

节点拓扑变量非耦合映射的ICM方法

彭细荣, 隋允康, 郑勇刚

ICM METHOD WITH A MAPPING BASED ON NODE-UNCOUPLED TOPOLOGY VARIABLES

Peng Xirong, Sui Yunkang, and Zheng Yonggang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-24-066>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[互逆规划理论及其用于建立结构拓扑优化的合理模型](#)

RECIPROCAL PROGRAMMING THEORY AND ITS APPLICATION TO ESTABLISH A REASONABLE MODEL OF STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION

力学学报. 2019, 51(6): 1940-1948

[互逆规划的拓宽和深化及其在结构拓扑优化的应用](#)

WIDENING AND DEEPENING OF RECIPROCAL PROGRAMMING AND ITS APPLICATION TO STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION

力学学报. 2020, 52(6): 1822-1837

[基于自适应泡泡法的薄壳结构拓扑优化设计](#)

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF THIN SHELL STRUCTURES BASED ON ADAPTIVE BUBBLE METHOD

力学学报. 2023, 55(5): 1165-1173

[基于拓扑优化的结构弹性成像方法](#)

STRUCTURAL ELASTOGRAPHY METHOD BASED ON TOPOLOGY OPTIMIZATION

力学学报. 2022, 54(5): 1331-1340

[面向应力约束的独立连续映射方法](#)

INDEPENDENT CONTINUOUS MAPPING METHOD FOR STRESS CONSTRAINT

力学学报. 2019, 51(2): 620-629

[基于固定网格和拓扑导数的结构拓扑优化自适应泡泡法](#)

ADAPTIVE BUBBLE METHOD USING FIXED MESH AND TOPOLOGICAL DERIVATIVE FOR STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION

力学学报. 2019, 51(4): 1235-1244



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

节点拓扑变量非耦合映射的 ICM 方法¹⁾彭细荣^{*,2)} 隋允康^{†,3)} 郑勇刚^{**}^{*}(湖南城市学院土木工程学院, 湖南益阳 413000)[†](北京工业大学数学统计学与力学学院, 北京 100022)^{**}(大连理工大学工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁大连 116024)

摘要 文章提出了节点拓扑变量一种非耦合映射的 ICM 方法, 对于结构拓扑优化问题予以建模和求解: 首先将基结构划分为由较小单元组成的网格, 取节点独立、连续的拓扑变量, 建立了一种双线性形函数插值的变量非耦合映射, 替代了单元独立连续拓扑变量, 使单元的“有”或“无”连续化近似, 实现了节点拓扑变量过滤识别与物理量的单元内插值, 推导建立了节点拓扑设计变量的优化模型, 采用基于变量可分离的二阶对偶规划算法求解, 并且改进了最优拓扑构型的圆整技术. 接着以常见的位移约束下结构重量(或体积)极小拓扑优化问题为例, 演示了上述建模及求解过程. 最后分别给出了单载荷工况和多载荷工况下的位移约束拓扑优化的算例, 数值计算结果验证了本方法的有效性. 研究有如下优点: 克服了以往基于单元拓扑变量研究的缺陷, 即最优结构边界为锯齿形, 得到的最优结构的拓扑边界光滑清晰; 给出了节点拓扑变量和单元拓扑函数场定义, 提炼出构造该场必须遵循的 5 点准则, 克服了节点拓扑 ICM 方法有关研究中存在的不足; 得到节点设计变量不再是耦合关系, 可以方便地求出结构物理量的二阶导数, 从而利用变量可分离对偶优化算法进行高效的寻优; 研究成果不仅丰富了 ICM 方法的内涵, 推动了其发展, 而且对变密度的节点拓扑方法也有参考的裨益.

关键词 结构拓扑优化, ICM 方法, 变量非耦合, 节点拓扑变量

中图分类号: O343.1 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-24-066

ICM METHOD WITH A MAPPING BASED ON NODE-UNCOUPLED
TOPOLOGY VARIABLES¹⁾Peng Xirong^{*,2)} Sui Yunkang^{†,3)} Zheng Yonggang^{**}^{*}(School of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, Hunan, China)[†](College of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)^{**}(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

Abstract An ICM (independent continuous mapping) method with the mapping of node-uncoupled topology variables is proposed in this paper, which is applied to model and solve the structural topology optimization problems. Firstly, the

2024-02-02 收稿, 2024-06-06 录用, 2024-06-07 网络版发表.

1) 湖南省自然科学基金(2022JJ30113), 湖南省教育厅重点项目(21A0507), 大连理工大学工业装备结构分析优化与CAE软件全国重点实验室开放基金(GZ23104)资助.

2) 通讯作者: 彭细荣, 教授, 主要研究方向为结构优化设计. E-mail: pxr568@163.com

3) 通讯作者: 隋允康, 教授, 主要研究方向为结构优化设计. E-mail: ysui@bjut.edu.cn

引用格式: 彭细荣, 隋允康, 郑勇刚. 节点拓扑变量非耦合映射的 ICM 方法. 力学学报, 2024, 56(8): 2468-2481

Peng Xirong, Sui Yunkang, Zheng Yonggang. ICM method with a mapping based on node-uncoupled topology variables. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(8): 2468-2481

ground structure is meshed into nodes and elements. Independent and continuous topology variables are defined on the nodes, and an uncoupled mapping is established based on elemental bilinear interpolation, replacing the element-based independent and continuous topology variables. The existence or absence of elements is continuously approximated, enabling the filtering and identification of node topology variables and the interpolation of physical quantities within elements. An optimization model based on node topology design variables is derived, and a second-order dual programming algorithm based on separable variables is employed for solving. Additionally, an improved rounding technique for the optimal topology is proposed. Secondly, the modeling and solving process is demonstrated by applying the topology optimization to minimize structural weight (or volume) under displacement constraints. Finally, numerical examples of displacement-constrained topology optimization under single-load and multi-load scenarios are presented, and the computational results validate the effectiveness of the proposed method. The research in this paper has the following advantages: It overcomes the defects of previous research based on elemental topology variables, i.e., the optimal structural boundary is zigzagged, and obtains optimal structures with smooth and clear topological boundaries. The definitions of node topology variable and element topology function fields are given. The 5 criteria, which must be followed to construct the topology variable field, are extracted. Errors in the research on the ICM method based on node topology variables are addressed. The node design variables are no longer coupled, allowing for the convenient calculation of the second derivatives of structural quantities. This facilitates efficient optimization using dual optimization algorithms based on separable variables. The research not only enriches the connotation of the ICM method and promotes its development but also provides valuable references for the variable-density method based on node variables.

Key words structural topology optimization, ICM (independent continuous and mapping) method, uncoupled variable, nodal topology variables

引言

伴随着连续体基结构的提出^[1], 出现了以整块连续体设计区域替代骨架类组成的离散基结构处理, 于是在结构拓扑优化中, 基结构研究对象从原有的离散结构扩充到连续体结构. 学者和工程师们都为之振奋的是: 连续体结构拓扑优化的结果多数趋近于骨架结构. 假设离散基结构的难度在于预定节点的位置和数量的先验性悖论, 又由于邻近节点以构件相连而远离的节点不应当直接链接, 如何把握相关的度则是另一重困难; 然而, 上述困难在连续体基结构中却不复存在, 原因在于——节点与构件的布局属于优化的结果, 完全无须无根据地预设, 这是令人振奋的根本缘故. 自从 Bendsoe 等^[1]于 1988 年提出了基结构的新概念之后, 连续体结构拓扑优化的各种方法如雨后春笋般大量涌现.

连续体基结构通常剖分为细小的、整齐划一的有限元网格, 然后顺序地进行结构分析、建立优化模型和求解. 尽管有的方法不用上述有限元网格建立优化模型, 却免不了在网格上进行结构分析. 每次寻优迭代时, 通过某种方式确定网格内的材料是删除还是保留, 为了防止有限元分析重新划分网格, 并

且有利于迭代中方便地恢复某些删除过的区域, 通常删除的区域并不需要真的删除, 而是以相对于保留区域来说非常弱 (接近 0) 的一种材料代替.

连续体结构拓扑优化均匀化方法作为出现的第一种方法^[1], 定义微结构尺寸作为单元的拓扑设计变量; 均匀化方法的计算较为复杂, 并且不能付诸制造, 因此促进学者们探索出了其他的种种方法. 例如较早提出的变厚度法, 本质上是把不独立的单元拓扑变量挂靠单元厚度上^[2], 来确定此单元是删除还是保留.

虽然变密度法较变厚度法有了单元删除或保留的做法, 不过那是依靠了并非真实存在的人工密度. 该方法用 0 表示对应的单元被删除, 1 表示对应的单元被保留, 采取惩罚函数使单元人工密度变量向 0 或 1 逼近, 典型的材料插值方案如 SIMP 模型^[3].

在 ICM (独立、连续和映射) 方法中, 单元 i 的拓扑变量 t_i 不再挂在低层次的变量上, 而是拥有了自己独立拓扑优化层次的设计变量, $t_i = 0$ 表示该单元对应的材料为空洞, $t_i = 1$ 表示该单元对应的材料为实有, 以 $[0, 1]$ 区间上的连续拓扑变量逼近离散拓扑变量, 映射包括两部分, 是指阶跃函数的精确变换和过滤函数逼近阶跃函数的近似变换, 从而可以

建立连续变量的结构拓扑优化模型^[4-7].

ESO (进化结构优化) 方法^[8] 不建立优化问题的数学规划模型, 而是借助生物进化方式的启发, 依据单元敏度数, 直接对单元进行渐进删除.

前述各种方法具有的共同特点是每个单元只有一个拓扑变量, 或者说此变量控制了相关的单元. 如此, 便会产生一个问题: 多个单元在汇交点即在节点上, 优化结果常常会有多个拓扑变量值, 于是这一大类方法得到的最优拓扑, 在边界上会出现锯齿形, 如图 1 所示.

有没有办法能够克服锯齿形? 很容易得到解决问题的思路: 必须使每个节点得到唯一的数值, 因此应当取节点设计变量代替单元设计变量. 也就是说, 此时每个单元上所有点的拓扑变量不再是个常数, 而是一个预定函数形式的拓扑设计的场分布, 只是由计算的结果来确定该场需要待定的参数.

在进行本文研究欲聚焦的节点拓扑变量的寻优之前, 为了使回顾具有代表性的完整, 下面提及另一类基结构方法——以边界控制材料的删除或保留区域的做法: 水平集方法以水平集函数的边界演化来建立优化模型以确定材料的最优分布^[9]. 拓扑导数方法通过生成孔洞, 以孔洞的边界形状为优化控制参数, 相当于将拓扑优化问题转化为形状优化问题^[10-11]. 相场法以材料界面变化实现拓扑变化^[12]. 以可移动变形组件法^[13-14] 为典型代表的一类以组件几何参数为优化设计变量的方法, 如可移动变形孔洞法^[15]、移动可变形杆件法^[16]、移动节点法^[17] 和几何投影法^[18-19] 等, 均是以几何组件的移动及边界形状实现拓扑变化. 上述各种方法均有明显的边界, 得到的最优拓扑图形往往边界光滑. 但是, 值得指出的是, 这类方法尽管边界是光滑的, 而其背后的有限元模型仍具有锯齿形边界, 如文献 [20] 中所展示的算例所示 (见 图 2). 刘宝收^[21] 以一个算例比较了依据光滑边界建立有限元模型分析的结果与依据光滑边界最优拓扑时其背后的基于单元人工密度有限元模

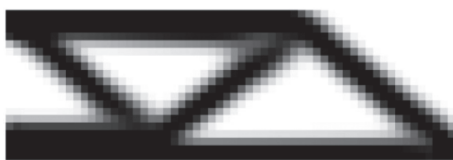


图 1 基于单元控制得到的最优拓扑的锯齿形边界

Fig. 1 Zigzag boundary of the optimized topology obtained by the element-controlled methods

型 (边界为锯齿形) 的结果, 发现采用 SIMP 惩罚模型的情况下, 两个有限元模型的柔顺度结果相差达 16.58%, 其分析用的模型如图 3 所示.

本引言从另一角度, 主要侧重于避免最优拓扑构型的锯齿, 追求光滑性, 进行了前面的综述. 可以看到, 文献 [1-8] 因按单元设计, 故存在最优构型边界的锯齿性, 文献 [9-20] 得到的最优拓扑其后的有限元模型也含有锯齿性问题. 为此在前面还提到, 实

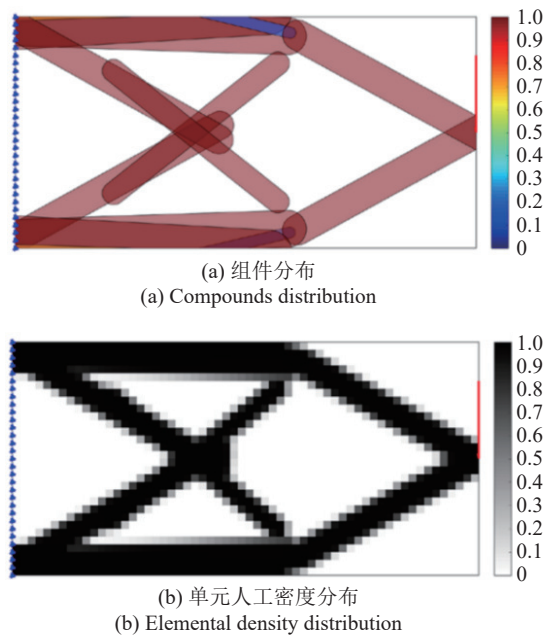


图 2 组件类方法得到的边界光滑的最优拓扑及其背后基于单元的人工密度场分布

Fig. 2 Optimized topology with smooth boundary obtained by compounds-based methods and its elemental density distribution

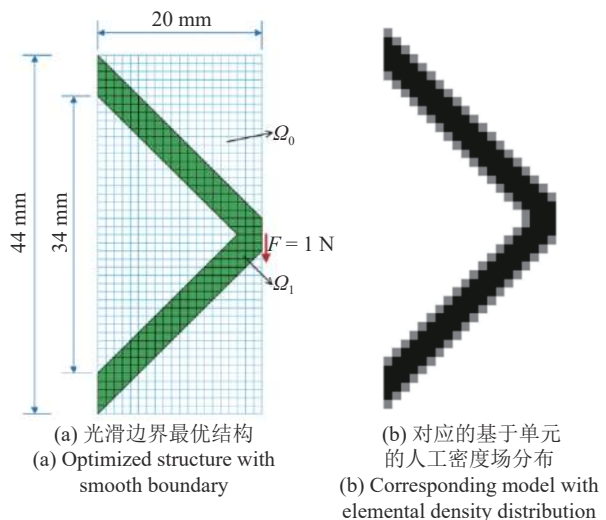


图 3 比较光滑边界结构与其后对应的基于单元人工密度场的分析模型

Fig. 3 Analysis models to compare the structure with smooth boundary and its corresponding model with elemental density distribution

现光滑的途径是: 用网格节点的拓扑变量定义网格单元上各点拓扑变量的一个连续分布场, 用以代替控制网格单元的唯一设计变量. 这一思想最先在变密度法中提出. Matsui 等^[22]和 Rahmatalla 等^[23]提出了基于节点设计变量的变密度法, 并探讨了密度场连续性对结构刚度拓扑优化结果的影响. 龙凯等^[24]把节点变量的概念从变密度法引入到 ICM 方法, 提出了节点独立连续映射方法. 朱本亮等^[25]基于节点密度插值进行了多材料柔顺机构拓扑优化研究. Kim 等^[26]开发了基于节点密度的三维拓扑优化 Matlab 代码. Kim 等^[27]考虑几何不确定性, 提出基于节点密度的可靠性拓扑优化方法. Li 等^[28]基于节点密度求解考虑塑性的三维拓扑优化问题. Gonçalves 等^[29]基于节点设计变量, 采用无网格技术中的径向点插值方法与双向进化结构拓扑优化方法 (BESO) 结合, 提出了一种新的结构拓扑优化方法.

为了方便于读者理解本文的研究, 这里顺序地简要回顾一下单元变量要点和节点变量要点.

基于单元设计变量^[4-7], 有如下的单元体积和单元刚度矩阵

$$v_i = f_v(t_i)v_i^0, \quad \mathbf{k}_i = f_k(t_i)\mathbf{k}_i^0 \quad (1)$$

其中

$$v_i^0 = \int_{\Omega} d\Omega, \quad \mathbf{k}_i^0 = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2)$$

分别对应于实体单元的体积和单元刚度矩阵, 可称为单元固有体积和单元固有刚度矩阵. $f_v(t_i)$ 和 $f_k(t_i)$ 分别为单元体积和单元刚度矩阵的映射函数. 在 ICM 方法中, 该映射函数称为过滤函数, 在变密度法中, 不存在单元体积映射函数, 而以弹性模量的惩罚函数实现单元刚度矩阵的映射过程.

基于节点设计变量的方法, 以基于 ICM 方法的工作^[24]为例, 龙凯等^[24]对于每个节点定义一个设计变量, 单元内任一点的设计变量值定义为

$$t = \sum_{j=1}^n N_j t_j \quad (3)$$

即先单元内插值得到单元内任意一点的 t , 然后对其利用幂函数形式的过滤函数进行过滤识别, 单元体积和单元刚度矩阵分别为

$$v_e = \int_{\Omega} f_v(t) d\Omega = \int_{\Omega} t^{\alpha_v} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n N_j t_j \right)^{\alpha_v} d\Omega \quad (4)$$

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega} f_k(t) \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} t^{\alpha_k} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n N_j t_j \right)^{\alpha_k} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (5)$$

式 (3)~式 (5) 中, n 为单元节点数, N_j 为单元形函数, α 为幂函数形式的过滤函数参数, 对单元体积为 α_v , 单元刚度矩阵为 α_k , Ω 表示单元所点区域, \mathbf{B} 为单元应变矩阵, \mathbf{D} 为单元材料的弹性矩阵, v_e 为单元 e 的体积, \mathbf{k}_e 为单元 e 刚度矩阵.

从式 (4) 及式 (5) 中可以看到, 由于 $\left(\sum_{i=1}^n N_j t_j \right)^{\alpha}$ 项的存在, t_j 变量之间是耦合的, 使得 v_e 和 \mathbf{k}_e 对 t_j 的二项导数存在交叉项, 即 $\frac{\partial^2 v_e}{\partial t_i \partial t_j} \neq 0$ 和 $\frac{\partial^2 \mathbf{k}_e}{\partial t_i \partial t_j} \neq 0$, 这对应用基于二阶导数的算法是不利的. 由此, 基于节点变量的变密度法^[22-27]通常应用基于一阶导数的算法, 如 MMA^[30] 算法.

由于龙凯等^[24]提出的基于节点变量的 ICM 方法引用了前面所述基于节点变量的变密度法, 因而节点变量的变密度法存在同样的问题: 单元上 4 个节点变量导致有关物理量成为变量耦合的函数. 本文不同于他们的做法, 在下一节里提出了一种全新的单元内表征材料逐点分布的连续场, 可以确保后续推导的物理量为节点设计变量的可分离函数, 发展出了一种基于节点设计变量非耦合映射的 ICM 方法.

1 节点拓扑变量与单元拓扑函数场定义及其相关物理量的推导

1.1 节点拓扑变量

虽然应当把“多”或“少”逼近“有”或“无”的概念从单元拓扑变量推广到节点拓扑变量, 但是“点”不占空间, 不能承载材料, 因此, 欲定义节点拓扑变量, 存在一定的难度. 文献^[24]引入文献^[22]的节点变量到 ICM 方法, 定义节点独立连续拓扑变量为在区间 $[0, 1]$ 上用于表征节点及所属单元“有”或“无”的实数, 当单元所有节点拓扑变量值为 1 或 0 时, 分别代表单元处于“有”或“无”的状态, 其余情况下单元处于 0~1 的中间状态^[22,24]. 上述定义不够严格, 节

点如何代表单元缺乏根据,模糊了节点拓扑变量与其周边单元网格内材料“有”或“无”的关系,错失了对于单元上材料分布场的描述。

本文在定义节点拓扑变量之前,进行了 3 方面的思考:

(1) 从一个单元每个节点的角度思考——4 个节点的拓扑变量值,反应了各自对于承载单元材料多少的能力之节点权重;

(2) 从汇交点若干个单元的角度思考——节点的拓扑变量值是所有汇交单元承载材料多少亦即对应拓扑函数场贡献值的平均;

(3) 从单元上所有点承载材料分布场角度思考——给定的分布场的数学形式中,4 个节点的拓扑变量值是待定参数,即场函数的 4 个独立变量。

1.1.1 节点拓扑变量的定义

结构总体拓扑优化结果,构成了材料分布的拓扑分布场,每个节点在各自充分小的邻域里,材料的“有”或“无”即 1 或 0 的特征,可以用材料“多”或“少”予以逼近,称之为 i 节点的拓扑变量 t_i ; $t_i = 0$ 与 $t_i = 1$ 分别表示拓扑分布场在此点邻域不分布材料与分布材料, $0 < t_i < 1$ 表示拓扑分布场在此点邻域取过渡值。

与基于单元的 ICM 方法类似,对离散的节点拓扑变量应用过滤函数识别进行连续化处理,转化为取值为 $[0, 1]$ 区间的连续拓扑变量。记过滤函数为 $f(t_i)$, 单元体积(或重量)和刚度矩阵的过滤函数为 $f_v(t_i)$ 和 $f_k(t_i)$ 。为方便叙述,不妨以平面问题为例,利用 4 节点单元的节点拓扑变量,采用双线性函数构成的形函数进行插值,产生单元过滤函数场和单元拓扑函数场。

1.2 单元拓扑函数场和点的拓扑值

构造单元拓扑分布场的数学函数之前,本文从前述第 3 点延伸出分布场的如下 5 点特性即构造须遵循的准则: (1) 场角点的节点边值性——场节点的函数值严格等于节点拓扑变量值; (2) 场分布的有界性——场函数在单元上任意点的拓扑值都在 $[0, 1]$ 之间; (3) 场函数的连续可微性——所有单元的场函数的都是连续可微的; (4) 场函数变量的非耦合性——依场函数推导得到的物理性能都具有变量可分离特点; (5) 场函数的柔缓性——场函数取较低的非线性,以确保性能的柔和与缓慢。

1.2.1 单元拓扑函数场的定义

采用节点拓扑变量进行单元内插值,表达单元内任意一点对材料分布的贡献,得到“单元的拓扑函数场”,其上任意点的数值简称为“点的拓扑值”, $t(\xi, \eta) \in [0, 1]$, 其数学定义由如下两步得出

$$f[t(\xi, \eta)] = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta) f(t_j) \quad (6)$$

即

$$t(\xi, \eta) = f^{-1} \left[\sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta) f(t_j) \right] \quad (7)$$

其中, t_j 为单元 4 个节点上的拓扑变量值, j 指该单元节点编号, ξ 和 η 为自然坐标变量, 在 $[-1, 1]$ 上取值, 单元的 4 个节点的自然坐标 (ξ, η) 顺序为 $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ 和 $(-1, 1)$, $f(t)$ 为过滤函数, N_j 为形函数^[31]

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

下面验证式 (6) 定义的场函数符合 5 点准则。

(1) 由形函数的 Delta 函数性质可知

$$N_j(\xi_k, \eta_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (9)$$

代入式 (6), 满足节点的边值性即准则 1。

(2) 由式 (8) 可知, 形函数满足

$$0 \leq N_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

又由过滤函数性质有

$$0 \leq f(t_j) \leq 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (11)$$

将式 (10) 与式 (11) 相乘并求和有

$$0 \leq f(t) = \sum_{j=1}^N N_j f(t_j) \leq \sum_{j=1}^N N_j = 1 \quad (12)$$

从而式 (6) 满足场分布的有界性即准则 2。

(3) 因为形函数式 (8) 及过滤函数 $f(t_i)$ 均是连续可微的, 由此式 (6) 也是连续可微的, 满足准则 3。

(4) 在后面的推导中将会看到准则 4 是满足的。

(5) 以 $t_1 = 0.9$, $t_2 = 0.7$, $t_3 = 0.8$ 和 $t_4 = 0.5$, 取过滤函数为幂指数等于 3 的幂函数, 画一个单元内的两个函数场如图 4, 依次对应式 (6) 和式 (7), 可以验证

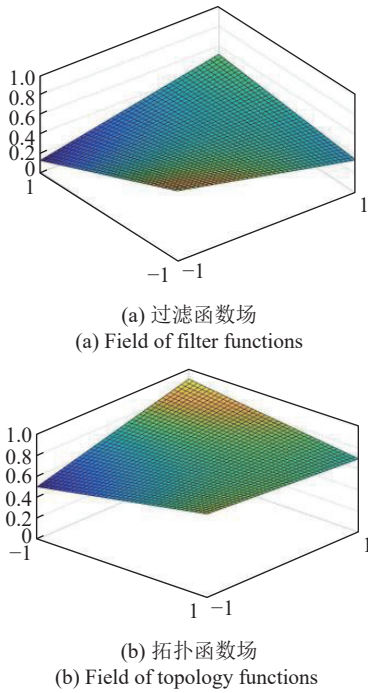


图 4 单元内过滤函数场和拓扑函数场示例

Fig. 4 A example for the fields of filter functions and topology functions within an element

场函数的柔缓性, 满足了准则 5.

1.3 单元体积和单元刚度矩阵的推导

单元体积为

$$v_e = \int_{\Omega} f_v(t) dx dy \quad (13)$$

将物理坐标的积分映射到自然坐标的积分, 得

$$\begin{aligned} v_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_v(t(\xi, \eta)) |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 N_j f_v(t_j) |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \\ &= \sum_{j=1}^4 f_v(t_j) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_j |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{J} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$ 和 $|\mathbf{J}|$ 为 Jacobian 矩阵及其行列式.

定义

$$v_{N_j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_j |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (15)$$

则

$$v_e = \sum_{j=1}^4 f_v(t_j) v_{N_j} \quad (16)$$

当 $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1$ (下标为单元局部编号) 时, 有

$$v_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 N_j |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\mathbf{J}| d\xi d\eta = v_e^0 \quad (17)$$

为实体单元的体积, 并且有

$$v_e^0 = \sum_{j=1}^4 v_{N_j} \quad (18)$$

类似地, 单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \sum_{j=1}^4 N_j f_k(t_j) |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \\ &= \sum_{j=1}^4 f_k(t_j) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} N_j |\mathbf{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (19)$$

定义

$$\mathbf{k}_{N_j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} N_j |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

则

$$\mathbf{k}_e = \sum_{j=1}^4 f_k(t_j) \mathbf{k}_{N_j} \quad (21)$$

同样, 当 $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1$ (下标为单元局部编号) 时, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \sum_{j=1}^4 N_j |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta = \mathbf{k}_e^0 \end{aligned} \quad (22)$$

为实体单元的刚度矩阵. 并且有

$$\mathbf{k}_e^0 = \sum_{j=1}^4 \mathbf{k}_{N_j} \quad (23)$$

2 相关量的一阶及二阶导数计算

结构总体积为

$$V = \sum_{i=1}^{N_e} v_i \quad (24)$$

其中, N_e 为单元总数.

代入式 (16) 得

$$V = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^4 f_v(t_j) v_{N_j}^{(i)} \quad (25)$$

应用节点总体编号与节点单元编号之间的映射

关系, 上述双重求和可写成对节点总体编号的单层求和的形式

$$V = \sum_{i=1}^{N_n} \left[f_v(t_i) \left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) \right] \quad (26)$$

集合 I_i 为与节点 i 相连接的所有单元 e 在节点 i 所在位置的局部编号 j 组成的集合. 式中, $v_{N_j}^{(e)}$ 表示对单元 e 按式 (15) 计算的形函数 N_j 对应的值, N_n 为节点总数.

为说明得清楚, 采用图 5 所示的简单单元网格: 以总体节点编号 5 为例, 对应的节点拓扑设计变量为 t_5 , 与之相连的所有单元为单元①~④, 各单元在节点 5 位置的节点局部编号如表 1 所示.

所以, 式 (19) 中与节点 5 对应的系数为

$$\sum_{e,j \in I_5} v_{N_j}^{(e)} = v_{N_2}^{(1)} + v_{N_3}^{(2)} + v_{N_1}^{(3)} + v_{N_4}^{(4)} \quad (27)$$

类似地, 结构总刚度矩阵可表达为

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{k}_i \quad (28)$$

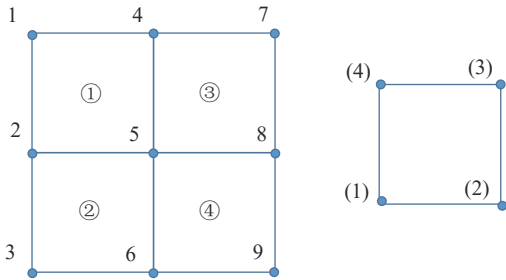


图 5 简单单元网格节点编号映射示例 (1,2,⋯,9 为节点总体编号, (1),(2),⋯,(4) 为节点单元局部编号, 各个单元的节点单元局部编号顺序相同, ①,②,⋯,④ 为单元编号)

Fig. 5 Illustration of the numbers of elements and nodes in a simple mesh (1,2,⋯,9 are the overall numbers of the nodes. (1),(2),⋯,(4) the local numbers of the elemental nodes, the local numbers of every element are the same order. ①,②,⋯,④ are the numbers of elements)

表 1 图 5 所示网格中节点 5 对应的单元及节点局部编号

Table 1 Local numbers of the nodes of the elements connected to the node 5 in Fig. 5

| Element number | Local numbers of the nodes of the elements connected to the node 5 |
|----------------|--|
| ① | (2) |
| ② | (3) |
| ③ | (1) |
| ④ | (4) |

代入式 (21) 得

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^4 f_k(t_j) \mathbf{k}_{N_j}^{(i)} \quad (29)$$

应用节点总体编号与节点单元编号之间的映射关系, 上述双重求和可写成对节点总体编号的单层求和的形式

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_n} \left[f_k(t_i) \left(\sum_{e,j \in I_i} \mathbf{k}_{N_j}^{(e)} \right) \right] \quad (30)$$

注意式 (28)~式 (30) 的求和式实质表示的是单元刚度矩阵按单元自由度编号进行组装成总刚度矩阵的过程.

从式 (26) 和式 (30) 可以看出, 通过本文所提出的节点拓扑变量过滤和插值方案, 结构总体积和总体刚度矩阵都表达成了节点拓扑设计变量 t_i 可分离的形式, 这一特征非常有利于应用 ICM 方法中惯常使用的基于可分离变量推导出的高效求解算法^[4-7].

按 ICM 方法, 通常优化模型中设计变量定义为

$$x_i = 1/f_k(t_i) \quad (31)$$

结构总体积与结构总刚度矩阵对设计变量的一阶导数应用链式求导法则有

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial t_i} \frac{dt_i}{dx_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_i} \frac{dt_i}{dx_i} \quad (32)$$

由式 (31) 可得

$$\frac{dt_i}{dx_i} = -\frac{[f_k(t_i)]^2}{f'_k(t_i)} \quad (33)$$

其中 $f'_k(t_i) = \frac{df_k(t_i)}{dt_i}$, 表示对 t_i 求导数, 以下各公式类似. 由式 (26) 可得

$$\frac{\partial V}{\partial t_i} = \left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) f'_v(t_i) \quad (34)$$

由式 (30) 可得

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_i} = \left(\sum_{e,j \in I_i} \mathbf{k}_{N_j}^{(e)} \right) f'_k(t_i) \quad (35)$$

式 (33) 和式 (34) 代入式 (32) 中前一式子得到

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) f'_v(t_i) \frac{[f_k(t_i)]^2}{f'_k(t_i)} \quad (36)$$

式 (33) 和式 (35) 代入式 (32) 中后一式子得到

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = - \left(\sum_{e,j \in I_i} \mathbf{k}_{N_j}^{(e)} \right) [f_k(t_i)]^2 \quad (37)$$

式 (36) 和式 (37) 仅含变量 x_i 对应的 t_i , 其对求二阶导数将不存在交叉项. ICM 方法中目标函数通常用二阶近似, 由式 (36) 可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = & \left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) \frac{f_k^3(t_i)}{[f_k'(t_i)]^3} \cdot \\ & \left\{ f_k(t_i) [f_v''(t_i) f_k'(t_i) - f_v'(t_i) f_k''(t_i)] + \right. \\ & \left. 2 f_v'(t_i) [f_k'(t_i)]^2 \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

3 基于 ICM 方法的建模及求解

以下以位移约束结构拓扑优化问题为例, 阐述基于映射节点非耦合拓扑变量的 ICM 方法的优化模型及求解过程. 以结构总体积最小化为目标, 受位移约束的拓扑优化模型为

$$\left. \begin{aligned} \min_{t \in E^N} V(t) \\ \text{s.t. } u_j(t) \leq \bar{u}_j \quad (j = 1, 2, \dots, M) \\ t_i \leq t_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

其中, u_j 为约束点位移函数, \bar{u}_j 为位移约束值 (位移下限约束可以通过不等式两边同乘负号转化为上限约束), N 为节点总数, 每一个节点对应于一个结构拓扑设计变量 t_i , M 为位移约束总数.

利用过滤函数对离散的节点拓扑设计变量进行过滤识别, 转化为 $[0, 1]$ 之间连续的节点拓扑设计变量, 单元内任一点的材料分布的“有”或“无”线性插值近似. 结构总体积表达为式 (26), 结构总刚度矩阵表达为式 (30). 定义式 (31) 所示的设计变量 x_i , 结构总体积对设计变量的一阶及二阶层数分别为式 (36) 和式 (37) 所示. 结构总体积以二阶泰勒近似表示为

$$V(\mathbf{x}) \approx V(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial V}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} (x_i - x_i^0)^2 \quad (40)$$

略去对优化结构没有影响的目标函数中的常数项, 则得到二阶近似的目标函数为

$$V(\mathbf{x}) \approx \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x_0} - x_i^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \Big|_{x_0} \right) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \Big|_{x_0} x_i^2 \quad (41)$$

位移敏感度分析采用伴随法. 对位移分量 u_j , 引入向量

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}^T \quad (42)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为只在第 j 个分量上为 1, 其余元素都为 0 的向量, 称为单位力向量.

求解随方程

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Lambda}_j = \boldsymbol{\alpha}_j \quad (43)$$

得到伴随向量 $\boldsymbol{\Lambda}_j$. 相应载荷工况称为虚工况.

从而可求得位移 u_j 对各个设计变量 x_i 的偏导数

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\boldsymbol{\Lambda}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \quad (44)$$

从而, 位移由一阶泰勒展式近似为

$$u_j(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|_{x_0} (x_i - x_i^0) \quad (45)$$

将式 (37) 代入式 (44) 得

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i^2} \boldsymbol{\Lambda}_j^T \left(\sum_{e,l \in I_i} \mathbf{k}_{N_l}^{(e)} \right) \mathbf{u} \quad (46)$$

注意, 为避免下标 j 的意义混乱, 式 (46) 中的下标 j 换为了下标 l .

同样, 与式 (25) 变换到式 (26) 反向应用节点总体编号与节点单元局部编号的映射关系, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|_{x_0} x_i^0 &= \sum_{i=1}^{N_n} \frac{1}{x_i^0} \boldsymbol{\Lambda}_j^T \left(\sum_{e,l \in I_i} \mathbf{k}_{N_l}^{(e)} \right) \mathbf{u} = \\ & \sum_{i=1}^{N_n} f_k(t_i^0) \boldsymbol{\Lambda}_j^T \left(\sum_{e,l \in I_i} \mathbf{k}_{N_l}^{(e)} \right) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_e} \boldsymbol{\Lambda}_j^T \left(\sum_{j=1}^4 f_k(t_i^0) \mathbf{k}_{N_j} \right) \mathbf{u} = \\ & \sum_{i=1}^{N_e} \boldsymbol{\Lambda}_j^T \mathbf{k}_i \mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}_j^T \left(\sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{k}_i \right) \mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{u} = u_j(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (47)$$

从而

$$u_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|_{x_0} x_i \quad (48)$$

定义

$$a_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x_0} - x_i^0 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \Big|_{x_0} \quad (49)$$

$$b_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \Big|_{x_0} \tag{50}$$

$$c_{ji} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|_{x_0} \tag{51}$$

得到二阶近似模型为

$$\left. \begin{aligned} \min_{i \in E^N} \sum_{i=1}^{N_n} (b_i x_i^2 + a_i x_i) \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^{N_n} c_{ji} x_i \leq \bar{u}_j \quad (j = 1, 2, \dots, M) \\ 1 \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N_n) \end{aligned} \right\} \tag{52}$$

其中, 由式 (31) 有 $\bar{x}_i = 1/f_k(t_i)$.

对式 (52) 可以采用 ICM 方法惯常使用的对偶二次规划法求解^[4-7].

ICM 方法中过滤函数可取幂函数等多种形式, 取幂函数形式时可记为

$$f_v(t_i) = t_i^{\alpha_v}, \quad f_k(t_i) = t_i^{\alpha_k} \tag{53}$$

代入到式 (36) 和式 (38) 可得到结构总体积对设计变量的一阶和二阶导数为

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = - \left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) \frac{\alpha_v}{\alpha_k} t_i^{\alpha_v + \alpha_k} = - \left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) \frac{\alpha_v}{\alpha_k} x_i^{-\frac{\alpha_v + \alpha_k}{\alpha_k}} \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \left(\sum_{e,j \in I_i} v_{N_j}^{(e)} \right) \frac{\alpha_v (\alpha_v + \alpha_k)}{\alpha_k^2} x_i^{-\frac{\alpha_v + 2\alpha_k}{\alpha_k}} \tag{55}$$

将式 (54) 和式 (55) 代入到式 (49) 和式 (50) 可求出式 (52) 中目标函数的系数 a_i 和 b_i , 由式 (46) 和式 (51) 可求出式 (52) 中约束函数的系数 c_{ij} .

对式 (52) 可以采用 ICM 方法惯常使用的对偶二次规划法求解^[4-7].

收敛准则取为

$$dV = (V^{(k+1)} - V^{(k)})/V^{(k)} < \varepsilon \tag{56}$$

其中, ε 为设定的收敛限值.

4 最优拓扑构型圆整技术的改进

式 (49) 表示前后两次迭代目标函数的相对误差足够小时即停止迭代, 认为得到了最优解. 此时得到

的拓扑分布场是处于 $[0, 1]$ 之间的连续分布场, 还需要将拓扑变量进行连续解到离散解的逆映射, 亦即执行对结构拓扑构型的圆整技术.

这里可采用两种技术: 单元级圆整化和结构级圆整化.

(1) 单元级圆整化.

回顾单元拓扑变量模型, 其单元以当前拓扑变量值与阈值比较而定或保留或删除的两种情况, 则保留单元组合的结构边界必然是锯齿型.

节点拓扑变量模型则不然, 每个单元含 4 个节点拓扑变量信息, 若能够从节点-单元进行探讨, 将会改善圆整技术. 圆整之前有 3 种情况: 4 个节点拓扑变量值皆不小于阈值, 只有 1 或 2 个节点拓扑变量值不小于阈值, 只有 3 个节点拓扑变量值皆不小于阈值.

简言之, 上述情况 1 和 2 分别保留或删除该单元. 情况 3 做如下详细讨论: 拓扑变量值皆不小于阈值的 3 个节点构成了等边直角三角形, 根据前面叙述的“柔缓性”, 应当保留该等边直角三角形, 删除另一个等边直角三角形. 如此操作, 保留单元组合的结构边界必然消除了锯齿型.

(2) 结构整体级圆整化.

依据节点拓扑变量分布, 可以画出结构拓扑分布场的等值线, 按照阈值进行结构级整体圆整化: 拓扑分布场等值线小于阈值的区域为删除区域, 拓扑分布场等值线等于阈值所围成的边界线即为结构最优拓扑构型的边界线.

本节最后说明两点: 其一, 对于阈值讨论取定的做法, 本文作者将在得到高清晰度边界的另一篇论文里叙述; 其二, 本文提出的第二步结构拓扑分布场“等值线圆整技术”可移植到单元拓扑变量模型的问题中.

5 算例及讨论

在本节的所有算例中, 过滤函数的幂函数系数取为 $\alpha_v = 1$ 及 $\alpha_k = 5$, 为防止结构分析时总刚度矩阵奇异, 以 $t_i = 0.01$ 代替拓扑设计变量下限 0.

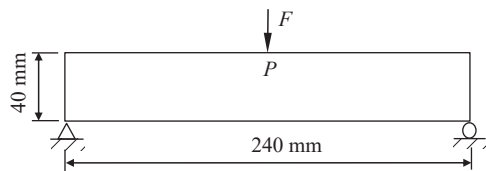


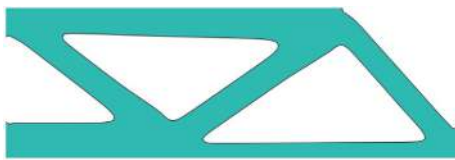
图 6 MBB 梁力学简图

Fig. 6 Mechanical diagram for the MBB beam

算例 1^[24]: 单载荷工况下单个位移约束算例

如图 6 所示 MBB 梁结构: 基结构尺寸为 $240\text{ mm} \times 40\text{ mm} \times 0.01\text{ mm}$; 弹性模量 210 GPa ; 泊松比 0.3 ; 左下角约束水平及竖向位移, 右下角点仅约束竖向位移; 集中载荷 $F = 20\text{ N}$ 垂直向作用于顶面中点处; 位移约束条件为 P 点垂直向下位移小于 1.20 mm . 利用结构和载荷的对称性, 采用一半结构进行分析和优化, 过滤半径取 4.0 mm , 采用 120×40 网格.

取文献 [24] 相同的收敛准则及限值 0.001 , 迭代 32 次计算收敛, 用时 4.896 s , P 点垂直向下位移为 -1.190 mm , 满足位移约束条件, 最优结构的总体积为基结构的 34.70% , 圆整化之后体积比为 35.77% , 位移 -1.190 mm . 最优结构拓扑如图 7(a) 所示. 目标函数及位移约束的迭代曲线如图 8 所示, 收敛过程快速平稳. 与单元 ICM 方法结果 (如图 1 所示) 相比, 没有锯齿形边界. 文献 [24] 采用 120×40 网格时迭代 36 次收敛, 最优拓扑如图 7(b), 最优体积比 42.58% , 位移 -1.199 mm . 同样满足位移约束情况下,



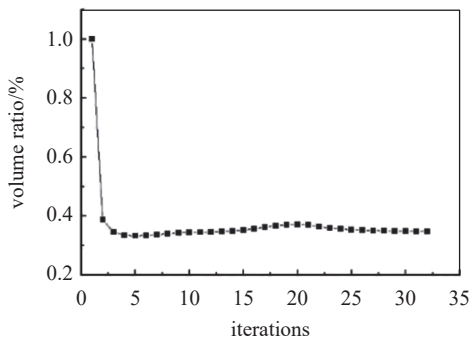
(a) 本文结果
(a) Result obtained by this paper



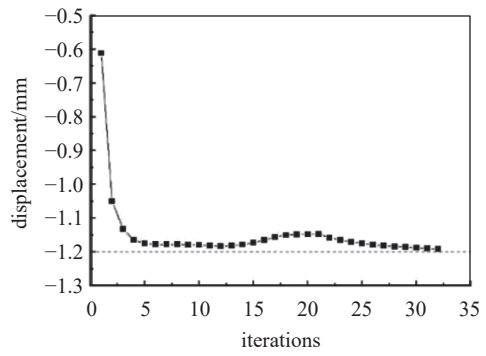
(b) 文献 [24] 结果
(b) Result obtained by Ref. [24]

图 7 算例 1 的最优拓扑结构

Fig. 7 Optimized structure topology of example 1



(a) 体积比
(a) Volume ratio



(b) 位移
(b) Displacement

图 8 算例 1 的迭代曲线

Fig. 8 Iteration curves of example 1

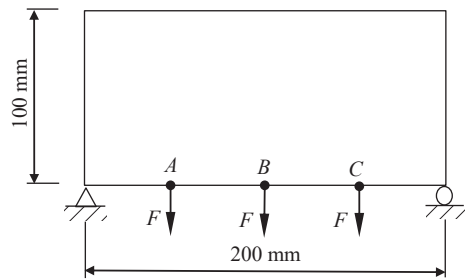


图 9 算例 2 力学简图

Fig. 9 Mechanical diagram for example 2

本文结构更轻, 边界更光滑, 收敛更快.

算例 2^[24]: 单载荷工况下多个位移约束算例

如图 9 所示平面结构, 基结构尺寸为 $200\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 5\text{ mm}$, 弹性模量 210 GPa ; 泊松比 0.3 ; 左下角约束水平及竖向位移, 右下角点仅约束竖向位移; 集中载荷 $F = 10\text{ kN}$ 分别作用于下边界 $1/4$, $1/2$ 和 $3/4$ 分点 (分别对应图 9 中 A , B 和 C 3 点), 方向竖直向下. 位移约束为 3 个载荷作用点竖直向下位移小于 0.3 mm . 过滤半径为 7.5 mm .

取文献 [24] 相同的收敛准则及限值 0.001 , 采用 40×20 及 100×50 两种网格计算, 验证算法是否有网格依赖性问题. 文献 [24] 的结果及本文两种网格计算结果比较见表 2, 最优结构拓扑见图 10.

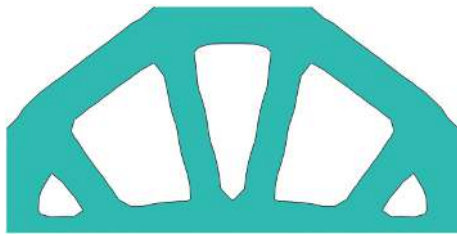
表 2 算例 2 的结果比较

Table 2 Comparison of results for example 2

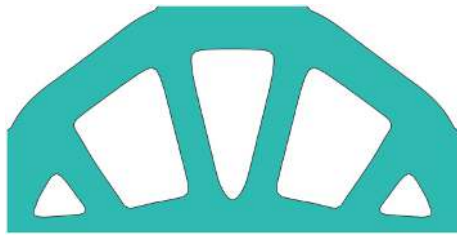
| Cases | Volume ratio/% | Displacement/mm (A, B, C) | Iterations |
|-----------------------------|----------------|------------------------------|------------|
| Ref. [24] | 43.77 | -0.2998, -0.2998, -0.2998 | 32 |
| presented paper 40 × 20 | 38.26 | -0.299, -0.298, -0.299 | 24 |
| presented paper 100 × 50 | 43.31 | -0.299, -0.299, -0.299 | 24 |

40 × 20 网格时, 计算耗时 2.309 s, 圆整后的最优体积比 39.67%, A, B 和 C 3 点位移 -0.292, -0.295 和 -0.292 mm. 100 × 50 网格时, 计算耗时 3.965 s, 圆整后的最优体积比 44.33%, A, B 和 C 3 点位移 -0.299, -0.295 和 -0.299 mm. 比较表 2 中圆整前的结果, 可见圆整化对最优模型的结果影响很小.

两种不同网格结果相同, 表明算法没有网格依赖性问题. 与文献 [24] 的结果对比, 同样满足位移约



(a) 本文 40 × 20 网格结果
(a) Result obtained by this paper for 40 × 20 mesh



(b) 本文 100 × 50 网格结果
(b) Result obtained by this paper for 100 × 50 mesh



(c) 文献 [24] 40 × 20 网格结果
(c) Result obtained by Ref. [24] for 40 × 20 mesh

图 10 算例 2 的最优拓扑结构
Fig. 10 Optimized structure topology of example 2

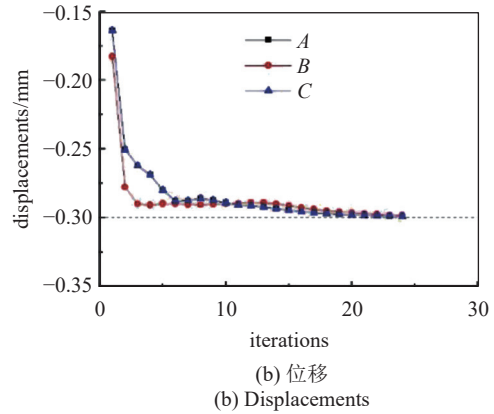
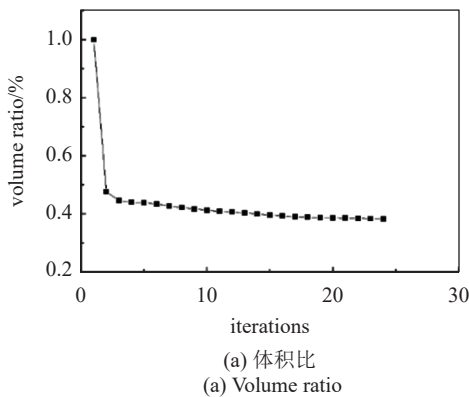


图 11 算例 2 的 40 × 20 网格时迭代曲线
Fig. 11 Iteration curves of example 2 with 40 × 20 mesh

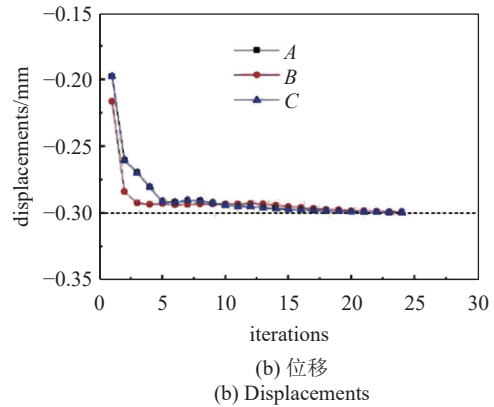
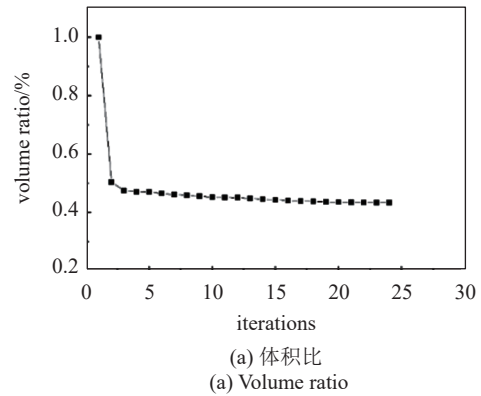


图 12 算例 2 的 100 × 50 网格时迭代曲线
Fig. 12 Iteration curves of example 2 with 100 × 50 mesh

束情况下, 本文结构更轻, 边界更光滑, 收敛更快.

两种不同网格时的目标函数及位移约束的迭代曲线如图 11 和图 12 所示, 收敛过程快速平稳.

算例 3^[32]: 多载荷工况下多个位移约束算例

正方形平板结构如图 13 所示, 弹性模量 $E = 1$, 泊松比 0.3. 平板左边界固定约束, 受两种载荷工况作用, 工况 1 为一集中载荷 $F_1 = 1$ 竖直向上作用于右上角, 工况 2 为一集中载荷 $F_2 = 1$ 竖直向下作用

于右下角. 采用 150×150 网格进行分析和优化. 过滤半径取 3.

Andreassen 等^[32] 采用 SIMP 法, Wei 等^[33] 采用参数化水平集方法 (简称为 LSM), 但均是求解体积约束下柔顺度极小问题, 在多工况时, 采取加权转化为单目标优化问题, 对此问题 Andreassen 等^[32] 和 Wei 等^[33] 均取工况间柔顺度加权系数为 0.5, 体积约束比 40%. 本文求解的是位移约束下体积极小化问题, 为方便与文献 [32-33] 比较, 通过设定适当的位移约束, 使最优体积比正好 40%, 此例位移约束为 32.320 和 -32.32 mm.

收敛准则取与文献 [32] 相同

$$dt = \max(t^{(k+1)} - t^{(k)}) < \varepsilon \quad (57)$$

收敛限值取 0.01.

因文献 [33] 中程序 150×150 网格时内存耗费太大, 耗时太长, 故此比较时采取 50×50 网格计算. 3 种方法计算结果比较见表 3 及图 14 所示.

相比本文方法及 SIMP 方法, 文献 [33] 中的 LSM 方法采取 50×50 网格时用时是 6 ~ 7 倍, 迭代次数则达到了文献 [33] 程序设定的最多迭代数 200 次, 也是本文方法的 5 倍, 其位移值更小是由于其材料弹性模量的模型为 $E = tE_0$, 与本文及 SIMP

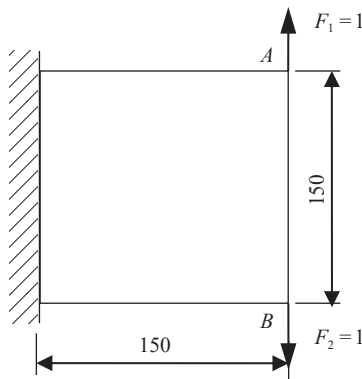


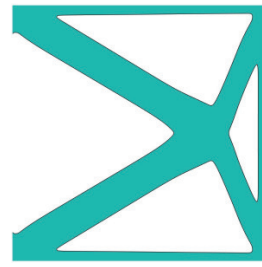
图 13 算例 3 力学简图

Fig. 13 Mechanical diagram for example 3

表 3 算例 3 的结果比较

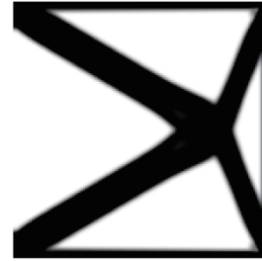
Table 3 Comparison of results for example 3

| Methods | Volume ratio/% | Displacements/mm | | Iterations | Time/s |
|---------|----------------|------------------|---------|------------|---------|
| | | A | B | | |
| ICM | 40 | 32.314, | -32.314 | 41 | 25.298 |
| | | 32.286, | -32.285 | | |
| SIMP | 40 | 28.190, | -28.190 | 59 | 30.045 |
| | | 28.190, | -28.190 | | |
| LSM | 40 | | | 200 | 169.980 |



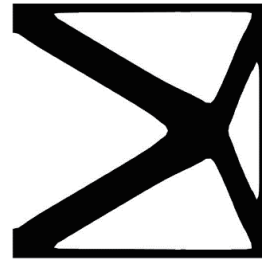
(a) 本文结果

(a) Result obtained by this paper



(b) 文献 [32] SIMP 法结果

(b) Result obtained by SIMP method in Ref. [32]



(c) 文献 [33] LSM 法结果

(c) Result obtained by LSM method in Ref. [33]

图 14 算例 3 的最优拓扑结构

Fig. 14 Optimized structure topology of example 3

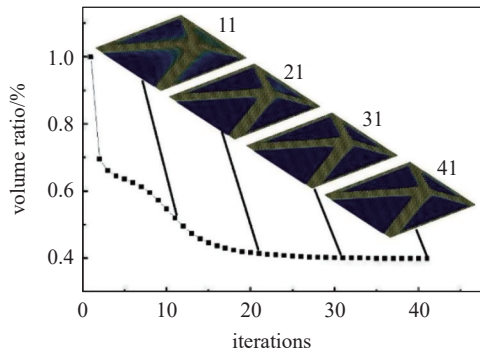
法中的 $E = t^{\alpha} E_0$ 不同. 与文献 [32] 的结果对比, 位移值相差不大, 但本文结果边界更光滑, 没有锯齿形, 本文方法迭代次数更少, 用时更短.

本文方法圆整之后体积比为 40.87%, A 及 B 点位移分别为 30.319 及 -30.319, 与圆整前相差很小. 目标函数及位移约束的迭代曲线, 以及典型迭代步的节点拓扑设计变量分布场如图 15 所示, 收敛过程快速平稳.

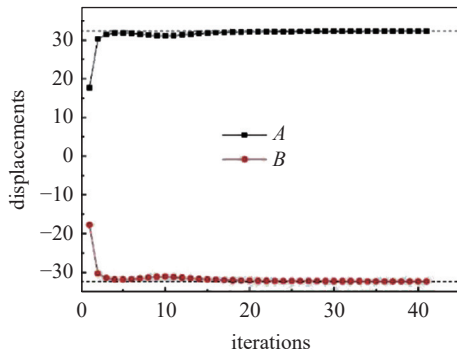
算例 4: 三维位移约束问题算例

如图 16 所示 $60 \times 40 \times 20$ 三维长方体, 材料弹性模量 $E = 1$, 泊松比 0.3. 长方体左端面固定约束, 右端面中点受一集中力 $F = 1$ 作用. 有限元网格为 $60 \times 40 \times 20$ 的边长为 1 的正方体单元, 过滤半径取为 3.0. 位移约束集中力作用方面向下位移 (位移竖直向上为正) 大于或等于 -10.

收敛准则取式 (56), 收敛限值 0.001. 经 42 次迭



(a) 体积比
(a) Volume ratio



(b) 位移
(b) Displacements

图 15 算例 3 的迭代曲线

Fig. 15 Iteration curves of example 3

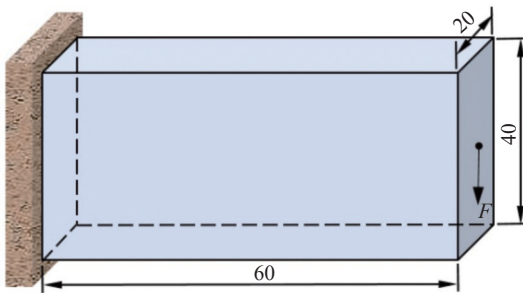


图 16 算例 3 力学简图

Fig. 16 Mechanical diagram for example 3

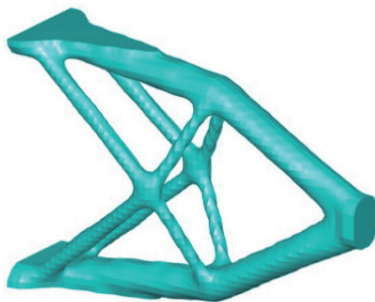


图 17 算例 4 最优拓扑

Fig. 17 Optimized structure of example 4

代收敛, 最优拓扑结构如图 17 所示. 最优体积比为 8.82%, 位移约束值为-9.96, 满足约束条件. 验证了本文方法对三维问题是可行的.

6 结论

本文提出了全新的基于节点拓扑设计变量的 ICM 方法, 该方法采用结构单元网格上节点独立离散拓扑变量, 并应用映射逼近的概念进行离散到连续的变化, 转化为节点独立连续变量. 通过形函数插值构造单元内过滤函数场和拓扑函数场, 进行推导得到结构物理量如体积、位移等对设计变量的非耦合的近似显式表达, 从而建立设计变量可分离的结构优化模型, 方便应用基于变量可分离的二阶对偶规划算法, 对于最优拓扑构型从连续到离散逆映射的圆整技术进行了改善. 上述基于单元节点设计变量系统的建模和求解方法, 本文称之为节点拓扑变量非耦合映射的 ICM 方法.

本文以常见的位移约束下结构重量 (或体积) 极小化的结构拓扑优化问题为例, 示例了上述所提出的建模及求解过程, 并给出了单载荷工况和多载荷工况下的位移约束拓扑优化的算例. 结果表明, 所提出的方法可以得到边界光滑清晰的最优拓扑结构, 验证了所提出方法的有效性. 数值计算经验表明, 过滤算法及过滤半径的作用与基于单元设计变量的方法是一致的. 一个大的过滤半径值会使边界上灰度节点数更多, 过渡边界更宽, 最优拓扑中“构件”数更少, 小直径的“构件”会在过滤操作中消失.

本文所提出的方法对涉及频率、应力或疲劳等结构性能的拓扑优化问题同样是适用的, 对其他单元类型如板壳单元也是适用的, 限于篇幅未做展开, 拟在后续展开相关研究. 该研究成果将单元 ICM 发展到了节点 ICM 方法, 同时保持了单元 ICM 方法所建立的优化模型具有变量可分离的优点. 相应的处理方案、建模和求解方法对变密度法必会有所裨益. 另外, 本文提出的最优拓扑构型第二种圆整技术即在结构级的做法, 可以移植到单元拓扑变量模型化问题的求解中, 给出消除锯齿性边界的一种近似做法.

参 考 文 献

1 Bendsoe P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Ap-*

- plied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224
- 2 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化. 大连理工大学学报, 1995, 35 (1): 1-9 (Cheng Gengdong, Zhang Dongxu. Topological optimization of plane elastic continuum with stress constraints. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35 (1): 1-9 (in Chinese))
 - 3 Mlejnek HP. Some aspects of the genesis of structures. *Structural Optimization*, 1992, 5(1): 64-69
 - 4 隋允康. 建模·变换·优化·结构综合方法新进展. 大连: 大连理工大学出版社, 1996 (Sui Yunkang. Modelling, Transformation, and Optimization-New Developments of Structural Synthesis Method. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996 (in Chinese))
 - 5 隋允康, 叶红玲. 连续体结构拓扑优化的 ICM 方法. 北京: 科学出版社, 2013 (Sui Yunkang, Ye Hongling. Continuum Topology Optimization Methods ICM. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))
 - 6 Sui YK, Peng XR. Modeling, Solving and Application for Topology Optimization of Continuum Structures: ICM Method Based on Step Function. Cambridge: Elsevier Inc., 2018
 - 7 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法新进展——概念深化及理论拓展. 北京: 科学出版社, 2023 (Sui Yunkang, Peng Xirong. New Progress in ICM Method for Structural Topology Optimization-Concepts Deepening and Theoretical Expansion. Beijing: Science Press, 2023 (in Chinese))
 - 8 Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, 1993, 49(5): 885-896
 - 9 Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed-algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49
 - 10 Eschenauer HA, Kobelev VV, Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 1994, 8(1): 42-51
 - 11 Norato J, Bendsoe M, Haber R, et al. A topological derivative method for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4-5): 375-386
 - 12 Blank L, Garcke H, Sarbu L, et al. Phase-field approaches to structural topology optimization. *International Series of Numerical Mathematics*, 2012, 160: 245-256
 - 13 Guo X, Zhang WS, Zhong WL. Doing topology optimization explicitly and geometrically-A new moving morphable components based framework. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, 81(8): 081009
 - 14 Zhang WS, Yuan J, Zhang J, et al. A new topology optimization approach based on moving morphable components (MMC) and the ersatz material model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(6): 1243-1260
 - 15 Zhang WS, Chen JS, Zhu XF, et al. Explicit three dimension topology optimization via moving Morphable void (MMV) approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 322: 590-614
 - 16 Hoang VN, Jang GW. Topology optimization using moving morphable bars for versatile thickness control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 317: 153-173
 - 17 Overvelde JT. The moving node approach in topology optimization. TU Delft University of Technology, Report No. EM 12.006, 2012
 - 18 Norato JA. A geometry projection method for the optimal distribution of short fiber reinforcements//ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2015
 - 19 Zhang S, Norato JA, Gain AL, et al. A geometry projection method for the topology optimization of plate structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 54(5): 1173-1190
 - 20 Simone C, Joseph M, Christian G, et al. Generalized geometry projection: a unified approach for geometric feature based topology optimization. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2020, 27: 1573-1610
 - 21 刘宝收. 基于清晰光滑边界的结构拓扑优化方法及应用研究. [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2021 (Liu Baoshou. The research and application on structural topology optimization based on clear and smooth boundary. [PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2021 (in Chinese))
 - 22 Matsui K, Terada K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59(14): 1925-1944
 - 23 Rahmatalla SF, Swan CC. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 27(1): 130-135
 - 24 龙凯, 左正兴. 连续体结构拓扑优化的节点独立连续映射法. 应用力学学报, 2009, 26(2): 212-217, 401 (Long Kai, Zuo Zhengxing. Node-based independent continuous mapping method for topological optimization of continuum structures. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2009, 26(2): 212-217, 401 (in Chinese))
 - 25 朱本亮, 张宪民, 李海等. 基于节点密度插值的多材料柔顺机构拓扑优化. 机械工程学报, 2021, 57(15): 53-61 (Zhu Benliang, Zhang Xianmin, Li Hai, et al. Topology optimization of multi-material compliant mechanisms using node-density interpolation scheme. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(15): 53-61 (in Chinese))
 - 26 Kim D, Ji Y, Lee J, et al. A MATLAB code of node-based topology optimization in 3D arbitrary domain for additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(11): 311
 - 27 Kim J, Lee I. Modeling of geometric uncertainties in topology optimization via the shift of design nodes. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(7): 191
 - 28 Li X, Zhang X, Zhang Y. Three-dimensional plasticity-based topology optimization with smoothed finite element analysis. *Computational Mechanics*, 2024, 73(3): 533-548
 - 29 Gonçalves DC, Lopes JDF, Campilho RDSG, et al. The radial point interpolation method combined with a bi-directional structural topology optimization algorithm. *Engineering with Computers*, 2022, 38(6): 5137-5151
 - 30 Svanberg K. The method of moving asymptotes- a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(3): 359-373
 - 31 Liu GR, Quek SS. The Finite Element: A Practical Course. Burlington: Elsevier Science Ltd., 2003
 - 32 Andreassen E, Clausen A, Lazarov BS, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(1): 1-16
 - 33 Wei P, Li Z, Li X, et al. An 88-line code for the parameterized level set method based topology optimization using radia basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(2): 831-849