力学学报
Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics
EI、Scopus 收录
中文核心期刊

两尺度视角下准脆性材料的损伤: 从几何不连续度到自由能折减

陈建兵，任宇东，卢广达

DAMAGE IN QUASI-BRITTLE MATERIALS FROM A TWO-SCALE PERSPECTIVE: FROM GEOMETRIC DISCONTINUITY TO FREE ENERGY REDUCTION

Chen Jianbing, Ren Yudong, and Lu Guangda

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-24-268

第 56 卷 第 11 期 力 学 学 报 Vol. 56, No. 11
2024 年 11 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Nov., 2024

固体力学

两尺度视角下准脆性材料的损伤: 从几何不连续度到自由能折减[1)]

陈建兵 任宇东 卢广达[2)]

(同济大学土木工程学院, 土木工程防灾减灾全国重点实验室, 上海 200092)

摘要 多尺度损伤演化法则的构建是损伤力学从现象学走向理性坚实基础的核心之一. 然而, 迄今鲜有人注意到, 存在两类损伤变量: 几何意义上表征材料不连续程度的损伤与自由能折减 (即材料受力性能退化) 意义上的损伤. 如何实现从几何意义上的损伤向能量耗散意义上的损伤转化, 乃是固体破坏问题的枢机. 本文从两尺度视角给出了损伤演化法则及几何意义上的损伤向能量耗散 (即受力性能的退化) 转化过程的定量刻画, 进一步夯实了非局部宏-微观损伤模型的理性基础. 在本文模型中, 连续体被看作物质点的集合. 宏观物质点与其作用域中的其他物质点组成一系列物质点偶, 由此形成附加于其上的细观结构. 在外部载荷作用下, 物质点的位移引起物质点偶的变形. 当物质点偶的某种几何变形量 (如正伸长量) 超过临界值时, 微细观损伤开始发展. 细观层次物质点偶的渐进破坏引起宏观固体不连续程度的变化, 最终导致宏观连续体拓扑的改变. 因此, 将微细观损伤在作用域中的累积定义为该点的拓扑损伤, 以刻画宏观固体的不连续程度, 这在本质上是几何意义上的损伤. 另一方面, 损伤发展引起自由能耗散, 导致连续体力学性能的退化. 由于宏观能量耗散是作用域中细观物质点偶因损伤而导致的耗散能量之和, 因此能量 (受力) 意义上的损伤为作用域中细观物质点偶上的总耗能与总弹性自由能之比. 由此, 在细观层次上实现了从几何意义上的损伤向能量耗散 (受力退化) 意义上的损伤的转化. 在本文模型中, 不需要经典连续介质损伤力学或断裂相场模型中经验假定的能量退化函数, 物质点处的几何-能量转绎关系由该点的两尺度变形状态决定, 而非固定形式, 从而可能对复杂受力状态具有更好的适应性. 计算结果表明, 模型不仅可以捕捉到裂纹萌生、扩展全过程, 而且可以定量反映加载过程中的载荷-位移曲线. 与在宏观层次进行几何-能量转绎的宏-微观损伤模型相比, 本文模型可以更准确地捕捉到试验结果的细节.

关键词 拓扑损伤, 能量损伤, 细观转化, 非局部宏-微观损伤模型, 准脆性材料

中图分类号: O346.5, TU313 **文献标识码**: A

DOI: 10.6052/0459-1879-24-268 CSTR: 32045.14.0459-1879-24-268

DAMAGE IN QUASI-BRITTLE MATERIALS FROM A TWO-SCALE PERSPECTIVE: FROM GEOMETRIC DISCONTINUITY TO FREE ENERGY REDUCTION[1)]

Chen Jianbing Ren Yudong Lu Guangda[2)]

(*State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering*, *College of Civil Engineering*, *Tongji University*, *Shanghai* 200092, *China*)

Abstract The construction of multiscale damage evolution law is one of the key ingredients in damage mechanics for transitioning from phenomenological to a rational and solid foundation. However, few have noticed that there are actually

2024–06–05 收稿, 2024–08–28 录用, 2024–08–29 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目(12202314 和 51725804).

2) 通讯作者: 卢广达, 博士后, 主要研究方向为力学建模与先进数值方法. E-mail: guangdalu@tongji.edu.cn

引用格式: 陈建兵, 任宇东, 卢广达. 两尺度视角下准脆性材料的损伤: 从几何不连续度到自由能折减. 力学学报, 2024, 56(11): 3202-3212
Chen Jianbing, Ren Yudong, Lu Guangda. Damage in quasi-brittle materials from a two-scale perspective: from geometric discontinuity to free energy reduction. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(11): 3202-3212

two types of damage variables: one representing the geometrical discontinuity of materials, and the other representing damage in terms of free energy reduction (i.e., degradation of mechanical behavior of materials). The key of solid failure mechanics lies in how to achieve the conversion from geometric damage to energetic damage. In the current paper, the damage evolution law and the conversion from geometric damage to energy dissipation, i.e., the degree of mechanical degradation, is quantitively described from a two-scale point of view, and the rational foundation of the nonlocal macro-meso-scale damage (NMMD) model is further consolidated. In the present paper, the continuum is considered as a set of material points. Material points within the influence domain interact with others, forming material point pairs, and thus a meso structure is attached to each material point. Under external loading, the material points move, leading to the deformation of material point pairs. When some geometric deformation quantity (e.g., the positive elongation quantity) of material point pairs exceeds a critical value, the damage starts to develop in mesoscopic material point pairs. The progressive fracture of mesoscopic material point pairs leads to the changes in the degree of discontinuity, and finally results in the changes in the topology of macroscopic continuum. Therefore, the topologic damage can be naturally defined as the weighted summation of mesoscopic damage in point pairs within the influence domain, and can be adopted to describe the discontinuity of macroscopic solid. The topologic damage is intrinsically a damage variable in the geometric sense. On the other hand, the damage evolution leads to the dissipation of free energy, resulting in degradation of mechanical properties of materials. As the macroscopic energy dissipation is the summation of the mesoscopic dissipation energy in material point pairs induced by mesoscopic damage evolution, the damage in the energetic sense or mechanical sense can be evaluated by the ratio of total dissipated mesoscopic energy in material point pairs and total elastic free energy. Therefore, the conversion from geometric damage to energy dissipation is conducted on the meso scale via the material point pairs rather than the macro scale. Consequently, the empirical energetic degradation function in continuum damage mechanics or phase-field fracture model is not needed anymore in the current model, and the map between the topologic damage and energetic degradation factor is determined by the actual deformation state rather than a fixed function. As a result, this model might have a better adaptivity for the fracture problems with complex strain/stress states. The numerical results indicate that the current model can not only capture the whole process of crack initiation and propagation, but also quantitatively describe the load-deformation curve under loading. Compared with the original NMMD model where the transition from geometric damage to energy dissipation is conducted on the macro scale, the proposed model can better capture the details of the experimental results.

Key words topologic damage, energy damage, mesoscopic conversion, nonlocal macro-meso-scale damage model, quasi-brittle materials

引 言

如何描述裂纹和如何刻画裂纹对材料力学行为的影响, 是固体破坏力学中的两个基本问题. 实际上, 前者是裂纹在几何上的表征, 后者是如何从材料几何上的变化确定材料受力性能变化, 即从几何向受力行为 (能量耗散) 的转化问题. 在断裂力学中, 认为裂纹是固体中的几何不连续部分, 通过材料应变能与裂纹表面能之间的转化来表征材料开裂的物理过程[1-4]. 在损伤力学中, 则引入连续的损伤场变量将裂纹弥散至损伤带中, 利用应变等效或能量等效原理, 以表征材料不连续程度的损伤内变量来直接反映材料刚度的折减[5-7]. 由于裂尖应力的奇异性, 断裂力学引入基于能量释放率、应力强度因子和 J 积分等本质上是非局部 (积分) 力学量的准则来确定裂纹何时扩展[4], 并对裂纹扩展方向提出了各类猜想[8-9]. 然而, 这些准则的优劣以及是否可将其纳入统一框架, 迄今仍然莫衷一是[10]. 另一方面, 在损伤力学中, 损伤变量的定义与演化亦呈现出百家争鸣的局面[11]. 断裂力学与损伤力学所面临的上述根本困境在于, 二者均仅采用宏观力学量去描述具有多尺度特征的破坏过程. 从微细观破坏机理入手的宏-微观多尺度破坏力学[5,12] 是走出这一困境的关键. 沿着这一进路, 在断裂力学中, 可在裂尖处引入分子动力学模拟代替宏观的起裂与扩展准则[13], 而断裂过程区与内聚裂缝模型[14] 则实际上是以“浓缩”的方式将细观过程的综合结果“显式”地嵌入宏观框架之中. 而在损

伤力学中, 则通过对微观[15] 或细观[16] 代表性体积单元的力学或能量分析来给出多尺度损伤演化法则[17]. 多尺度损伤演化法则的发展是损伤力学从经验走向理性的坚实基础, 得到了力学研究者的高度关注[18]. 然而, 损伤发展引起的能量耗散, 以及材料力学行为的退化与损伤内变量的关系, 毋宁说是直觉地认为是一一映射, 甚至是同步的 (通常取为 $1-d$, 其中 d 为损伤变量).

从 20 世纪末开始, 断裂力学与损伤力学表现出融合的趋势. 一方面, 在损伤力学中引入了正则化技术 (积分/梯度) 来缓解网格敏感性, 由此引发了非局部损伤力学的蓬勃发展[19-20]; 另一方面, Bourdin 等[21] 将图像处理中曲线的变分逼近技术引入断裂力学中, 对线弹性断裂力学中的 Griffith 变分原理[22] 进行了数值实现, 由此提出了断裂相场模型. Wu[23-25] 将内聚裂缝模型嵌入断裂相场模型中, 发展了准脆性材料破坏模拟的统一相场损伤模型. Feng 等[26] 提出了 Feng-Li 积分变换, 给出了断裂相场模型中内聚律与能量退化函数关系的理性表达. 与此同时, Silling 等[27-28] 认为: 由于空间导数在裂纹等几何不连续处无法定义, 构建于 Cauchy 应力定理之上的连续介质力学难以分析破坏问题. 为此, 他采用积分的方式重构了连续介质力学的运动方程, 提出了近场动力学方法. 经过 20 余年的发展, 断裂相场模型与近场动力学已然成为裂纹模拟与非线性分析的主流方法[26, 29-34].

然而, 近场动力学中的积分重构带来了理论与数值方面的问题, 如键基模型中的固定泊松比问题[27]、态基模型中的零能模式[35]、表面效应[36] 以及高昂的计算成本. 断裂相场模型的成功表明: 基于 Cauchy 应力定理的连续介质力学亦可捕捉到裂纹等不连续现象. 然而, 相场演化方程是一个宏观方程, 难以体现微细观开裂机理[37], 其中的能量退化 (折减) 函数尚缺少更为直接的物理解释[38]. 此外, 断裂相场模型难以逻辑一致地描述断裂能不是材料常数而与几何相关这一试验现象[39]. 事实上, 在断裂相场模型中, 相场变量实际上是反映材料不连续程度的几何度量, 而能量退化函数则是从上述几何量向材料受力性能退化的转化函数. 能量退化函数的确定意味着引入了上述转化过程是一一映射的假定. 从上述分析不难看到, 从几何不连续 (或不连续程度) 向受力性能 (耗能特性) 的转绎这一枢机在以往的研究中是不清晰的.

受近场动力学[28,32] 和断裂相场模型[21,23] 启发, Lu 等[40-41] 发展了一类非局部宏-微观损伤 (NMMD) 模型, 在脆性与准脆性材料的静力[40-41]、动力[42] 破坏问题中取得了初步的成功. Ren 等[43] 通过对模型中损伤演化的驱动力进行分解, 将 NMMD 模型拓展至受压[44] 与受剪[45] 主导的破坏问题. 杜成斌等[46-47] 采用比例边界有限元求解 NMMD 模型, 并将其拓展至考虑率效应的动力破坏问题中[48]. Lyu 等[49] 在 ABAQUS 中实现了 NMMD 模型, 并将其推广至热力耦合破坏问题. 与此同时, Chen 等[50] 对 NMMD 模型中的能量退化函数进行了细观物理建模, 给出了单轴受拉状态下能量退化函数的理性表达. 任宇东等[51] 对模型参数的标定进行了初步探索, 并考察了细观参数空间变异性对计算结果的影响. Ren 等[52] 进一步拓展了能量退化函数物理建模的基本思想, 实现了几何损伤与能量耗散在细观层次上的转化, 但尚未论证是否由此可能导致在宏观层次上的转化失去一一对应性.

在经典损伤力学中, 损伤发展引起的能量耗散 (力学退化) 通常通过 $1-d$ 的经验函数[5] 来刻画. 然而, 这种能量耗散与不连续程度几何表现的同步性缺乏物理上的必然性[51]. 事实上, 在损伤力学中, 鲜有人意识到存在几何不连续度与能量退化程度两类不同的损伤变量, 由单轴受拉推广而来的应变等效原理进一步模糊了二者的区别. 在经典的断裂相场模型[21,30] 中, 基于数学上的论证要求, 能量退化因子通常取为相场变量的二次函数形式来保证 Γ 收敛性 (能量平衡). 在相场正则化内聚裂纹断裂模型[23-24,26] 中, 能量退化因子的表达由选取的内聚律决定. 事实上, 这正是通过内聚律这一裂纹的“力学本构”将相场变量这一几何量与能量退化 (即受力意义上的损伤内变量) 关联起来的关键步骤. 但是, 正如前已分析, 在相场模型中, 几何不连续程度 (以相场变量度量) 向耗能特性 (力学性能退化) 的转化这一物理本质是不清晰的, 这一转化是否具有一一对应性而与受力状态无关, 则是先天内蕴假定而缺乏理论基础的. 受统一相场损伤模型[23] 的启发, Lu 等[40-41] 选取了带有两个经验参数的有理分式给出 NMMD 模型中能量退化因子与拓扑损伤之间的关系. Chen 等[50] 利用 NMMD 中的两尺度物理模型计算出了单轴受拉状态下的能量退化函数. 这一工作明确地实现了

从几何损伤向能量耗散 (力学退化) 的显式转化. 然而, 由于是对于给定的变形状态给出宏观尺度上确定的能量退化函数, 这意味着只要两物质点在几何不连续程度意义上的损伤值相同, 其能量耗散比例就相同, 因而其在能量意义 (即受力性能) 上的损伤值亦相同. 然而, Chen 等[50] 对能量退化函数物理建模的计算结果表明, 当应变状态不同时, 即使损伤值相同, 宏观上的能量退化因子值也可能不同.

为此, 本文基于 NMMD 模型中内禀的两尺度物理机制, 对开裂过程中的损伤演化与能量耗散 (力学退化) 过程进行了定量刻画, 建立了拓扑损伤与能量退化因子之间的多尺度映射, 实现了几何不连续程度与能量耗散 (力学退化) 在细观层次上的转化, 进一步夯实了 NMMD 模型的物理基础, 发展了物理一致的非局部宏-微观损伤模型. 对混凝土三点受弯梁以及混凝土重力坝缩尺试验的模拟结果表明, 本文模型可以同时捕捉到准脆性材料受力时的裂纹扩展过程与载荷-变形曲线, 且计算结果具有数值客观性. 本文所提出的模型毋须假定能量退化函数的形式, 即使两个物质点损伤值相同, "宏观"能量退化因子取值也可以不同, 这为多尺度损伤力学的发展提供了有意义的参考, 且可能为更复杂受力状态下的固体损伤破坏分析提供工具.

1　几何不连续度与能量退化意义上的两尺度损伤表达

1.1　固体宏观物质点的细观结构

考察连续体 $\mathcal{B}$, 其边界记为 $\partial\mathcal{B}$, 组成连续体的物质点记为 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}$. 在宏观上的一个物质点可以认为是在一定范围内具有某种细观结构物质的均匀化"物质点". 这时, 材料在微细观层次的不均匀分布均匀化后表现为附着于宏观物质点之上的细观几何结构. 例如, 对于一个物质点 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}$, 定义其作用域为

$$\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})=\left\{\boldsymbol{x}'\in\mathcal{B}\,\middle|\,\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\ell\right\}\tag{1}$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 为 2 范数, ℓ 可称为作用域半径. 在该作用域内的物质点 $\boldsymbol{x}'\in\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{x}$ 构成物质点偶 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$, 由此形成了附加于宏观物质点上的细观点偶结构. 图 1 中给出了物质点、作用域以及物质点偶的示意图. 在宏观物质点 $\boldsymbol{x}$ 上的力学行为将与其作用域中所有细观点偶 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 的状态有关.

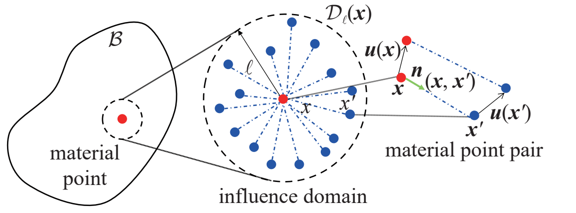


图 1　物质点、作用域与物质点偶示意图

Fig. 1　The schematic of material point, influence domain and material point pair

1.2　宏观物质点上的拓扑损伤——几何不连续程度的度量

记加载过程中物质点产生的位移为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, 细观物质点偶的单位方向向量为 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})/\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|_2$, 则细观物质点偶的正伸长量可定义为

$$\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=\langle[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}',t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)]\cdot\boldsymbol{n}\rangle\tag{2}$$

其中, $\langle x\rangle=\max(x,0)$ 为 Macauley 算子. 当物质点偶的正伸长量超过临界伸长量 λ_c 后, 两物质点之间产生不可逆的分离. 记加载历史量为

$$\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=\max_{\tau\in[0,t]}\langle\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)-\lambda_c\rangle\tag{3}$$

不可逆的分离意味着损伤开始在微细观层次的点偶中发展. 引入微细观损伤函数 $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)\in[0,1]$ 刻画细观点偶的破坏状态, $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=0$ 表示细观点偶 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 完好无损, $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=1$ 则表明该点偶完全破坏. 微细观损伤函数是加载历史量的函数, 本文中取为

$$\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)=\frac{1-\exp[-\gamma\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]}{1-(1-c)\exp[-\gamma\kappa(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]}\tag{4}$$

其中, $c\in(0,1),\gamma\in(0,\infty)$ 为两个形状参数, 控制微细观损伤函数接近 Heaviside 阶跃函数的程度[52]. 从下文中会看出, 在本文模型中, 微细观损伤的发展实际上控制了材料破坏时的能量耗散过程. 对于混凝土这类准脆性材料, 有必要采用两个参数来对其加载过程中复杂的耗散过程进行刻画, 故在此前单参数的微细观损伤函数[40-41] 的基础上引入了细观参数 c. 根据计算经验, 参数 c 主要影响峰值承载力, 而对载荷变形曲线的下降段与裂纹模式影响不大. 参数 c 的物理含义值得在将来的工作中进一步探索.

微细观损伤的累积使得宏观材料的拓扑发生改变, 形成可见的裂纹、即几何意义上的损伤. 因此, 拓扑损伤可自然地定义为微细观损伤函数在作用域中的累积效应, 例如加权积分

$$\Omega(\boldsymbol{x},t)=\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{5}$$

其中, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$ 表示物质点 $\boldsymbol{x}'$ 占据微元的体积, $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 为影响函数, 从数学形式上看是一类权重函数, 在本文中取为钟形函数的形式[50]

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\begin{cases}\dfrac{5}{\pi\ell^2}(1+3R)(1-R)^3, & \text{if} \quad R\leqslant 1\\ 0, \quad \text{if} \quad R>1\end{cases} \tag{6}$$

其中, $R=\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|_2/\ell$.

显然, 式 (5) 中定义的拓扑损伤通过对裂纹的两尺度几何表征, 本质上是已经发生损伤的细观点偶数与总细观点偶数之比, 亦即作用域内损伤与未损伤面积之比 (在三维情况下将是体积之比), 由此度量了连续体中宏观物质点处的不连续程度, 类似于图形学中的灰度. 事实上, 这一表述正是文献 [5] 中关于损伤打破了连续介质这一观点的定量刻画. 可见, 拓扑损伤是一个纯几何量, 由此度量的几何不连续程度如何影响材料的受力性能, 则需进一步引入相应的能量耗散过程才能反映.

1.3 能量意义上的损伤——从几何不连续程度向受力性能退化的转化

材料的几何不连续程度, 即拓扑损伤的增加必然导致材料受力性能的退化. 事实上, 损伤发展是不可逆的能量耗散过程, 因此有损材料自由能 ψ 是无损材料自由能 ψ_0 的折减[5], 由此可称 $g=\psi/\psi_0$ 为能量退化因子, 而 $D=1-g$ 则为能量耗散意义上的损伤. 这里根据能量等效假定对有损与无损材料的自由能进行定量细观表征, 从而建立从几何损伤到受力性能退化的转化关系, 即能量退化因子与能量耗散意义上的损伤的理性表达.

将物质点偶看作是微细观层次模量为 k 的微弹簧, 则可计算作用域中细观点偶 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 中蕴含的能量为

$$\mathrm{d}W_0=\frac{1}{2}k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{7}$$

当组成物质点偶的两物质点产生不可逆分离后, 点偶中内蕴的能量开始耗散, 其中剩余的能量为

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}[1-\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{8}$$

根据能量等效假定[50], 无损物质点的自由能等于与其相连的全部点偶中的微细观能量之和

$$\psi_0(\boldsymbol{x},t)=\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\mathrm{d}W_0= \int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{9}$$

而有损物质点的自由能则可用发生微细观损伤后点偶中剩余能量之和进行计算

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\mathrm{d}W= \int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')[1-\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{10}$$

于是宏观物质点 $\boldsymbol{x}$ 处的能量退化因子可通过下式计算

$$g(\boldsymbol{x},t)=\frac{\psi}{\psi_0}=\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')[1-\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\displaystyle\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}'} \tag{11}$$

事实上, 可进一步定义

$$D(\boldsymbol{x},t)=1-g(\boldsymbol{x},t)=\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\displaystyle\int_{\mathcal{D}_\ell(\boldsymbol{x})}\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')k[\lambda^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)]^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}'} \tag{12}$$

显然, $D(\boldsymbol{x},t)$ 反映了自由能退化程度. 与式 (5) 中的 $\Omega(\boldsymbol{x},t)$ 是几何意义上的损伤相对, 式 (12) 中的 $D(\boldsymbol{x},t)$ 可认为是能量意义上的损伤, 它刻画了由于几何不连续程度的增加导致的材料“宏观”受力性能退化的程度[40].

与引言中提到的借助宏观函数实现几何损伤向能量耗散的转化方式不同, 式 (11) 中的能量退化因子并不显含式 (5) 中的拓扑损伤, 但两者中均含有微细观损伤函数 $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t)$. 因此, 本文中拓扑损伤与能量退化因子通过两尺度映射相互联系, 从而在细观层次上实现几何不连续向能量耗散 (力学性能退化) 的转化, 并综合形成宏观层次上的能量耗散. 在断裂相场模型中, 需要建立关于相场变量的能量退化函数, 其本质上乃是要实现上述从相场变量 (即几何意义上的损伤) 向能量退化意义上的损伤的转化, 而且是在单一宏观尺度上的转化. 对这一转化的形式, 早期仅从数学定性上要求是凸函数, 具体形式则几乎完全是经验性的. Wu[23] 首次通过内聚律确定有理函数形式的参数, 在此基础上, Feng 等[26] 建立了从内聚律到能量退化函数的变换关系, 从而通过内聚律决定能量退化函数的形式. 应当指出, 内聚律本身仍然是裂纹尖端力学特性的宏观表征. 在本节中, 则是在细观层次上的转化, 因此本文模型中毋须

假定能量退化函数的具体形式, 而且, 即使两个物质点的拓扑损伤值相同, 能量耗散意义上的损伤值也可能不同. 事实上, 从式 (5) 与式 (12) 可见, 对于一般受力状态二者并无对应的唯一性. 但是, Chen 等[50]对单轴受拉情形严格证明了其一一对应性及关于细观输入参数的不变性.

需要指出的是, 图 1 所示的细观结构仍然是一种理想化的细观结构 (抽象细观结构[5]). 从根本意义上说, 重要的是合理的细观结构能够实现从几何意义上的损伤向能量意义上的损伤的转化, 但图 1 的抽象细观结构则不一定是唯一可行的细观结构.

此外, 在式 (2) ~ 式 (4) 中主要考虑了受拉为主破坏的情形, 对于受剪与受压为主的情况, 在 NMMD 模型也可加以推广, 可参见文献 [43-45].

2　非局部宏-微观损伤模型的控制方程

在宏观尺度, 无损材料的自由能即为应变能

$$\psi_0(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{13}$$

其中, $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶弹性刚度张量, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为物质点 $\boldsymbol{x}$ 处的小应变张量. 有损材料的自由能为

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}g(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{14}$$

其中, $g(\boldsymbol{x},t)$ 为式 (11) 中的能量退化因子. 对式 (14) 执行 Coleman-Noll 手续[53]可识别本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma}=g(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15}$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量. 局部形式的平衡方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \tag{16}$$

其中, $\boldsymbol{b}$ 为体力. 边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}, \quad \forall\boldsymbol{x}\in\partial_u\mathcal{B}\\&\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\eta}=\bar{\boldsymbol{t}}, \quad \forall\boldsymbol{x}\in\partial_t\mathcal{B}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中, $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为本质边界 $\partial_u\mathcal{B}$ 上指定的位移, $\bar{\boldsymbol{t}}$ 为自然边界 $\partial_t\mathcal{B}$ 上施加的面力, $\boldsymbol{\eta}$ 为自然边界一点的外法向量. 本质边界 $\partial_u\mathcal{B}$ 与自然边界 $\partial_t\mathcal{B}$ 满足

$$\partial_u\mathcal{B}\cap\partial_t\mathcal{B}=\phi, \quad \partial_u\mathcal{B}\cup\partial_t\mathcal{B}=\partial\mathcal{B} \tag{18}$$

上述控制方程可采用有限单元法[54]进行数值求解. 在本文中, 采用常应变三角形单元进行空间离散. 为减少计算量, 在裂纹可能扩展的区域加密网格. 将物质点放置于加密区的单元形心处, 并采用 Cell List 算法高效搜寻物质点偶. 采用拟牛顿法[40]求解非线性方程, 并引入控制点增强[55]的局部弧长法[56]追踪平衡路径. 本文所采用的非线性分析程序采用 Julia 语言编写调优.

与近场动力学相比, 本文模型保留了 Cauchy 应力定理与连续介质力学中的局部平衡方程, 在保证计算效率的同时避免了近场动力学中的表面效应、零能模式等数值问题. 与断裂相场模型相比, 本文模型给出的拓扑损伤式 (5) 具有两尺度演化的特征, 可以反映固体破坏过程中的微细观开裂机理; 同时给出了能量退化因子和能量耗散意义上的损伤的理性表达, 不再需要经验的退化函数.

3　应用算例

下面通过对混凝土三点受弯梁以及混凝土坝缩尺试验的模拟来说明所提出模型的有效性. 在以下算例中均采用平面应力假定.

3.1　混凝土三点受弯梁

考察文献 [57] 中的混凝土三点受弯梁试验. 试件的几何尺寸与边界条件如图 2 所示. 为验证模型的数值客观性, 采用两个有限元网格进行计算, 如图 3 所示. 材料的杨氏模量为 $E=2.0\times10^4$ MPa, 泊松比为 $\nu=0.2$, 模型参数见表 1.

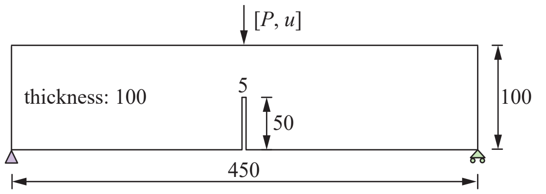
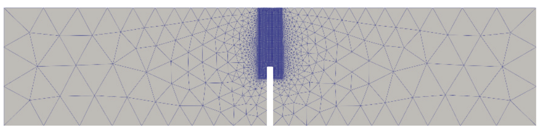
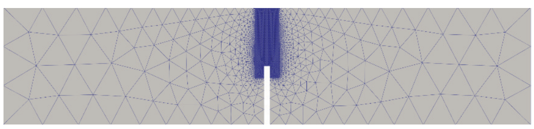


图 2　混凝土三点受弯梁的几何尺寸与边界条件 (单位: mm)

Fig. 2　The geometric size and boundary conditions of the three-point bending beam (unit: mm)



(a) 网格 A (12 544 单元)
(a) Mesh A (12 544 elements)



(b) 网格 B (19 178 单元)
(b) Mesh B (19 178 elements)

图 3　混凝土三点受弯梁的有限元网格划分

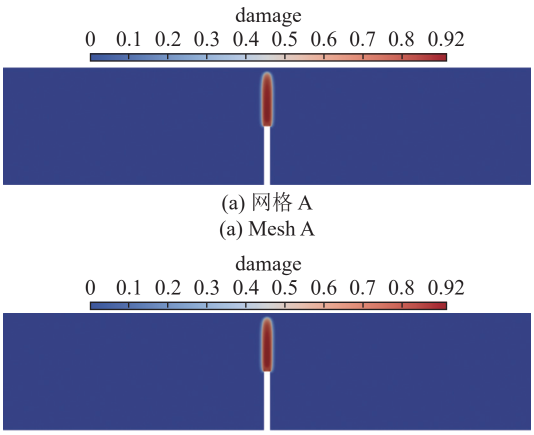
Fig. 3　The finite element discretization of the three-point bending beam

表 1 混凝土三点受弯梁的模型参数

Table 1 The material and model parameters for the three-point bending beam

ℓ/mm	λ_c/mm	γ/mm^{-1}	c
4.0	5.5×10^{-4}	110	0.05

采用图 3 中的两个有限元网格计算得到的裂纹图像如图 4 所示, 载荷-位移曲线如图 5 所示. 可以看到, 模拟得到的裂纹图像从缺口处竖直向上扩展, 直到梁顶, 与预期相符; 计算得到的载荷-位移曲线与试验范围吻合良好, 表明了所提模型的有效性. 同时, 不同网格计算得到的结果基本一致, 验证了模型的数值客观性.



(a) 网格 A
(a) Mesh A

(b) 网格 B
(b) Mesh B

图 4 三点受弯梁的裂纹模式

Fig. 4 The crack patterns for the three-point bending beam

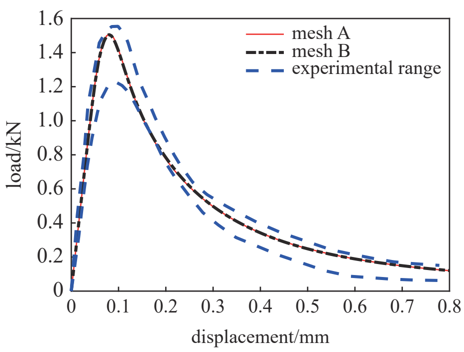


图 5 三点受弯梁计算载荷-位移曲线与试验结果

Fig. 5 The resulting load-displacement curve for the three-point bending beam compared with the experimental range

3.2 混凝土坝缩尺试验

考察 Carpinteri 等[58] 开展的混凝土坝缩尺试验. 试验中在上游侧设置长度为 15 cm 的预制缺口[59], 缺口宽度取为 1.5 mm, 水压力则等效为不同高度处的 4 个集中力, 试件的几何尺寸与边界条件如图 6 所示. 分别采用图 7 中的两个有限元网格进行计算, 材料的杨氏模量为 $E = 3.57\times10^4$ MPa, 泊松比为 $\nu = 0.1$, 模型参数取值见表 2.

采用本文的非局部宏-微观损伤模型模拟得到的裂纹路径如图 8 所示. 可以看到, 模拟裂纹路径与试验结果 (黑色实线) 基本一致. 模拟得到的载荷-裂纹张开位移 (CMOD) 曲线如图 9 所示, 与试验结果吻合良好, 验证了本文模型的有效性. 从图 8 与图 9 中可以看到, 疏密两个网格计算出的裂纹路径与载荷-CMOD 曲线基本一致, 表明所提出模型具有数值客观性.

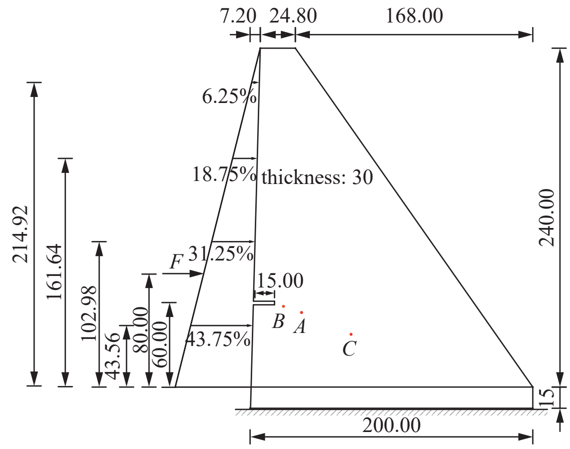
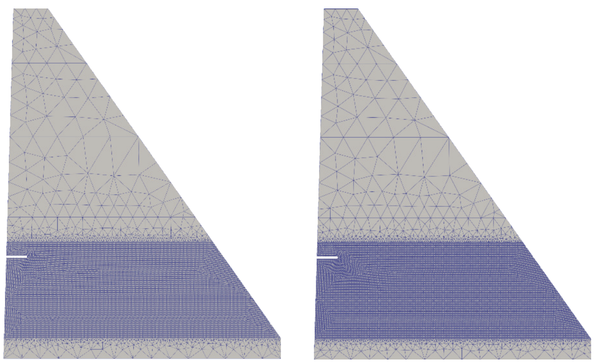


图 6 混凝土坝缩尺试验示意图 (单位: cm)

Fig. 6 The schematic of concrete dam scale experiment (unit: cm)



(a) 网格 A (46 201 单元)
(a) Mesh A (46 201 elements)

(b) 网格 B (52 187 单元)
(b) Mesh B (52 187 elements)

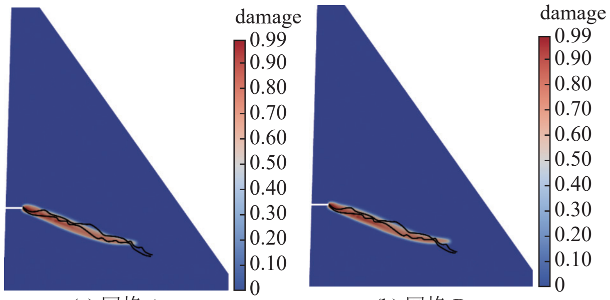
图 7 混凝土坝有限元网格划分

Fig. 7 The finite element mesh of concrete dam

表 2 混凝土坝模型参数取值

Table 2 The model parameters of the concrete dam

ℓ/mm	λ_c/mm	γ/mm^{-1}	c
2.5	2.0×10^{-3}	250	0.05



(a) 网格 A
(a) Mesh A

(b) 网格 B
(b) Mesh B

图 8　混凝土坝裂纹与试验结果 (黑色实线) 对比

Fig. 8　The crack patterns of the concrete dam compared with the experimental results (the black solid line)

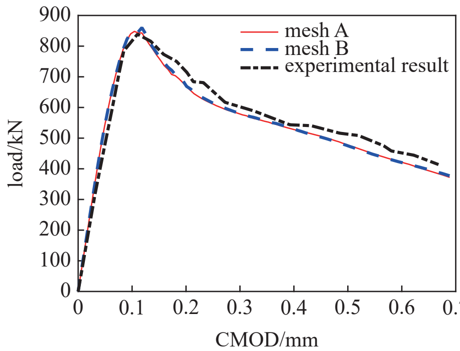
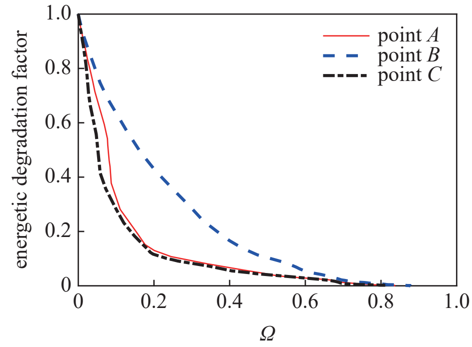
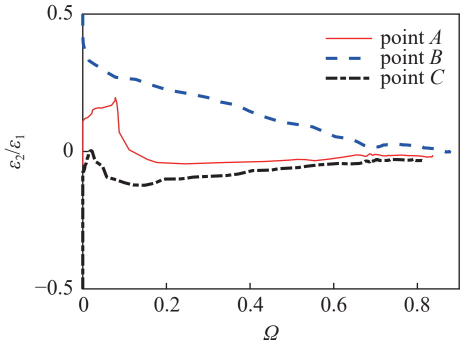


图 9　混凝土坝载荷-CMOD 曲线与试验结果对比

Fig. 9　The load-CMOD curves of the concrete dam compared with the experimental result



(a) 能量退化因子与拓扑损伤关系
(a) The relationship between the energetic degradation factor and topologic damage



(b) 主应变比值与拓扑损伤关系
(b) The relationship between the ratio of principle strain and topologic damage

图 10　A, B, C 三点 (见图 6) 的能量退化因子、主应变比值与拓扑损伤的关系

Fig. 10　The relationship between the energetic degradation factor, ratio of principle strain and the topologic damage at points A, B, C in Fig. 6

考察图 6 中 A, B, C 三点在开裂过程中能量退化因子与拓扑损伤之间的映射关系与变形状态之间的联系. 若以试件左下角为原点并建立直角坐标系, 3 个物质点的坐标为 (单位: cm): A(28.4, 70.0), B(22.0, 72.6), C(72.3, 50.9). 采用宏观物质点处两个主应变 ε_1, $\varepsilon_2\,(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ 的比值 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ 刻画该点的变形 (拉压) 状态. 从图 10(b) 中可以看出, 3 个物质点在加载过程中的变形状态各不相同, 且在加载过程中是变化的, 相应图 10(a) 中能量退化因子与拓扑损伤的关系也表现出明显的差异. 具体来说, 刚开始点 A 的两个主应变均大于零, 点 C 的两个主应变为一正一负, 两点变形状态明显不同, 此时其能量退化函数的区别较明显. 当点 A 处损伤发展至 0.3 左右时, 两个主应变发展为一正一负, 与点 C 处的情况较为接近, 此时两点的能量退化函数开始靠近. 此后两点的变形状态越来越接近, 能量退化函数之间的差别也越来越小. 点 B 处的变形状态表现为双轴受拉, 相应的能量退化函数关系要比 A, C 两点 (一拉一压) 更为平缓. 这一点可以借助 Chen 等[50] 给出的定性分析理解. 当应变状态为单轴受拉时, 点偶变形具有各向异性, 此时几何损伤与能量耗散的变化不同步; 当应变状态表现为双轴受拉时, 点偶变形趋于各向同性, 此时几何与能量的变化趋于同步, 能量退化函数较为缓和. 当试件完全破坏时, 3 个物质点的变形状态趋于相同, 此时 3 个物质点处的能量退化函数几乎没有差别. 可以看到, 本文模型中物质点处的能量耗散与该点的变形状态密切相关, 即使两个物质点的拓扑损伤相同, 能量退化因子也可以不同, 因而能量意义上的损伤也不同, 这是因为"宏观"能量退化因子是细观能量积分的结果, 从而较为精细地刻画了准脆性材料开裂过程中的能量耗散过程.

进一步地, 图 11 中对比了在宏观层次进行几何-能量转绎的非局部宏-微观损伤模型[40-41] 和开裂单元法[60] 对这一问题的模拟结果. 原始模型[40-41] 的计算参数为: $\ell = 8$ mm, $\lambda_c = 2.0\times10^{-3}$ mm, $\gamma = 40$ mm^{-1}, $p = 3$, $q = 10$, 参数 p 和 q 的含义可参考文献 [41]. 可以看到, 在采用经验能量退化函数的非局部宏-微观损伤模型中, 所有物质点处的损伤-耗能关系都相同,

此时可以大致捕捉到试验结果的趋势, 但图 12 中所展示的裂纹路径在尾部则与试验结果偏离较大. 本文模型中每个物质点的损伤-耗能关系由该点的变形状态决定, 更为精细地描述了开裂过程中的能量耗散过程, 因而可以较好地把握试验中载荷-CMOD 曲线的细节, 同时图 8 中的裂纹路径也与试验结果更接近. 在开裂单元法[60] 中, 由于采用了较为简单的内聚本构关系, 计算结果与试验结果差别较大.

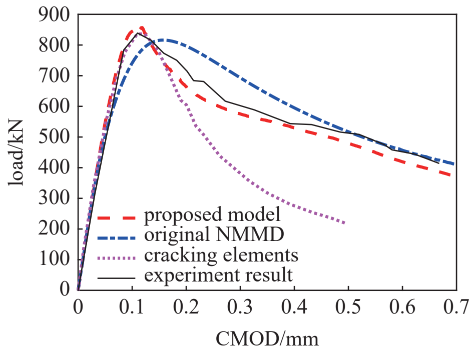


图 11 不同模型计算结果对比

Fig. 11 Comparison of results from different models

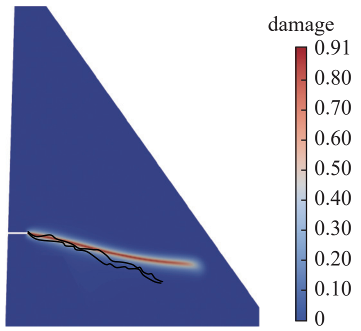


图 12 采用宏观退化函数的非局部宏-微观损伤模型计算得到的裂纹模式

Fig. 12 Crack pattern from the nonlocal macro-meso-scale damage model with macroscopic empirical energetic degradation function

图 11 与图 12 中采用经验宏观能量退化函数的 NMMD 模型的对比表明, 二者总体上一致, 但两尺度几何-能量转绎模型更好地反映了细部特征. 这主要是由于本例中是受拉为主的破坏, 此时 Chen 等[50] 关于能量退化函数的不变性论述, 奠定了采用宏观能量退化函数结果具有稳健性的理论基础. 然而, Chen 等[50] 的计算结果表明, 在非单拉破坏为主的复杂应变状态问题中, 上述宏观退化函数的结果稳健性将降低. 对此尚需进一步研究.

4 结 论

本文采用具有物理一致性的多尺度视角对准脆性材料中的裂纹进行了几何与力学描述, 明确提出了几何意义与能量意义上的两类不同损伤的概念, 进一步夯实了非局部宏-微观损伤模型的物理基础, 发展了物理一致的非局部宏-微观损伤模型. 本文得到主要结论如下:

(1) 本文模型从几何的角度给出了拓扑损伤的两尺度演化方程, 并通过多尺度映射实现了拓扑损伤向能量耗散 (力学退化) 意义上的损伤的细观转化, 建立了物理机制清晰的两尺度损伤分析框架;

(2) 本文模型突破了损伤力学中需要经验假定的能量退化函数的传统观念, 由于几何损伤向能量耗散 (力学退化) 在细观层次上转化, 发现相同拓扑损伤值的物质点因变形状态不同而具有不同的能量退化因子和能量耗散意义上的损伤, 从而失去了拓扑损伤向能量耗散意义上的损伤转化在宏观层次的一一对应性, 模拟结果与真实情况更加吻合;

(3) 在进行裂纹模拟时, 本文模型毋须预设裂纹扩展路径即可同时捕捉到裂纹萌生、扩展的全过程与加载过程中的载荷-变形曲线, 且计算结果具有数值客观性.

本文计算结果表明, 由于在细观尺度实现了从几何意义上的损伤向能量 (受力) 意义上的损伤的转化, 物理一致的非局部宏-微观损伤模型在准脆性材料的破坏模拟中具有良好的前景, 可望为受力状态更加复杂情况下的准脆性材料损伤破坏过程模拟提供有力工具. 在将来的工作中, 尚有大量研究工作需要深入推进, 如对塑性变形与各向异性材料的考虑以及高效数值算法的构造.

参 考 文 献

1 Griffith A. The phenomena of flow and rupture in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1921, 221: 163-198

2 Irwin GR. Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, 24: 361-364

3 Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(2): 379-386

4 Anderson TL. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. CRC Press, 2017

5 李杰, 吴建营, 陈建兵. 混凝土随机损伤力学. 北京: 科学出版社, 2014 (Li Jie, Wu Jianying, Chen Jianbing. Stochastic Damage Mechanics of Concrete Structures. Beijing: Science Press, 2014 (in Chinese))

6 Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Springer Science & Business Media, 2012

7 Wu JY, Li J, Faria R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(3-4): 583-612
8 Mróz KP, Mróz Z. On crack path evolution rules. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, 77(11): 1781-1807
9 Hua W, Li J, Zhu Z, et al. A review of mixed mode I-II fracture criteria and their applications in brittle or quasi-brittle fracture analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023, 124: 103741
10 嵇醒. 断裂力学判据的评述. 力学学报, 2016, 48(4): 741-753 (Ji Xing. A critical review on criteria of fracture mechanics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 741-753 (in Chinese))
11 Krajcinovic D. Selection of damage parameter —Art or science? *Mechanics of Materials*, 1998, 28(1): 165-179
12 杨卫. 宏微观断裂力学. 北京: 国防工业出版社, 1995 (Yang Wei. Macro- and Micro-scale Fracture Mechanics. Beijing: Defense Industrial Press of China, 1995 (in Chinese))
13 Talebi H, Silani M, Bordas SPA, et al. A computational library for multiscale modeling of material failure. *Computational Mechanics*, 2014, 53(5): 1047-1071
14 Barenblatt GI. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, 7(1): 55-129
15 Feng XQ, Yu SW. Micromechanical modelling of tensile response of elastic-brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32(22): 3359-3372
16 Li J, Ren XD. Stochastic damage model for concrete based on energy equivalent strain. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(11): 2407-2419
17 Ren XD, Chen JS, Li J, et al. Micro-cracks informed damage models for brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48(10): 1560-1571
18 Voyiadjis GZ. Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Springer, 2015
19 Bažant ZP, Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(11): 1119-1149
20 Peerlings RHJ, Borst RD, Brekelmans WM, et al. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(19): 3391-3403
21 Bourdin B, Francfort GA, Marigo JJ. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(4): 797-826
22 Francfort GA, Marigo JJ. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(8): 1319-1342
23 Wu JY. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 103: 72-99
24 Wu JY. A geometrically regularized gradient-damage model with energetic equivalence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 328: 612-637
25 吴建营. 固体结构损伤破坏统一相场理论、算法和应用. 力学学报, 2021, 53(2): 301-329 (Wu Jiangying. On the theoretical and numerical aspects of the unified phase-field theory for damage and failure in solids and structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(2): 301-329 (in Chinese))
26 Feng Y, Fan JD, Li J. Endowing explicit cohesive laws to the phase-field fracture theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2021, 152: 104464
27 Silling SA. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(1): 175-209
28 Silling SA, Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers & Structures*, 2005, 83(17): 1526-1535
29 Wu JY, Nguyen VP, Nguyen CT, et al. Phase field modeling of fracture. Advances in applied mechancis: multi-scale theory and computation, 2020, 53: 1-183
30 Ambati M, Gerasimov T, De Lorenzis L. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 2015, 55(2): 383-405
31 Silling SA, Lehoucq RB. Peridynamic theory of solid mechanics. *Advances in Applied Mechanics*, 2010, 44: 73-168
32 Huang D, Lu G, Wang C, et al. An extended peridynamic approach for deformation and fracture analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, 141: 196-211
33 Ye JY, Zhang LW. Damage evolution of polymer-matrix multiphase composites under coupled moisture effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 388: 114213
34 Yu H, Chen X, Sun Y. A generalized bond-based peridynamic model for quasi-brittle materials enriched with bond tension-rotation-shear coupling effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 372: 113405
35 Breitenfeld MS, Geubelle PH, Weckner O, et al. Non-ordinary state-based peridynamic analysis of stationary crack problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 272: 233-250
36 Ritter J, Shegufta S, Steinmann P, et al. An energetically consistent surface correction method for bond-based peridynamics. *Forces in Mechanics*, 2022, 9: 100132
37 Marigo JJ. La mécanique de l’endommagement au secours de la mécanique de la rupture : l’évolution de cette idée en un demi-siècle. *Comptes Rendus. Mécanique*, 2023, 351(S3): 1-21
38 Zhang J, Yu H, Xu W, et al. A hybrid numerical approach for hydraulic fracturing in a naturally fractured formation combining the XFEM and phase-field model. *Engineering Fracture Mechanics*, 2022, 271: 108621
39 Gao S, Qi L, Zhu Y, et al. Effect of notch depth ratio on mode I and mixed mode I-II fracture properties of engineered cementitious composites (ECC). *International Journal of Solids and Structures*, 2022, 236-237: 111363
40 Lu GD, Chen JB. A new nonlocal macro-meso-scale consistent damage model for crack modeling of quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 362: 112802
41 卢广达, 陈建兵. 基于一类非局部宏-微观损伤模型的裂纹模拟. 力学学报, 2020, 52(3): 1-14 (Lu Guangda, Chen Jianbing. Cracking simulation based on a nonlocal macro-meso-scale damage model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 1-14 (in Chinese))
42 Lu GD, Chen JB. Dynamic cracking simulation by the nonlocal macro-meso-scale damage model for isotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2021, 122(12): 3070-3099
43 Ren YD, Chen JB, Lu GD. A structured deformation driven nonlocal macro-meso-scale consistent damage model for the

compression/shear dominate failure simulation of quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 410: 115945

44 Ren YD, Chen JB, Lu GD. Mesoscopic simulation of uniaxial compression fracture of concrete via the nonlocal macro-meso-scale consistent damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, 304: 110148

45 任宇东, 陈建兵, 卢广达. 基于结构化变形驱动的非局部宏−微观损伤模型的真 II 型裂纹模拟. 力学学报, 2023, 55(2): 390-402 (Ren Yudong, Chen Jianbing, Lu Guangda. Ture mode II crack simulation based on a structured deformation driven nonlocal macro-meso-scale consistent damage model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(2): 390-402 (in Chinese))

46 杜成斌, 黄文仓, 江守燕. SBFEM 与非局部宏-微观损伤模型相结合的准脆性材料开裂模拟. 力学学报, 2022, 54(4): 1-14 (Du Chengbin, Huang Wencang, Jiang Shouyan. Cracking simulation of quasi-brittle materials by combining SBFEM with nonlocal macro-micro damage model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(4): 1-14 (in Chinese))

47 Du C, Huang W, Ghaemian M, et al. New nonlocal multiscale damage model for modelling damage and cracking in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2023, 277: 108927

48 Zhao Z, Du C, Sun L, et al. Simulation of the dynamic cracking of brittle materials using a nonlocal damage model with an effective strain rate effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2024, 418: 116579

49 Lyu W, Lu G, Xia X, et al. Energy degradation mode in nonlocal macro-meso-scale damage consistent model for quasi-brittle materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, 130: 104288

50 Chen JB, Ren YD, Lu GD. Meso-scale physical modeling of energetic degradation function in the nonlocal macro-meso-scale consistent damage model for quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 374: 113588

51 任宇东, 陈建兵. 基于一类非局部宏-微观损伤模型的混凝土典型试件力学行为模拟. 力学学报, 2021, 53(4): 1196-1121 (Ren Yudong, Chen Jianbing. Simulation of behaviour of typical concrete specimens based on a nonlocal macro-meso-scale consistent damage model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2021, 53(4): 1196-1121 (in Chinese))

52 Ren YD, Lu GD, Chen JB. Physically consistent nonlocal macro-meso-scale damage model for quasi-brittle materials: A unified multiscale perspective. *International Journal of Solids and Structures*, 2024, 293: 112738

53 Gurtin ME, Fried E, Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge University Press, 2010

54 Bathe KJ. Finite Element Procedures. Prentice Hall, 2006

55 De Borst R. Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers & Structures*, 1987, 25(2): 211-224

56 May IM, Duan Y. A local arc-length procedure for strain softening. *Computers & Structures*, 1997, 64(1): 297-303

57 Rots JG. Computational modeling of concrete fracture. [PhD Thesis]. Delft: Delft University of Technology, 1988

58 Carpinteri A, Valente S, Ferrara G, et al. Experimental and numerical fracture modelling of a gravity dam//Fracture Mechanics of Concrete Structures. CRC Press, 2003: 351-360

59 Barpi F, Valente S. Numerical simulation of prenotched gravity dam models. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, 126(6): 611-619

60 Zhang Y, Zhuang X. Cracking elements: A self-propagating strong discontinuity embedded approach for quasi-brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2018, 144: 84-100