 C3 的升力均方根值的平均  $R^2$  值为 0.898, 略低于 0.9. 此外, 由于 C3 在 C1 和 C2 的尾流中, 非线性更强, C3 的  $R^2$  值误差条范围略大于 C1 和 C3, 模型对 C3 预测的鲁棒性有所降低. 从  $MAE$  值评价, 预测的所有参数平均  $MAE$  值均小于 0.05. 结合两个评价指标, 本文输入的数据集进行机器学习得到的模型具有良好的预测性能.

如图 5 所示, 本文采用机器学习得到的模型预测了文献中的组次, 其中包括不在本文学习数据集范围中 Alam 等<sup>[10]</sup> 在  $Re = 200$  下的 9 种工况和 Hosseini 等<sup>[11]</sup> 在  $Re = 200$  下的 42 种工况, 以及本文学习数据集涵盖范围 Zhu 等<sup>[12]</sup> 在  $Re = 160$  下的 18 种工况, 每种工况均包含串联三圆柱上的 9 个流体力特征参数. 其中, 各参数的平均  $R^2$  值均在 0.6 以上, 而平均  $MAE$  值均在 0.15 以内, 其中, 模型对涡脱频率的预测性能良好.

上述模型对 Alam 等<sup>[10]</sup> 非等间距结果预测效果低于等间距<sup>[11-12]</sup> 数据的预测效果, 特别是对于 9 个特征参数中  $MAE$  值最大的  $C_{L1,rms}$  值, 如表 3 所示的第 1 次预测 (prediction 1st), 误差率最大值为 16.03%, 表明模型对于数据集范围外的工况预测性能一般, 而将文献数据放入机器学习模型后第二次

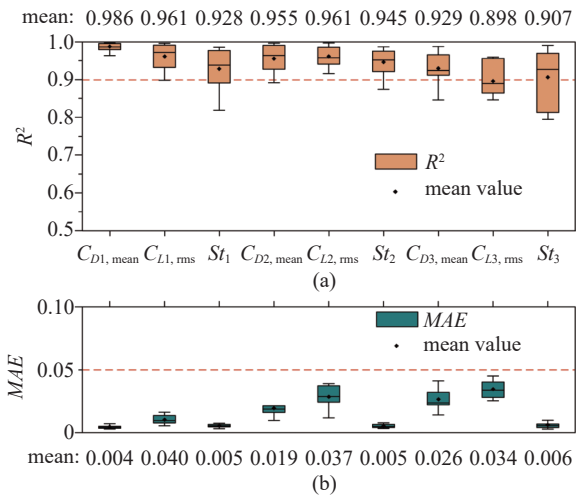


图 4 XGBoost 模型性能评价

Fig. 4 Evaluation of XGBoost model performance

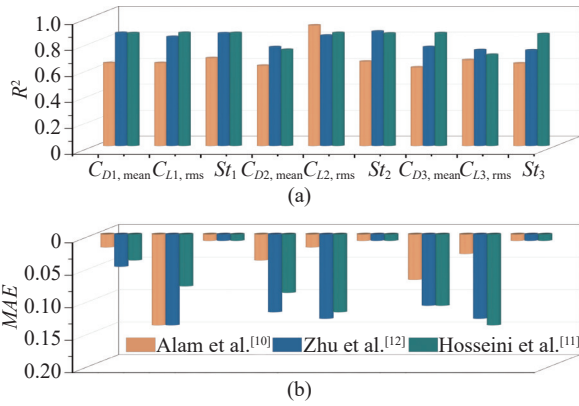


图 5 文献预测性能

Fig. 5 Comparison of prediction results with literature

表 3  $Re = 200$ ,  $C_{L1,rms}$  值预测结果对比

| Table 3 Comparison of $C_{L1,rms}$ prediction results at $Re = 200$ |         |                             |                                |                                |
|---------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $L_1^*$                                                             | $L_2^*$ | Alam et al. <sup>[10]</sup> | Prediction 1st<br>(error rate) | Prediction 2nd<br>(error rate) |
| 3.5                                                                 | 3.6     | 0.562                       | 0.529<br>(-5.87%)              | 0.558<br>(-0.71%)              |
| 3.5                                                                 | 4.5     | 0.560                       | 0.511<br>(-8.75%)              | 0.558<br>(-0.36%)              |
| 3.5                                                                 | 5.5     | 0.549                       | 0.461<br>(-16.03%)             | 0.549<br>(0.00%)               |
| 4.5                                                                 | 3.6     | 0.490                       | 0.447<br>(-8.78%)              | 0.489<br>(-0.20%)              |
| 4.5                                                                 | 4.5     | 0.487                       | 0.441<br>(-9.45%)              | 0.487<br>(0.00%)               |
| 4.5                                                                 | 5.5     | 0.488                       | 0.431<br>(-11.68%)             | 0.488<br>(0.00%)               |
| 5.25                                                                | 3.6     | 0.457                       | 0.418<br>(-8.53%)              | 0.456<br>(-0.22%)              |
| 5.25                                                                | 4.5     | 0.457                       | 0.421<br>(-7.88%)              | 0.456<br>(-0.22%)              |
| 5.25                                                                | 5.5     | 0.459                       | 0.407<br>(-11.33%)             | 0.456<br>(-0.65%)              |

预测 (prediction 2nd) 结果的最大误差率仅为 0.71%. 而 Jiang 等<sup>[22]</sup> 对单圆柱三维 DNS 模拟结果表明, 在  $Re = 200$  下, 单圆柱平均阻力和升力均方根值均显著低于二维模拟结果.

### 3.2 特征重要性分析

使用 SHAP 方法对模型预测结果进行解释, 得到  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  分别对串联三圆柱上水动力特征参数累计平均贡献度. 如图 6 所示, C1 的水动力特征主要由  $Re$  和  $L_1^*$  决定, C3 处于尾流中,  $L_2^*$  对 C1 的累计平均贡献最小, 其中,  $Re$  和  $L_1^*$  对阻力的累计平均贡献度相近,  $Re$  对升力和涡脱频率的累计平均贡献度高于  $L_1^*$ . 对于中间圆柱 C2,  $L_2^*$  的累计平均贡献略有提升, 而  $L_1^*$  对升力的贡献度比  $Re$  更高. 对于处在尾流中的 C3,  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  对阻力的累计平均贡献度都比较高, 对阻力累计平均贡献度最高的是  $L_1^*$ ,



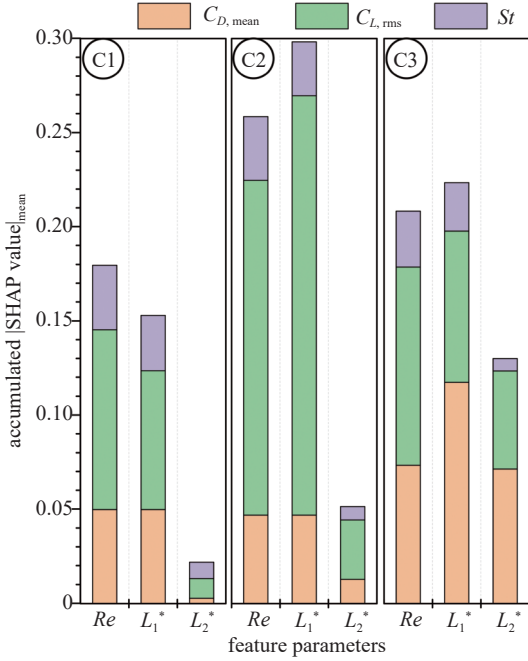


图 6 特征参数对输出结果的平均影响

Fig. 6 Global feature importance plot

$Re$  对升力和涡脱频率累计平均贡献度最高。

### 3.3 SHAP 概要分析

如图 7 所示为 3 个参数对串联三圆柱上 9 个水动力特征的 SHAP 概要图, 图中散点的颜色由特征参数的相对大小决定, 散点对应的横坐标为各特征

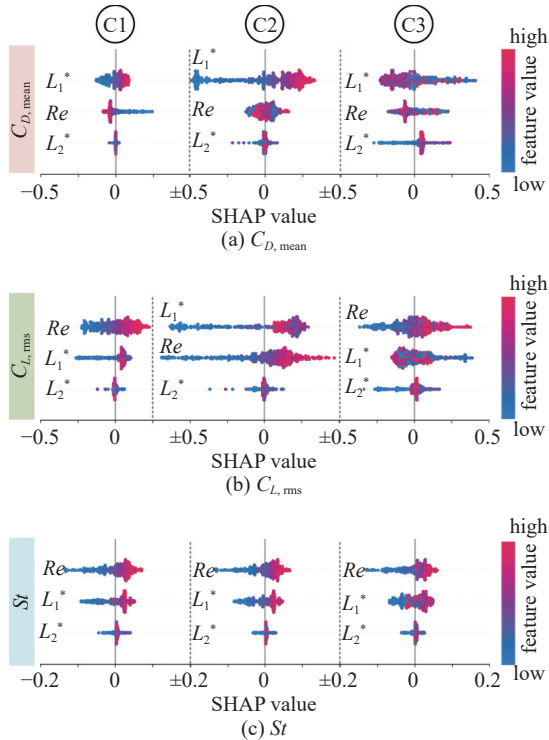


图 7 SHAP 归因分析概要图

Fig. 7 SHAP attribution analysis summary

参数变量和输出结果之间的 SHAP 值.  $L_1^*$  与  $C_1$  的  $C_{D,mean}$  呈正相关, 随着  $L_1^*$  的增大,  $C_1$  的平均阻力增大<sup>[12]</sup>. 而  $Re$  与  $C_{D,mean}$  呈负相关, 这与单圆柱绕流规律相同, 随着雷诺数的增大, 阻力系数减小<sup>[28]</sup>.  $C_{D1,mean}$  中  $L_2^*$  的 SHAP 值在 0 附近, 不会对  $C_1$  的平均阻力值产生大的变化, 说明  $C_{D1,mean}$  对  $L_2^*$  不敏感.  $C_2$  处于  $C_1$  的尾流中,  $L_1^*$  值越小, 对  $C_{D2,mean}$  值负作用越显著, 但  $Re$  的 SHAP 值散点分布较为分散,  $L_2^*$  的 SHAP 值基本落在 0 附近, 表明大部分工况下  $C_{D2,mean}$  对  $L_2^*$  不敏感, 因此,  $C_{D2,mean}$  值主要受  $Re$  和  $L_1^*$  共同作用, 如图 8(a) 所示, 在同一个  $L_1^*$  值下, 随着  $Re$  增大,  $C_{D2,mean}$  值减小 (浅黄色背景区). 对于  $C_3$ ,  $L_2^*$  与  $C_{D3,mean}$  呈正相关, 随着  $L_2^*$  的增大,  $C_3$  的平均阻力增大, 但同时也存在部分小间距组次正作用的工况, 且  $Re$  和  $L_1^*$  对  $C_{D3,mean}$  的散点分散.

上游圆柱的  $C_{L1,rms}$  值与  $Re$  和  $L_1^*$  均呈正相关,  $L_2^*$  的 SHAP 值在 0 附近, 不会对  $C_{L1,rms}$  值产生较大的作用.  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  对  $C_{L2,rms}$  的 SHAP 值范围明显扩大, 规律与  $C_1$  相似. 而  $C_3$  处在  $C_1$  和  $C_2$  的尾流中,  $C_3$  上的升力脉动同时受到  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  的控制,

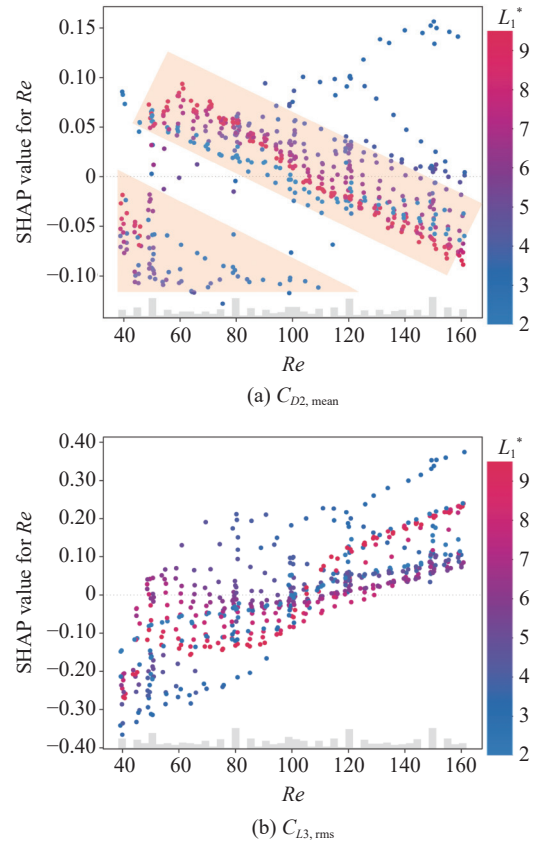


图 8 特征交互依赖图

Fig. 8 SHAP feature dependence plots

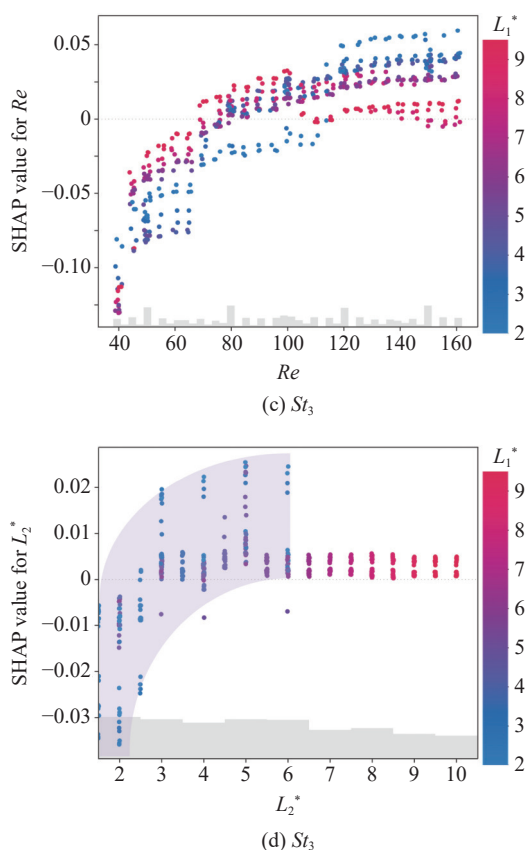


图 8 特征交互依赖图 (续)

Fig. 8 SHAP feature dependence plots (continued)

其中, 如图 8(b) 所示, 随着  $Re$  值的增大,  $Re$  对  $C_{L3,rms}$  值起正作用, 但是  $L_1^*$  对  $C_{L3,rms}$  的影响作用则在不同雷诺数下都不同.

此外, 涡脱频率在工程设计时需要考虑的一个重要参数, 要避免结构固有频率与涡脱频率重合发生共振<sup>[29-30]</sup>.  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  对 C1 和 C2 涡脱频率作用规律相同, 这是由于 C2 的涡脱主要由 C1 分离的剪切层或旋涡干扰. 但是 C3 的涡脱同时受到 C1 和

C2 的干扰, 并且由于涡脱相位差的影响<sup>[10]</sup>, 以及在大间距下, C3 自身涡脱的多种叠加因素, 从 SHAP 概要图中可以发现散点分布较广. 从图 8(c) 中可以发现, 随着  $Re$  值的增大,  $Re$  对  $St_3$  值起正作用, 但是  $L_1^*$  对  $St_3$  的影响作用则在不同雷诺数下都不同. 而如图 8(d) 所示, 在间距  $L_2^* < 6.5$  前 (浅紫色背景区), 非线性耦合关系较强, 而当间距  $L_2^* > 6.5$  后, 间距  $L_2^*$  对  $St_3$  值的影响基本保持稳定.

### 3.4 异质性局部分析

除了对数据集的全局解释外, SHAP 分析为每个单独样本提供局部解释. 图 9 和图 10 可直观地解释单个工况的 SHAP 值及其对模型预测结果的影响, 条的长度和标注的数字分别表示  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  对最终预测值的影响大小, 其中, 雷诺数均为  $Re = 150$ . base value 为对应的基础值 (平均值), 浅红色背景区域为  $C_{D,mean}$  值, 浅蓝色背景区域为  $C_{L,rms}$  值, 浅灰色背景区域为  $St$  值, 浅红色网格条带为正向贡献, 浅蓝色网格条带为负向作用.

如图 9 所示, 分别为  $L_1^* = 2$  和  $L_2^* = 2$  与  $L_1^* = 2$  和  $L_2^* = 3$  的局部 SHAP 解释, C1 和 C2 的 SHAP 值分布在两种工况下基本相近. 其中, C3 在  $L_2^* = 2$  下,  $L_2^*$  对平均阻力的 SHAP 值为  $-0.22$ , 负影响远大于  $Re$  和  $L_1^*$ , 机器学习模型预测值为  $C_{D3,mean} = 0.099$  (实际模拟值为  $0.096$ , 误差率  $3.1\%$ ), 而在  $L_2^* = 3$  下,  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  对  $C_{D3,mean}$  值都起到显著的正作用, 机器学习模型预测值为  $C_{D3,mean} = 0.587$  (实际模拟值为  $0.585$ , 误差率  $0.3\%$ ). 如图 11 所示, 通过模拟得到的尾流干涉模式可以发现,  $L_2^* = 2$  与  $L_2^* = 3$  存在本质上的区别, 当  $L_1^* = 2$  和  $L_2^* = 2$  时, 从 C1 分离的边界层掠过 C2 和 C3, 在远场中形成涡脱, 尾流干涉模式为

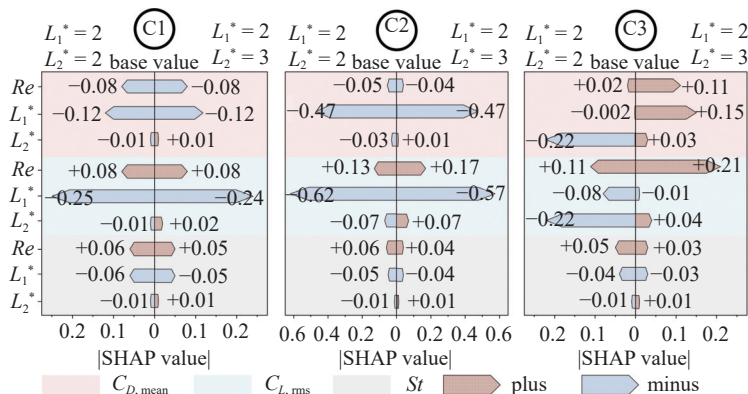


图 9 SHAP 对两个工况的预测解释

Fig. 9 Graph of SHAP prediction interpretation for two samples

OS-OS 模式<sup>[12]</sup>, 由于遮蔽效应<sup>[19]</sup>, C3 的  $C_{D3,mean}$  值较低。当  $L_1^* = 2$  和  $L_2^* = 3$  时, 从 C1 分离的边界层掠过 C2, 卷曲后交替再附着到 C3 上, 在 C3 后形成涡脱, 尾流干涉模式为 OS-AR 模式, 交替再附着的剪切层作用在 C3 上,  $C_{D3,mean}$  值增大, 升力脉动增强, 与 C3 的微观 SHAP 图正向作用对应。

如图 10 所示, 分别为  $L_1^* = 6, L_2^* = 2$  和  $L_1^* = 6, L_2^* = 6$  的 SHAP 局部分析, 串联三圆柱的 SHAP 值分布在两种工况下呈现基本左右对称分布。其中,  $L_2^*$  对所有特征参数的绝对影响值最大为 0.06, 部分参数为 0, 表明在  $Re = 150, L_1^* = 6$  和  $L_2^* = 2 \sim 6$  的范围内, 串联三圆柱水动力学特性对  $L_2^*$  不敏感。C3 的位置  $L_2^*$  从 2 增大到 6 的过程中,  $Re$  对  $C_{D3,mean}$  的贡献值

仅减小了 0.02,  $L_1^*$  对  $C_{D3,mean}$  的贡献值减小了 0.07, 因此  $C_{D3,mean}$  的预测值仅减小了 0.09。同理,  $C_{L3,rms}$  的预测值减小了 0.12。通过模拟得知, 串联三圆柱绕流在特定的组次下还存在一种双排涡结构<sup>[20]</sup>, 如图 11 所示, 在  $L_1^* = 6, L_2^* = 2 \sim 6$  的范围内, 都是 CS-QCS 模式, 在该模式下, C1 和 C2 同时有旋涡脱落, 而 C3 上虽然有边界层的分离, 但是会融合到双排涡中<sup>[12]</sup>, 因此 C3 在双排涡之间改变流向位置, 水动力特征不会有明显变化。并且远场双排涡 (TV) 向二次涡 (SV) 转变的位置也基本相同 ( $x/D \approx 20$ )。以上结果表明 SHAP 方法准确地解释了机器学习模型, 与流动物理机制结合, 并能捕捉到特殊组次在本质上的差异以及对不同尾流干涉模式进行量化分析。

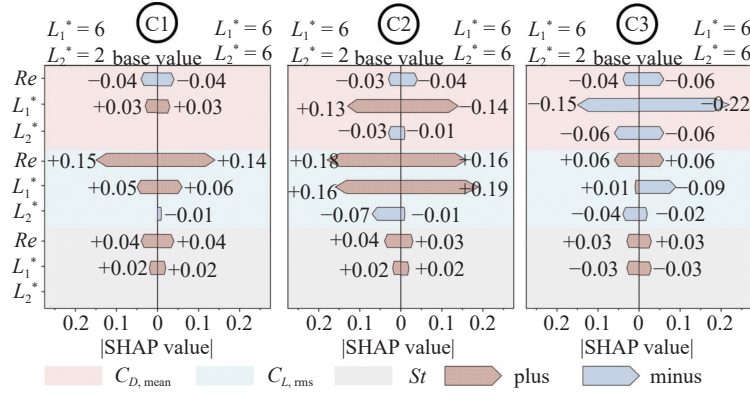


图 10 SHAP 对两个工况的预测解释

Fig. 10 Graph of SHAP prediction interpretation for two samples

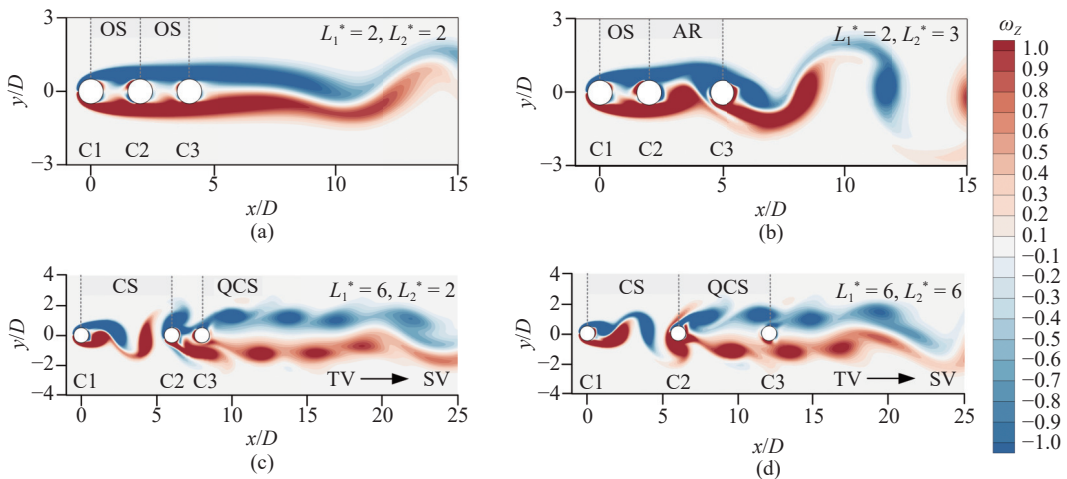


图 11 特征组次的尾流演变

Fig. 11 Wake evolution at representative cases

## 4 结论

本文基于 XGBoost-SHAP 方法, 通过开源计算

流体力学软件 OpenFOAM 对串联三圆柱在  $Re = 40 \sim 160, L_1^*$  和  $L_2^* = 1.5 \sim 10$  的范围内建立 500 种不同工况下的数据集, 探究了机器学习模型对串联三圆柱

水动力特征参数预测性能和流动物理机制的联系, 主要结论如下。

(1) 本文通过 XGBoost 算法建立的机器学习模型经过 TPE 优化后具有良好的预测性能, 在交叉验证中,  $R^2$  值基本高于 0.9,  $MAE$  值低于 0.05, 模型鲁棒性强。在 69 种文献工况预测中,  $R^2$  值高于 0.6,  $MAE$  值低于 0.15, 在文献参数预测中, 误差率最大为 16.03%, 经过二次学习后预测值最大误差率降低至 0.71%。

(2) 采用 SHAP 方法对模型预测结果进行解释, 得到  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  分别对串联三圆柱上水动力特征参数累计平均贡献度, 发现  $L_2^*$  对 C1 和 C2 的水动力特征参数累计平均贡献度较小, 主要受  $Re$  和  $L_1^*$  的作用, C1 和 C2 与串联双柱相似; 而  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  对处在尾流中的 C3 阻力的贡献度都比较高。

(3) 通过 SHAP 概要分析, 对于 C1,  $L_2^*$  的 SHAP 值基本落在 0 附近, 表明 C1 的水动力参数对  $L_2^*$  不敏感。在间距  $L_2^* < 6.5$  前, 涡脱频率与  $Re$ ,  $L_1^*$  和  $L_2^*$  非线性耦合关系较强, 而当间距  $L_2^* > 6.5$  后, 间距  $L_2^*$  对  $St_3$  值的影响基本保持稳定。

(4) 对串联三圆柱中遮蔽效应和双排涡结构组次展开局部分析, 对比单个工况特征参数的 SHAP 值, 并与流动物理机制结合, 发现 SHAP 方法能捕捉到特殊组次在本质上的差异, 并可以量化解释不同尾流干涉模式下的水动力特征变化规律。

## 参 考 文 献

- Zhang Z, Zhu H, Meng S, et al. Flow-induced forces and vortex transportation characteristics of three circular cylinders at subcritical reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 120: 103915
- 涂佳黄, 胡刚, 谭潇玲等. 串联布置三圆柱涡激振动频谱特性研究. *力学学报*, 2021, 53(5): 1552-1568 (Tu Jiahuang, Hu Gang, Tan Xiaoling, et al. Study on the spectrum characteristics of vortex-induced vibration of three tandem circular cylinders. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(5): 1552-1568 (in Chinese))
- Williamson CHK. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1996, 28(1): 477-539
- Hosseini N, Griffith MD, Leontini JS. Flow states and transitions in flows past arrays of tandem cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 910: A34
- Igarashi T, Suzuki K. Characteristics of the flow around three circular cylinders. *Bulletin of JSME*, 1984, 27(233): 2397-2404
- 杨群, 刘庆宽, 刘小兵. 串联三圆柱绕流的时均压力分布与气动力. *振动、测试与诊断*, 2019, 39(5): 1011-1015, 1133 (Yang Qun, Liu Qingkuan, Liu Xiaobing. Time averaged pressure distribution and aerodynamic force of flow around three circular cylinders in tandem arrangement. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2019, 39(5): 1011-1015, 1133 (in Chinese))
- 刘小兵, 姜会民, 王世博等. 串联三圆柱的脉动气动力特性试验研究. *振动与冲击*, 2021, 40(13): 96-103 ((Liu Xiaobing, Jiang Huiming, Wang Shibo, et al. Tests for fluctuating aerodynamic force characteristics of three cylinders in series. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(13): 96-103 (in Chinese))
- Jiang H, Yang Q, Liu X, et al. Aerodynamic force characteristics and flow field mechanism of multiple square cylinders in a tandem arrangement. *Physics of Fluids*, 2024, 36(7): 073625
- Harichandan AB, Roy A. Numerical investigation of low reynolds number flow past two and three circular cylinders using unstructured grid cfr scheme. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2010, 31(2): 154-171
- Alam Md M, Zheng Q, Derakhshandeh JF, et al. On forces and phase lags between vortex sheddings from three tandem cylinders. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2018, 69: 117-135
- Hosseini N, Griffith MD, Leontini JS. The flow past large numbers of cylinders in tandem. *Journal of Fluids and Structures*, 2020, 98: 103103
- Zhu H, Zhong J, Zhou T. Wake structure characteristics of three tandem circular cylinders at a low reynolds number of 160. *Physics of Fluids*, 2021, 33(4): 044113
- Duong VD, Nguyen VD, Nguyen VT, et al. Low-reynolds-number wake of three tandem elliptic cylinders. *Physics of Fluids*, 2022, 34(4): 043605
- Liu H, Chen X, Liu X. Factors influencing secondary school students' reading literacy: an analysis based on xgboost and shap methods. *Frontiers in Psychology*, 2022, 13: 948612
- Eini N, Bateni SM, Jun C, et al. Estimation and interpretation of equilibrium scour depth around circular bridge piers by using optimized xgboost and shap. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2023, 17(1): 2244558
- Zhang Y, Lin R, Zhang H, et al. Vibration prediction and analysis of strip rolling mill based on XGBoost and bayesian optimization. *Complex & Intelligent Systems*, 2023, 9(1): 133-145
- Li B, Yang Z, Zhang X, et al. Using machine learning to detect the turbulent region in flow past a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 905: A10
- Meddage DPP, Mohotti D, Wijesooriya K. Predicting transient wind loads on tall buildings in three-dimensional spatial coordinates using machine learning. *Journal of Building Engineering*, 2024, 85: 108725
- Zhu H, Zhong J, Shao Z, et al. Fluid-structure interaction among three tandem circular cylinders oscillating transversely at a low reynolds number of 150. *Journal of Fluids and Structures*, 2024, 130: 104204
- Zhu H, Zhong J, Liu B, et al. Unsteady wake and heat transfer char-



- acteristics of three tandem circular cylinders in forced and mixed convection flows. *Physics of Fluids*, 2024, 36(7): 073602
- 21 朱红钧, 钟家文, 宋金泽. 串列三圆柱流固耦合响应的尾流干涉与动态演变特性研究. *力学学报*, 2024, 56(4): 1178-1186 (Zhu Hongjun, Zhong Jiawen, Song Jinze. Study on the wake interference and dynamic evolution characteristics of the fluid-structure interaction of three tandem circular cylinders. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(4): 1178-1186 (in Chinese))
- 22 Jiang H, Cheng L, Draper S, et al. Three-dimensional direct numerical simulation of wake transitions of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2016, 801: 353-391
- 23 吕振, 张伟伟, 寇家庆. 亚临界雷诺数圆柱涡致振动的实验研究. *空气动力学学报*, 2021, 39: 1-7 ((Lyu Zhen, Zhang Weiwei, Kou Jiaqing, Experiments on vortex-induced vibration of a cylinder at sub-critical Reynolds numbers, *Acta Aerodynamica Sinica*, 2021, 39: 1-7 (in Chinese))
- 24 Chen T, Guestrin C. XGBoost: a scalable tree boosting system//Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2016: 785-794
- 25 Fan J, Wang X, Wu L, et al. Comparison of support vector machine and extreme gradient boosting for predicting daily global solar radiation using temperature and precipitation in humid subtropical climates: A case study in china. *Energy Conversion and Management*, 2018, 164: 102-111
- 26 Lundberg SM, Lee S-I. A unified approach to interpreting model predictions//Advances in Neural Information Processing Systems. Curran Associates Inc, 2017
- 27 Bergstra J, Bardenet R, Bengio Y, et al. Algorithms for hyper-parameter optimization//Advances in Neural Information Processing Systems. Curran Associates Inc, 2011
- 28 Lekkala MR, Latheef M, Jung JH, et al. Recent advances in understanding the flow over bluff bodies with different geometries at moderate reynolds numbers. *Ocean Engineering*, 2022, 261: 111611
- 29 Zhu H, Zhong J, Liu B. Fluid-thermal-structure interaction of three heated circular cylinders in tandem at a low reynolds number of 150. *Physics of Fluids*, 2022, 34(8): 083605
- 30 Bearman PW. Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1984, 16: 195-222