

El、Scopus 收录 中文核心期刊

# 考虑随机场载荷不确定性的连续体结构可靠性拓扑优化

程长征, 王军基, 王 选, 杨 博

RELIABILITY-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURES CONSIDERING RANDOM FIELD LOAD UNCERTAINTY

Cheng Changzheng, Wang Junji, Wang Xuan, and Yang Bo

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-24-425

# 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

# 考虑有界场的几何不确定性非概率可靠性拓扑优化

NON–PROBABILITY RELIABILITY–BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION AGAINST GEOMETRIC UNCERTAINTY WITH A BOUNDED FIELD MODEL

力学学报. 2023, 55(9): 2056-2067

# 基于响应面方法的破损安全结构可靠性拓扑优化

RELIABILITY-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FAIL-SAFE STRUCTURES USING RESPONSE SURFACE METHOD 力学学报. 2023, 55(5): 1206-1216

# 载荷方向不确定条件下结构动态稳健性拓扑优化设计

ROBUST DYNAMIC TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURE SUBJECTED TO HARMONIC EXCITATION WITH LOADING DIRECTION UNCERTAINTY

力学学报. 2023, 55(11): 2588-2598

# 载荷作用位置不确定条件下结构动态稳健性拓扑优化设计

ROBUST DYNAMIC TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURE SUBJECTED TO HARMONIC EXCITATION OF LOADING POSITION UNCERTAINTY

力学学报. 2021, 53(5): 1439-1448

# 考虑表面层厚度不确定的稳健性拓扑优化方法

ROBUST TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES CONSIDERING THE UNCERTAINTY OF SURFACE LAYER THICKNESS

力学学报. 2021, 53(5): 1471-1479

# 基于侵入混沌多项式法的随机多孔介质内顺磁性流体热磁对流不确定度量化

UNCERTAINTY QUANTIFICATION FOR THERMOMAGNETIC CONVECTION OF PARAMAGNETIC FLUID IN RANDOM POROUS MEDIA BASED ON INTRUSIVE POLYNOMIAL CHAOS METHOD

力学学报. 2022, 54(1): 106-118



关注微信公众号,获得更多资讯信息

生物、工程及交叉力学

# 考虑随机场载荷不确定性的连续体结构可靠性 拓扑优化<sup>1)</sup>

程长征\* 王军基\* 王 选\*,<sup>†,2)</sup> 杨 博\*

\*(合肥工业大学工程力学系,合肥 230009) \*(大连理工大学工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室,辽宁大连 116024)

摘要 提出了一种基于多项式混沌展开 (polynomial chaos expansions, PCE) 代理模型的高效可靠性拓扑优化 (reliability-based topology optimization, RBTO) 方法, 用于处理考虑随机场载荷不确定性的可靠性设计问题.为此, 建立了基于柔度响应定义的概率约束下的结构体积分数最小化的单层循环 RBTO 模型, 采用 Karhunen-Loève (K-L) 展开式描述载荷随机场, 利用蒙特卡罗模拟计算结构的失效概率. 为了克服蒙特卡罗模拟方法在计算结构响应时计算成本高昂的问题, 引入了 PCE 作为代理模型, 高效地捕捉随机场载荷与结构柔度之间的复杂非线性关系. 通过少量的高精度有限元分析样本, 可以构建出高精度的 PCE 代理模型, 一旦构建好代理模型的显式表达式, 就可以直接基于代理模型在随机样本处计算失效概率, 后续无需再进行有限元分析, 从而在不牺牲太多精度的情况下, 大幅减少后续计算的时间成本. 详细推导了概率约束函数关于设计变量的灵敏度, 采用移动渐近线方法 (method of moving asymptotes, MMA) 求解优化问题, 将基于分析模型的 RBTO 方法与基于代理模型的 RBTO 方法作对比, 验证了所提方法的有效性和优越性, 并通过 4 个数值算例讨论了失效概率限值、柔度限值、载荷随机场均值与标准差以及相关长度对优化结果的影响. 结果表明, 不确定性因素增强时, 结构需要消耗更多的材料率抵抗不确定性因素的干扰, 另外基于代理模型的 RBTO 方法相对于基于分析模型的 RBTO 计算时间大幅缩短, 提高了优化效率.

关键词 拓扑优化,随机场,载荷不确定性,可靠性拓扑优化,多项式混沌展开

中图分类号: O343 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-24-425 CSTR: 32045.14.0459-1879-24-425

# RELIABILITY-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURES CONSIDERING RANDOM FIELD LOAD UNCERTAINTY<sup>1)</sup>

Cheng Changzheng \* Wang Junji \* Wang Xuan \*, <sup>†, 2)</sup> Yang Bo \*

 \* (Department of Engineering Mechanics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)
 <sup>†</sup> (State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

引用格式:程长征,王军基,王选,杨博.考虑随机场载荷不确定性的连续体结构可靠性拓扑优化.力学学报,2025,57(2):535-544 Cheng Changzheng, Wang Junji, Wang Xuan, Yang Bo. Reliability-based topology optimization of continuum structures considering random field load uncertainty. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(2): 535-544

<sup>2024-09-02</sup> 收稿, 2024-12-28 录用, 2024-12-31 网络版发表.

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金(12172114, 12202129), 安徽省杰出青年科学基金(2208085J25)和大连理工大学工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国 重点实验室开放课题(GZ23105)资助项目.

<sup>2)</sup> 通讯作者: 王选, 副教授, 主要研究方向为结构与多学科优化. E-mail: xuanwang@hfut.edu.cn

This paper proposes an efficient reliability-based topology optimization (RBTO) method based on the Abstract polynomial chaos expansions (PCE) surrogate model to address design problems considering random field load uncertainty. To this end, a single-loop RBTO model is established to minimize the structural volume fraction under probabilistic constraint defined by compliance response. The Karhunen-Loève (K-L) expansion is utilized to characterize the random field of loads, while Monte Carlo simulation is employed to estimate the probability of structural failure. In order to mitigate the substantial computational demands of Monte Carlo Simulation method in calculating structural response. the PCE is implemented as a surrogate model, effectively capturing the intricate nonlinear relationship between random field loads and structural compliance. A high-precision PCE surrogate model can be constructed using a limited number of high-fidelity finite element analysis samples, Once the explicit expression of the surrogate model is constructed, the failure probability can be directly calculated at random samples based on the surrogate model, without the need for further finite element analysis, thereby significantly reducing computational time without compromising accuracy. The sensitivity of the probabilistic constraint function with respect to design variables is thoroughly derived, and the optimization problem is addressed using the method of moving asymptotes (MMA). The efficacy and superiority of the proposed surrogate model-based RBTO method are validated through comparisons with an analytical model-based RBTO approach. In addition, the effects of failure probability thresholds, compliance limits, mean and standard deviations of load random fields, and correlation lengths on the optimization outcomes was discussed through four numerical examples. The results indicate that when uncertainty factors increase, the structure needs to consume more materials to resist the interference of uncertainty factors. In the bargain, the surrogate model-based RBTO method significantly reduces the computation time and improves the optimization efficiency compared to the analytical modelbased RBTO approach.

**Key words** topology optimization, random field, load uncertainty, reliability-based topology optimization, polynomial chaos expansion

# 引 言

拓扑优化 (topology optimization, TO), 作为一种 高效的设计手段,在结构工程领域得到了广泛应用. 近年来,随着增材制造技术的飞速进步,TO更是成 为了实现复杂结构设计的强大工具. 然而, 值得注意 的是,当前大多数 TO 研究均基于确定性条件进行, 但在实际结构设计中,载荷、材料特性及边界条件 等因素往往蕴含着不确定性[1].这些不确定性因素 可能严重损害结构的性能表现,因此,对不确定性的 有效处理变得尤为重要.为应对这一挑战,鲁棒拓扑 优化 (robust topology optimization, RTO) 与基于可靠 性的拓扑优化 (reliability-based topology optimization, RBTO) 应运而生, 成为量化 TO 中不确定性的两种 关键方法. RTO 方法一般以所考虑的目标性能的均 值与标准差的加权最小化为目标函数,在保持设计 性能的同时增强其稳健性<sup>[2-4]</sup>. 而 RBTO 将传统的确 定性约束条件转化为概率约束,并在这些约束中融 入不确定参数,核心目标在于严格控制发生失效事 件的概率,以确保结构的整体可靠性<sup>[5]</sup>.本文聚焦于 可靠性拓扑优化,深入探讨其在处理结构设计中不确定性因素方面的独特优势.

RBTO 是结构拓扑优化领域的一个重要研究方 向,近年来引起越来越多的关注. Kharmanda 等<sup>[5]</sup>将 可靠性分析整合到 TO 问题中, 提出了 RBTO 设计 的概念. Jung 等<sup>[6]</sup> 提出了一种基于可靠性的三维 Mindlin 板结构拓扑优化方法. Maute 等[7] 提出了一 种通过拓扑优化设计微机电系统的方法.罗阳军等[8] 提出了以结构体积最小化为目标、具有位移非概 率可靠性约束的三维连续体 TO 数学模型. Zheng 等<sup>[9]</sup> 提出了一种新的基于非概率可靠性的拓扑优化方 法. Luo 等<sup>[10]</sup> 提出了一种在载荷和材料不确定性下 解决应力约束 TO 问题的有效方法. Silva 等[11] 采用 单循环方法的一种变体来执行 RBTO. Yin 等<sup>[12]</sup> 提 出了一种新的 RBTO 方法, 用于基于模糊集模型的 不确定结构设计. Mahmoud 等<sup>[13]</sup> 提出了一种适用 于 RBTO 的新型序贯 TO 与可靠性分析方法. Xian 等[14] 针对非平稳地震激励下耗能结构黏弹性阻尼 器的布置问题,提出了一种有效的 RBTO 框架. Behrooz 等[15] 开发了一种用于可靠性回路的鲁棒迭代公式

的混合 RBTO 方法. Xing 等<sup>[16]</sup>使用一个隐藏层神经 网络和基于梯度与非梯度的可靠性量化来加速双循 环 RBTO. Cheng 等<sup>[17]</sup>发展了一种基于应力约束的 非概率可靠性多材料 TO 新方法. Nguyen 等<sup>[18]</sup>提出 了一种基于系统可靠性的 TO 的单回路算法. Zheng 等<sup>[19]</sup>提出了一种将双环优化等效解耦为一个序贯 过程的高效 RBTO 方法. Muayad 等<sup>[20]</sup>提出一种将 可靠性设计应用于热弹性结构 TO 的计算方法. Zhan 等<sup>[21]</sup>提出了一种分布载荷不确定性下的非概率 RBTO 方法. Steffen 等<sup>[22]</sup>提出了一种考虑不确定载 荷和不确定材料参数的 TO 方法. 王选等<sup>[23]</sup>针对载 荷不确定性下破损-安全结构的设计问题提出了一 种有效的基于响应面的 RBTO 方法.

可以看出上述工作中所探讨的随机参数均被视 为随机变量处理. 然而, 在实际工程结构中, 常常会 遇到一些与空间位置密切相关的属性, 诸如非均匀 分布的载荷以及随空间位置变化而异的材料性能参 数等. 这些不确定性的参数, 采用随机场模型来描述, 能够更为精确且合理地反映其空间变异性特征. 随 机场给 RBTO 问题带来了更多的挑战性. Jalalpour 等<sup>[24]</sup>提出了一种针对考虑材料随机场的结构的连 续体域 RBTO 计算方法. 战俊杰等<sup>[25]</sup>基于非概率有 界场模型提出了一种针对考虑厚度随机场的结构的 非概率 RBTO 模型. 刘培硕等<sup>[26]</sup>研究了针对考虑材 料随机场的结构的连续体结构可靠度拓扑优化问 题. Keshavarzzadeh 等<sup>[27]</sup>针对考虑载荷随机场的结 构路

可以看出以上工作都是基于逼近的分析方法通 过迭代进行可靠性分析,与上述工作不同,本文提出 一种基于抽样方法的可靠性拓扑优化方法,用于处 理考虑随机场载荷不确定性的连续体结构可靠性设 计问题.本文方法不需要通过迭代进行可靠性分析, 而是采用基于蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo simulateon, MCS)的抽样方法来直接计算失效概率.同时, 为有效解决传统抽样方法中因频繁执行大规模有限 元分析 (finite element analysis, FEA)所带来的时间 成本高昂问题,本文构建了基于多项式混沌展开 (polynomial chaos expansion, PCE)的代理模型来计 算失效概率,通过少量的高精度有限元分析样本,构 建出高精度的 PCE 代理模型,在不牺牲过多精度的 情况下,大幅减少可靠性分析的时间成本,进而提高 可靠性拓扑优化方法的计算效率.

#### 1 确定性拓扑优化列式

在本文中,用 solid isotropic material with penalization (SIMP) 方法来求解拓扑优化问题, SIMP 方法 为每一个单元赋予一个伪密度变量 $\rho_e$ ,通过伪密度 变量来插值计算每个单元的弹性模量,从而反映不 同单元在整体结构中的贡献程度.这种插值方式能 够根据优化目标和约束要求来调整各单元的密度分 布,进而实现结构的拓扑优化.

为了防止 SIMP 方法实施过程中出现棋盘格现 象与网格依赖性,采用密度过滤的方法对单元密度  $\rho_e$ 进行过滤,表达式为

$$\tilde{\rho}_e = \frac{1}{\sum_{i \in \mathbb{N}_e} w(\mathbf{x}_i)} \sum_{i \in \mathbb{N}_e} w(\mathbf{x}_i) \rho_i \tag{1}$$

式中,  $\tilde{\rho}_e$  表示过滤后的物理密度,  $\mathbb{N}_e$  表示所有到单元 e 中心的距离小于过滤半径  $r_{\min}$  的单元集合, w(x) 为加权函数, 表达式为

$$w(\mathbf{x}_i) = \max(0, r_{\min} - ||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e||)$$
 (2)

式中, *x<sub>e</sub>*和 *x<sub>i</sub>*分别表示单元 *e*和单元 *i*的中心坐标. 在此基础上,弹性模量的插值模型可表示为

$$E_e = E_{\min} + \tilde{\rho}_e^p (E_0 - E_{\min}) \tag{3}$$

式中, *E*<sub>min</sub> 是为了防止刚度矩阵奇异而引入的微小参数, *p* 是惩罚因子, *E*<sub>0</sub> 表示实体材料的弹性模量.

#### 2 考虑随机场载荷不确定性拓扑优化列式

#### 2.1 随机场载荷不确定性建模

在本文中,采用随机场来描述载荷的不确定性. 随机场作为一种强大的数学工具,能够有效地刻画 载荷在空间中的随机波动特性.通过引入随机场,能 够更加真实地模拟实际工程问题中载荷的复杂变 化,从而得到更加可靠和准确的优化结果.

为了具体描述随机场,将施加随机载荷的空间 域 $\Omega_x$ 离散为一系列观察点 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $y_i$ 表 示与单元节点一一对应的观察点的坐标矢量, n表 示观察点个数,采用 Karhunen-Loève (K-L)展开式<sup>[28]</sup> 以级数形式表示载荷随机场,表达式为

$$F(Y,\omega) = \mu(Y) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i \xi_i(\omega)$$
(4)

其中,ω表示样本空间Θ中的一个随机样本,μ(Y)表

示载荷随机场的均值矢量,当随机场为高斯场时, {*ξ*<sub>i</sub>}表示相互独立的标准正态随机变量,*λ*<sub>i</sub>和*φ*<sub>i</sub>分别 表示协方差矩阵 *C*的特征值和特征向量,协方差矩 阵 *C*表示为

$$C = \begin{bmatrix} C(y_1, y_1) & C(y_1, y_2) & \cdots & C(y_1, y_n) \\ C(y_2, y_1) & C(y_2, y_2) & \cdots & C(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(y_n, y_1) & C(y_n, y_2) & \cdots & C(y_n, y_n) \end{bmatrix}$$
(5)

式中, *C*(*y<sub>i</sub>*,*y<sub>j</sub>*)表示描述高斯场中任意两个观察点间 相关性的相关函数,表达式为

$$C(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \sigma(\mathbf{y}_i)\sigma(\mathbf{y}_j)\exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|^2}{l_c^2}\right)$$
(6)

其中, σ(·) 表示标准差, *l*<sub>c</sub> 表示相关长度.为了实际计算的需要,通常采用截断的 K-L 展开来刻画随机场

$$\hat{F}(Y,\omega) = \mu(Y) + \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i \xi_i(\omega)$$
(7)

其中, *m* 为截断项数, 特征值按λ<sub>1</sub> > λ<sub>2</sub> > ··· > λ<sub>m</sub> 排序.

#### 2.2 可靠性拓扑优化模型

本文考虑载荷随机场不确定性,基于柔度响应 建立度量结构可靠性的状态函数,建立可靠性约束 下体积最小化可靠性拓扑优化模型如下

find: 
$$\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{N_e})$$
  
min:  $V_{\rm f} = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\rho}_e v_e}{\sum_{e=1}^{N_e} v_e}$   
s.t.  $\begin{cases} P_{\rm f} = P[g(\rho, \xi) = C - C^{\rm t} > 0] \leq P_{\rm f}^{\rm t} \\ KU = F \\ C = F^{\rm T} U \\ 0 \leq \rho_e \leq 1 \end{cases}$ 
(8)

式中, $\rho$ 表示由所有设计变量组成的向量, $V_f$ 表示目标函数,定义为结构相对于初始体积的体积分数, $N_e$ 表示用来实施结构响应分析的有限单元个数.  $g=C-C^t$ 为度量结构可靠性的极限状态函数,其中 C为结构的柔度, $C^t$ 为柔度限值.g>0表示结构失效. 效. $P_f$ 表示当前结构的失效概率,约束结构的失效概 率 $P_f$ 不超过指定的失效概率 $P_f$ .K,U和F分别表示 总体刚度矩阵、位移矢量及载荷矢量, $\xi$ 是由刻画载 荷随机场的随机变量 { $\xi_i$ } 组成.

采用 MCS 计算结构失效概率  $P_f = P[g(\tilde{\rho}, \xi) > 0]$ ,

表达式为

报

$$P_{\rm f} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} I[g(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\xi}_i)] \tag{9}$$

式中, k 表示 MCS 的随机样本总数, I(g) 表示失效指标函数, 表达式为

$$I(g) = \begin{cases} 1, & g > 0\\ 0, & g \le 0 \end{cases}$$
(10)

考虑到失效指标函数的不连续性<sup>[29]</sup>,为了便 于求导,采用可导的函数 *Ĩ*(g)来逼近失效指标函数 *I*(g)<sup>[27,30-31]</sup>,表达式为

$$\tilde{I}(g) = \frac{1}{2} \left[ \tanh\left(\frac{g}{\varepsilon}\right) + 1 \right]$$
(11)

式中, ε 是表征函数逼近程度的控制参数.

#### 2.3 基于 PCE 代理模型的可靠性分析

在结构可靠性分析的过程中,蒙特卡罗模拟方 法虽能有效计算失效概率,但其计算成本随着样本 量的增加而增加,计算量过于庞大.因为 k 次蒙特卡 罗模拟就需要实施 k 次有限元分析计算结构响应. 因此对于复杂工程结构的可靠性分析,蒙特卡罗模 拟方法的计算量往往难以承受.为了降低计算成本, 本文采用 PCE 构建计算结构柔度响应 C 的代理模 型 CPCE,表达式为

$$C_{\text{PCE}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi})$$
(12)

式中,  $c_i$  表示 PCE 系数,  $\Psi_i(\boldsymbol{\xi})$  表示 PCE 基函数, 若 输入随机变量为高斯随机变量,可采用埃尔米特 (Hermit) 多项式构造 PCE 基函数, 表达式为

$$\Psi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m) = H_{\alpha_1}(\xi_1)H_{\alpha_2}(\xi_2)\cdots H_{\alpha_m}(\xi_m)$$
(13)

式中, *H*<sub>α<sub>i</sub></sub>(ξ<sub>i</sub>)表示单变量埃尔米特多项式, α<sub>i</sub>表示埃 尔米特多项式的次数.为了便于实际计算,将式 (12)截断为有限项

$$C_{\text{PCE}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{N_{\text{p}}} c_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi})$$
(14)

式中, Np 表示 PCE 的截断项数, 可通过式 (15) 计算

$$N_{\rm p} + 1 = \frac{(m + p_{\rm PCE})!}{m! p_{\rm PCE}!}$$
(15)

式中, pPCE 表示 PCE 基的次数, 由埃尔米特多项式

次数累加获得, 即  $p_{PCE} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ .

采用非侵入式伪谱方法, PCE 的系数 c<sub>i</sub> 近似表示为

$$c_i = \frac{1}{E(\Psi_i^2)} \sum_{q=1}^{n_q} w_g^{(q)} C(\boldsymbol{\xi}^{(q)}) \Psi_i(\boldsymbol{\xi}^{(q)})$$
(16)

式中,  $E(\cdot)$ 表示数学期望,  $\xi^{(q)} = (\xi_1^{(q)}, \xi_2^{(q)}, \dots, \xi_m^{(q)})$ 和  $w_s^{(q)}$ 分别表示积分点和这些积分点在概率空间中的 权重,  $n_q$ 表示积分点的个数.  $C(\xi^{(q)})$ 表示在第 q个积 分点处通过有限元分析计算得到的柔度.

在此基础上,可定义度量结构可靠性的极限状态函数 g 的代理模型函数 gPCE 为

$$g_{\rm PCE} = C_{\rm PCE} - C^{\rm t} \tag{17}$$

需要注意的是, 在本文基于 PCE 代理模型的可 靠性分析方法中, gPCE 将代替式 (9) ~ 式 (11) 中的 g 参入结构的失效概率的计算.

可以看出,由于 PCE 基函数并未涉及有限元计 算,构建代理模型 C<sub>PCE</sub> 的计算代价主要在于 PCE 系 数的计算,而每个 PCE 系数只需要进行 n<sub>q</sub> 次有限元 分析计算结构柔度响应.一旦构建好代理模型的显 式表达式后,就可以直接基于代理模型在随机样本 处计算失效概率,无需进行有限元分析.而使用传统 的 MCS 方法计算失效概率, k 个随机样本意味着 k 次蒙特卡罗模拟,即 k 次有限元计算结构响应.且 一般情况下 n<sub>q</sub> ≪ k,因此相较于利用分析模型计算 结构柔度响应,确定失效概率,基于代理模型方法可 在不损失过多精度的前提下大幅降低计算成本.

### 3 灵敏度分析

本节详细推导分析模型和 PCE 代理模型下失效概率对设计变量的导数信息,以便对比分析模型 与 PCE 代理模型下可靠性拓扑优化的性能差异.

根据式 (9) ~ 式 (11), 失效概率关于设计变量的 导数  $\partial P_f / \partial \rho_e$  可由链式法则推导为

$$\frac{\partial P_{\rm f}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial P_{\rm f}}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial \tilde{\rho}_e} \frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \rho_e} = \frac{1}{2k\varepsilon} \sum_{i=1}^k \frac{\partial C}{\partial \tilde{\rho}_e} \frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \rho_e} \left[ 1 - \tanh^2 \left(\frac{g}{\varepsilon}\right) \right]$$
(18)

#### **3.1** 分析模型下柔顺度 C 对物理密度 $\tilde{\rho}_e$ 的导数

分析模型下柔顺度 C 对物理密度  $\tilde{\rho}_e$  的导数, 即

式(18)中导数项 *∂C*/*ðρ*<sub>e</sub>,可由伴随法推导.通过引入 可人为规定的伴随向量 *λ*来构造等价于柔顺度 *C* 的 增广拉格朗日函数,表达式如下

$$L = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{U})$$
(19)

式(19)两边对 pe 求导可得

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\rho}_e} = (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}) \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \tilde{\rho}_e} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \tilde{\rho}_e} \boldsymbol{U}$$
(20)

为了消除未知导数项 $\partial U/\partial \tilde{\rho}_e$ ,伴随向量 $\lambda$ 取伴随式  $F^{T} = \lambda^{T} K$ 的解 U,即 $\lambda = U$ ,则导数项 $\partial C/\partial \tilde{\rho}_e$ 表示为

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{\rho}_e} = \frac{\partial L}{\partial \tilde{\rho}_e} = -U^{\mathrm{T}} \frac{\partial K}{\partial \tilde{\rho}_e} U = -p(E_0 - E_{\mathrm{min}})^{p-1} u_e^{\mathrm{T}} k_0 u_e$$
(21)

式中, *u<sub>e</sub>* 和 *k*<sub>0</sub> 分别表示单元 *e* 的位移矢量与单元刚 度矩阵.

式(18)中导数项 ∂pe/∂pe 可由式(1) 求导得到

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_e}{\partial \rho_e} = \frac{w(\boldsymbol{x}_e)}{\sum_{i \in \mathbb{N}_e} w(\boldsymbol{x}_i)}$$
(22)

#### **3.2** PCE 模型下柔顺度 $C_{PCE}$ 对物理密度 $\tilde{\rho}_e$ 的导数

在 PCE 代理模型下,采用  $g_{PCE}$  和  $C_{PCE}$  分别代 替 g 和 C 进行结构失效概率与柔顺度的计算.此时, 式 (18) 中导数项  $\partial C/\partial \tilde{\rho}_e$  变成了  $\partial C_{PCE}/\partial \tilde{\rho}_e$ ,同样利 用链式法则推导失效概率对设计变量的导数  $\partial P_f/\partial \rho_e$ ,结果同式 (18).根据式 (14),导数项  $\partial C_{PCE}/\partial \tilde{\rho}_e$  可表示为

$$\frac{\partial C_{\text{PCE}}}{\partial \tilde{\rho}_e} = \sum_{i=0}^{N_p} \frac{\partial c_i}{\partial \tilde{\rho}_e} \Psi_i(\boldsymbol{\xi})$$
(23)

导数项 ∂c<sub>i</sub>/∂p̃e 可由式 (16) 获得

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tilde{\rho}_e} = \frac{1}{E(\Psi_i^2)} \sum_{q=1}^{n_q} w_g^{(q)} \frac{\partial C(\boldsymbol{\xi}^{(q)})}{\partial \tilde{\rho}_e} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}^{(q)})$$
(24)

而导数项  $\partial C(\boldsymbol{\xi}^{(q)}) / \partial \tilde{\rho}_e$  同式 (21).

#### 3.3 失效概率的修正处理

本文利用移动渐近线法<sup>[32]</sup>求解拓扑优化问题. 在迭代过程中整个样本空间中的柔度可能出现始终 小于柔度限值 C<sup>t</sup> 的情况,这会导致失效概率 P<sub>f</sub> 以及 失效概率对设计变量导数  $\partial P_f / \partial \rho_e$  为 0, 从而使迭代 终止<sup>[27,29-30]</sup>. 为了改善这一问题, 受文献 [30] 启发, 对失效概率 Pf 进行如下修正处理

$$\tilde{P}_{f} = \begin{cases} P_{f} + c_{P_{f}} \left( \frac{C_{1} - C^{t}}{C^{t}} \right)^{2}, & C^{t} < C_{1} \\ P_{f}, & C_{1} < C^{t} < C_{2} \\ P_{f} - c_{P_{f}} \left( \frac{C_{2} - C^{t}}{C^{t}} \right)^{2}, & C_{2} < C^{t} \end{cases}$$
(25)

相应的失效概率关于设计变量的导数  $\partial P_{\rm f} / \partial \rho_e$  可表示如下

$$\frac{\partial \tilde{P}_{f}}{\partial \rho_{e}} = \begin{cases} \frac{\partial P_{f}}{\partial \rho_{e}} + \frac{2c_{P_{f}}}{C^{t}} \frac{\partial C_{1}}{\partial \rho_{e}} \frac{C_{1} - C^{t}}{C^{t}}, & C^{t} < C_{1} \\ \frac{\partial P_{f}}{\partial \rho_{e}}, & C_{1} < C^{t} < C_{2} \\ \frac{\partial P_{f}}{\partial \rho_{e}} - \frac{2c_{P_{f}}}{C^{t}} \frac{\partial C_{2}}{\partial \rho_{e}} \frac{C_{2} - C^{t}}{C^{t}}, & C_{2} < C^{t} \end{cases}$$
(26)

在式 (25) 以及式 (26) 中, *c*<sub>Pf</sub> 是自定义的常数, *C*<sub>1</sub> = min{*C*} 以及*C*<sub>2</sub> = max{*C*} 分别表示样本空间中 柔度的最小值和最大值.

在获取了目标函数及约束函数的灵敏度数据 后,本文运用梯度导向的移动渐近线方法 (method of moving asymptotes, MMA) 来求解优化问题, 到达最 大迭代步数优化过程停止迭代.

#### 4 数值算例

本节以 4 个数值算例来验证所提出方法的有效 性. 若无特别说明,本文取值  $E_{min} = 1.0 \times 10^{-3}$ ,过 滤半径  $r_{min} = 2 \text{ mm}$ , p = 3,结构厚度为 1 mm,单元 密度初始值取  $\rho_e = 0.5$ ,材料的弹性模量取  $E = 2.0 \times$  $10^5$  GPa, 泊松比取 0.3, MCS 的样本数 k = 10000,载 荷随机场截断项数 m = 3, PCE 基的次数  $p_{PCE} = 3$ ,用 于计算 PCE 系数的积分点个数  $n_q = 39$ ,  $\varepsilon = 0.01$ std(C),  $c_{P_f} = 5$ ,最大迭代步数为 500.

#### 4.1 悬臂梁

几何尺寸为100 mm×50 mm 悬臂梁结构的设计 域如图 1 所示,结构左端固定,距离右端75 mm 范 围内的底边区域受随机场载荷作用,结构的下边界 区域包含2 mm (2 层单元)厚度的不可设计域(如图 1 黑色阴影部分所示).设计域由100×50个四节点四 边形单元离散.柔度限值设置为0.1 J.本算例对比确 定性拓扑优化(deterministic topology optimization, DTO)与 RBTO 的差别.在DTO 框架下,所施加的 载荷设定为密度为5 N/mm<sup>2</sup> 的均布载荷.在RBTO 设计中,载荷建模为遵循正态分布的随机场,相关长度  $l_c = 100 \text{ mm}$ ,其均值与标准差分别设定为 5 N 和 0.2 N,且指定的失效概率限值  $P_f^t = 0.001$ .

图 2 展示了不考虑载荷不确定性的 DTO 结果, DTO 设计是基于柔度约束下体积最小化优化模型 计算的,最终结构体积分数为 13.73%.为了显示载 荷不确定性对结构设计的影响,将 DTO 结果与基于 分析模型下 RBTO 结果以及基于 PCE 模型的 RBTO 结果作对比.图 3 和图 4 分别给出了基于分析模型 和 PCE 模型的 RBTO 的优化结果.表 1 显示了基于 分析模型和 PCE 模型的 RBTO 设计每个迭代步平 均计算时间和结构最终的体积分数.





图 4 基于 PCE 模型的可靠性拓扑优化设计 Fig. 4 RBTO design based on PCE model

表1	不同方法下悬臂梁的优化结果	

Table 1 Optimization results of cantilever beam under different methods

Methods	t/s	V <sub>f</sub> /%		
FEA	486.6	38.94		
PCE	6.7	35.96		

对比图 2~图 4 可知, DTO 设计与 RBTO 设计 的拓扑构型存在显著差异. RBTO 设计相较于 DTO 设计具有更粗的分支、以及更为复杂的拓扑结构, 可有效抵抗不确定性因素对结构造成的影响, DTO 设计与 RBTO 设计之间的差异说明了载荷不确定性 对结构设计的影响是不可忽略的.

基于分析模型与基于 PCE 模型的 RBTO 设计 的拓扑构型差异较小, 二者的最终体积分数也相近, 分别为 38.94% 和 35.96%. 然而基于 PCE 模型的 RBTO 优化设计相较于基于分析模型的 RBTO 优化 设计而言, 计算时间大幅缩短.

图 5显示了基于 PCE 模型的 RBTO 设计方法的体积分数与失效概率的迭代历史.可以看出,本文方法迭代过程稳定,体积分数与失效概率均实现了较快收敛.





#### 4.2 L型梁

L型梁的设计域如图 6 所示, 左上端固支, 随机场载荷作用在距离右端 55 mm 范围内的右上端区域, 同时随机场载荷作用区域包含 2 mm (2 个单元)厚度的不可设计域 (如图 6 阴影部分所示). 设计域由 6400 个四节点四边形单元离散. 柔度限值设置为 0.11 J. 在 DTO 框架下, 所施加的载荷设定为密度为4 N/mm<sup>2</sup> 的均布载荷. 在 RBTO 设计中, 载荷建模

为遵循正态分布的随机场,相关长度 lc = 100 mm,其均值和标准差分别设定为 4 N 和 0.2 N.

为了研究失效概率限值对优化结果的影响,选 取了3个不同的失效概率限值,分别为0.001, 0.02以及0.15,图7展示了DTO设计及3种不同失 效概率限值下基于 PCE 模型获得的 RBTO设计结 果,对应的体积分数分别为12.84%,42.96%, 30.34%和19.65%.对比优化结果可知,结构的体积 分数随着失效概率限值的降低而逐渐增加,这意味 着提高结构的可靠性水平需要更多的材料来抵抗不 确定因素的影响.

为了研究随机场载荷的标准差对优化结果的影响,选取了3个不同的标准差,分别为0.2,0.3以及



Fig. 7 DTO design and RBTO designs under different failure probability limits

0.4 N,此时载荷均值和失效概率限值分别设置为 2 N和 0.02,载荷随机场相关长度 *l*<sub>c</sub> = 100 mm. 图 8 显示了 3 个不同标准差下基于 PCE 模型获得的 RBTO 设计结果,对应的体积分数分别为 20.82%, 30.50%和 50.96%.对比优化结果可知,随着标准差 的增加,体积分数也随之增加,结构的拓扑构型变得 更为复杂.更大的标准差意味着更大的不确定性,说 明结构需要更多的材料来抵抗不确定因素的干扰.



deviations

#### 4.3 简支梁

几何尺寸为120 mm×60 mm 的简支梁设计域如 图 9 所示,结构的左下角完全固定,右下角固定竖直 方向的位移,随机场载荷作用在上边界区域,结构的 上边界区域包含 2 mm (2 层单元)厚度的不可设计 域 (如图 9 阴影部分所示).设计域由120×60 个四节 点四边形单元离散.失效概率限值设置为 0.01.在 DTO 框架下,所施加的载荷设定为密度为2.5 N/mm<sup>2</sup> 的均布载荷.在 RBTO 设计中,载荷建模为遵循正态 分布的随机场,相关长度 *l*<sub>c</sub> = 100 mm,其均值和标准 差分别设定为 2.5 N 和 0.2 N.

为了研究柔度限值对优化结果的影响,选取了 3 个不同的柔度限值,分别为2.5×10<sup>-2</sup>,5.5×10<sup>-2</sup>以 及8.5×10<sup>-2</sup> J. 图 10 展示了 3 种不同柔度限值下的 DTO 设计,及基于 PCE 模型获得的 RBTO 设计结 果.表 2 显示了对应的体积分数.

分析优化结果可知,随着柔度限值的减小,DTO

设计和 RBTO 设计的结构的体积分数均逐渐增大, 意味着结构刚度也逐渐增大.另外, DTO 设计和 RBTO 设计之间拓扑也有明显差异,说明考虑载荷 随机场不确定性的必要性.



图 9 简支梁结构示意图

Fig. 9 Schematic diagram of simply supported beam structure



图 10 不同柔度限值下 DTO 及 RBTO 设计

Fig. 10 DTO and RBTO designs under different compliance limits

#### 表 2 不同柔度限值下简支梁的优化结果

 
 Table 2
 Optimization results of simply supported beam under different compliance limits

$C^{\mathrm{t}}/\mathrm{J}$	Method	V <sub>f</sub> /%
2.5 10-2	DTO	11.82
2.5 × 10 -	RBTO	45.98
5.5 10-2	DTO	8.72
5.5 × 10 -	RBTO	22.15
0.5 10-2	DTO	7.57
8.5 × 10 -	RBTO	17.39

为了研究随机场载荷相关长度对优化结果的影响,选取了3个不同的相关长度,分别为60,90以及120mm,此时柔度限值和失效概率限值分别设置为3.0×10<sup>-2</sup>J和0.01.随机场载荷均值和标准差分别设置为2.5N以及0.2N.图11显示了3个不同相关长度下基于PCE模型获得的RBTO设计结果,对应的体积分数分别为34.21%,36.29%和37.40%.对比优化结果可知,随着相关长度的增加,体积分数也随之增加,结构的分支更为粗大.更大的相关长度意味着更大的不确定性,这说明结构需要更多的材料来抵抗不确定因素的干扰.



#### 4.4 三维悬臂梁

几何尺寸为100 mm×50 mm×4 mm 悬臂梁结构 的设计域如图 12 所示,结构左端固定,距离右端 75 mm 范围内75 mm×4 mm 的底边区域(图 12 底边 阴影部分)受随机场载荷作用,设计域由100×50×4 个四节点四边形单元离散.柔度限值设置为0.1 J. 在 RBTO 设计中,载荷建模为遵循正态分布的随机 场,相关长度 $l_c = 100$  mm,其均值与标准差分别设定 为1N和0.1 N,指定的失效概率限值 $P_f^t = 0.005$ .



为了研究随机场载荷的均值对优化结果的影响,选取了 2 个不同的均值,分别为 1 N 和 1.4 N. 图 13 展示了 2 种不同随机场载荷均值下的基于 PCE 模型获得的 RBTO 设计结果. 对应的体积分数分别 26.90% 和 30.65%. 分析优化结果可知,随着载荷均 值的增大,结构的体积分数逐渐增大.



图 13 不同载荷均值下 RBTO 设计 Fig. 13 RBTO design under different load mean values

# 5 结论

本文提出了一种考虑随机场载荷不确定性的单循环 RBTO 方法,利用 K-L 展开式描述随机场载荷的不确定性,通过少量高精度 FEA 样本,构建 PCE 代理模型,使用 MCS 计算结构的失效概率,在此基础上建立了失效概率约束下体积分数最小化的单循环 RBTO 模型.4 个数值算例验证了所提出方法的有效性和优越性.

(1) 利用 PCE 代理模型替代传统的 FEA 分析, 大幅缩短了失效概率计算时间,提高了优化效率.

(2)柔度限值和失效概率限值的降低,以及随机 场载荷均值、标准差与相关长度的增加,均会导致 结构最终体积分数的增加.

(3)不确定性因素增强时,结构需要消耗更多的 材料来抵抗不确定性因素的干扰以满足指定的可靠 性要求. 力

# 参考文献

- Kang Z, Luo Y. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures using convex models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(41-44): 3228-3238
- 2 Tootkaboni M, Asadpoure A, Guest JK. Topology optimization of continuum structures under uncertainty—a polynomial chaos approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 201: 263-275
- 3 Jansen M, Lombaert G, Schevenels M. Robust topology optimization of structures with imperfect geometry based on geometric nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 285: 452-467
- 4 Chu S, Xiao M, Gao L, et al. Robust topology optimization for fiberreinfo-rced composite structures under loading uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 384: 113935
- 5 Kharmanda G, Olhoff N, Mohamed A, et al. Reliability-based topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(5): 295-307
- 6 Jung HS, Cho S. Reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures with loading and material uncertainties. *Finite Elements in Analysis Design*, 2004, 41(3): 311-331
- 7 Maute K, Frangopol DM. Reliability-based design of mems mechanisms by topology optimization. *Computers and Structures*, 2003, 81(8): 813-824
- 8 罗阳军, 亢战. 连续体结构非概率可靠性拓扑优化. 力学学报, 2007, 39(1): 125-131 (Luo Yangjun, Kang Zhan. Non-probabilistic reliability-based topology optimization of continuum structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(1): 125-131 (in Chinese))
- 9 Zheng J, Luo Z, Jiang C, et al. Non-probabilistic reliability-based topology optimization with multidimensional parallelepiped convex model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 57(6): 2205-2221
- 10 Luo Y, Zhou M, Wang MY, et al. Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints. *Computers & Structures*, 2014, 143: 73-84
- 11 Silva M, Tortorelli DA, Norato JA, et al. Component and system reliability-based topology optimization using a single-loop method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(1): 87-106
- 12 Yin H, Yu D, Xia B. Reliability-based topology optimization for structures using fuzzy set model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 333: 197-217
- 13 Mahmoud A, Behrooz K. STO-DAMV: Sequential topology optimization and dynamical accelerated mean value for reliability-based topology optimization of continuous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 417: 116429
- 14 Xian J, Su C. Reliability-based topology optimization of fractionally-damped structures under nonstationary random excitation. *En*gineering Structures, 2023, 297: 116956
- 15 Behrooz K, Mahmoud A. SVR-TO-APMA: Hybrid efficient modelling and topology framework for stable topology optimization with accelerated performance measure approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 404: 115762
- 16 Xing Y, Tong L. Accelerating reliability-based topology optimization via gradient online learning and prediction. *Aerospace Science* and Technology, 2024, 145: 108836
- 17 Cheng F, Zhao Q, Zhang L. Non-probabilistic reliability-based

multi-material topology optimization with stress constraint. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2024, 20(1): 171-193

- 18 Nguyen HT, Song J, Paulino HG. Single-loop system reliabilitybased topology optimization considering statistical dependence between limit-states. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44(5): 593-611
- 19 Zheng J, Yuan L, Jiang C, et al. An efficient decoupled reliabilitybased topology optimization method based on a performance shift strategy. *Journal of Mechanical Design*, 2023, 145(6): 061705
- 20 Muayad H, Movahedi MR. Reliability based topology optimization of thermoselastic structures using bi-directional evolutionary structural optimization method. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2023, 19(3): 605-620
- 21 Zhan J, Bai Z. Non-probabilistic reliability-based topology optimization against loading uncertainty field with a bounded field model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(11): 338
- 22 Steffen F, Simon P, Philipp E, et al. Reliability-based optimization of structureal topologies using artificial neural networks. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2022, 70: 103356
- 23 王选,时元昆,杨博等.基于响应面方法的破损-安全结构可靠性 拓扑优化.力学学报,2023,55(5):1206-1216 (Wang Xuan, Shi Yuankun, Yang Bo, et al. Reliability-based topology optimization of fail-safe structures using response surface method. *Chinese Journal* of *Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(5): 1206-1216 (in Chinese))
- 24 Jalalpour M, Tootkaboni M. An efficient approach to reliabilitybased topology optimization for continua under material uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53: 759-772
- 25 战俊杰, 彭秀林, 白仲航. 考虑有界场的几何不确定性非概率可靠 性拓扑优化. 力学学报, 2023, 55(9): 2056-2067 (Zhan Junjie, Peng Xiulin, Bai Zhonghang. Non-probability reliability-based topology optimization against geometric uncertainty with a bounded field model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(9): 2056-2067 (in Chinese))
- 26 刘培硕, 亢战. 考虑材料性能空间分布不确定性的可靠度拓扑优化. 固体力学学报, 2018, 39(1): 69-79 (Liu Peishuo, Kang Zhan. Reliability-based topology optimization considering spatially varying uncertain material properties. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2018, 39(1): 69-79 (in Chinese))
- 27 Keshavarzzadeh V, Fernandez F, Tortorelli DA. Topology optimization under uncertainty via non-intrusive polynomial chaos expansion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 318: 120-147
- 28 Ghanem R, Spanos P. Stochastic Finite Elements—A Spectral Approach. New York: Dover, 2003: 17-24
- 29 Vishwanathan A, Vio GA. Efficient quantification of material uncertaintyes in reliability-based topology optimization using random matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 351: 548-570
- 30 Keshavarzzadeh V, Kirby RM, Narayan A. Stress-based topology optimization under uncertainty via simulation-based gaussian process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 365: 112992
- 31 Keshavarzzadeh V, Meidani H, Tortorelli DA. Gradient based design optimization under uncertainty via stochastic expansion methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 306: 47-76
- 32 Svanberg K. The method of moving asymptotes—A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Meth*ods in Engineering, 1987, 24(2): 359-373