

圆弧足被动行走机器人步态多重稳定性研究

暴雨萌, 饶晓波, 丁顺良, 高建设

RESEARCH ON MULTISTABILITY OF GAITS IN THE PASSIVE WALKING ROBOT WITH ROUND FEET

Bao Yumeng, Rao Xiaobo, Ding Shunliang, and Gao Jianshe

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-23-545>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

摩擦与滚阻对被动行走器步态影响的研究

STUDY ON THE INFLUENCE OF FRICTION AND ROLLING RESISTANCE ON THE GAIT OF PASSIVE DYNAMIC WALKER

力学学报. 2020, 52(1): 162-170

离散达芬映射中由边界激变所诱发的复杂的张弛振荡

COMPLEX RELAXATION OSCILLATION TRIGGERED BY BOUNDARY CRISIS IN THE DISCRETE DUFFING MAP

力学学报. 2017, 49(6): 1380-1389

基于步态切换的欠驱动双足机器人控制方法

CONTROL METHOD OF AN UNDERACTUATED BIPED ROBOT BASED ON GAIT TRANSITION

力学学报. 2018, 50(4): 871-879

一种压电驱动的三足爬行机器人

A PIEZOELECTRIC-DRIVEN THREE-LEGGED CRAWLING ROBOT

力学学报. 2021, 53(12): 3354-3365

时变张力作用下轴向运动梁的分岔与混沌

BIFURCATION AND CHAOS OF AXIALLY MOVING BEAMS UNDER TIME-VARYING TENSION

力学学报. 2019, 51(4): 1180-1188

余维三fold-fold-Hopf分岔下簇发振荡及其分类

BURSTING OSCILLATIONS AS WELL AS THE CLASSIFICATION IN THE FIELD WITH CODIMENSION-3 FOLD-FOLD-HOPF BIFURCATION

力学学报. 2021, 53(5): 1423-1438



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

圆弧足被动行走机器人步态多重稳定性研究¹⁾暴雨萌 饶晓波 丁顺良 高建设²⁾

(郑州大学机械与动力工程学院, 郑州 450001)

摘要 目前关于被动行走步态的研究主要是揭示参数变化对其稳定性的影响, 而对于步态多重稳定性的研究则较为少见. 步态的多重稳定性不仅是行走模式多样化产生的根源, 还是引发步态突变的关键因素. 尽管当前共存步态的存在性已受到关注, 但关于这些步态的产生、演化以及消失机制的系统性研究尚未开展. 为此, 文章以圆弧足被动行走机器人为研究对象, 应用胞映射及点映射算法探索到与周期一步态共存的几种高周期步态, 绘制了共存步态的三维吸引盆并对这些步态的行走特性进行了详细的对比分析. 此外, 基于跳跃矩阵法改进了 Poincaré-Newton-Floquet (PNF) 算法, 对被动行走系统的不稳定轨道及其对应的 Floquet 乘子进行了求解, 并结合吸引盆进一步揭示了步态演化过程中的分岔和激变现象. 研究结果表明, 共存步态的周期越高, 其平均步速越快, 但步态稳定性越差; 这些共存步态均由极限环的折叠分岔产生, 并由倍周期级联路径通向混沌, 最终与不稳定轨道在吸引盆边界上产生碰撞而消失. 文章的研究结果有助于理解被动行走步态的多重稳定性, 并为机器人的优化设计及稳定控制提供理论依据.

关键词 被动行走, 多重稳定性, PNF 方法, 倍周期分岔, 折叠分岔, 边界激变

中图分类号: O313.7 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-23-545

RESEARCH ON MULTISTABILITY OF GAITS IN THE PASSIVE WALKING ROBOT WITH ROUND FEET¹⁾Bao Yumeng Rao Xiaobo Ding Shunliang Gao Jianshe²⁾

(School of Mechanical and Power Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract Current research on passive walking gaits mainly reveals the effects of parameter changes on their stability, while there are fewer studies on the multistability of gaits. The multistability of gaits is not only a source of walking pattern diversity but also a key factor in triggering sudden gait changes. Although the existence of coexisting gaits has received attention, systematic studies on the mechanisms of their generation, evolution, and disappearance have still not been carried out. To this end, this paper takes a round-footed passive walking robot as the research object, applies the cell mapping and point mapping algorithms to explore several high-periodic gaits coexisting with period-one gaits, plots the three-dimensional basin of attraction of the coexisting gaits, and carries out a detailed comparative analysis of the walking characteristics of these gaits. In addition, the Poincaré-Newton-Floquet (PNF) algorithm is improved based on the jump matrix method to solve the unstable orbits and their corresponding Floquet multipliers of the passive walking system and the bifurcation and crisis phenomena in the gait evolution are further revealed by combining with the basin of

2023-11-16 收稿, 2024-02-20 录用, 2024-02-21 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (51906225).

2) 通讯作者: 高建设, 教授, 主要研究方向为机器人多体系统动力学与控制. E-mail: Gao_jianshe@zzu.edu.cn

引用格式: 暴雨萌, 饶晓波, 丁顺良, 高建设. 圆弧足被动行走机器人步态多重稳定性研究. 力学学报, 2024, 56(6): 1784-1795

Bao Yumeng, Rao Xiaobo, Ding Shunliang, Gao Jianshe. Research on multistability of gaits in the passive walking robot with round feet. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(6): 1784-1795

attraction. The results show that the higher the period of the coexisting gaits, the faster their average gait speeds, but the worse their gait stability; all these coexisting gaits are generated by the fold bifurcation of the limit cycle and lead to chaos by the period-doubling cascade path, eventually disappearing with the unstable orbitals by collisions on the boundary of the basins of attraction. This paper contributes to the understanding of the multistability of passive walking gaits and provides a basis for optimal robot design and stability control.

Key words passive dynamic walking, multistability, PNF method, period-doubling bifurcation, fold bifurcation, boundary crisis

引言

被动行走^[1] (passive dynamic walking) 是指双足步行机构在斜面上仅由自身重力驱动的持续稳定行走, 机构的内在自稳定性 (无需主动控制而实现稳定行走) 使其步态自然且能耗低^[2]. 因此, 被动行走可为类人行走提供定量解释, 也可为研制高效节能的双足步行机器人提供新思路, 目前已成为步行机器人研究的前沿和热点领域, 获得了许多理论成果及实际应用^[3-5].

被动行走步态的动力学特性研究主要基于 3 个模型: Mariano 等^[6] 考虑基本行走原理提出的最简行走模型, Goswami 等^[7] 针对腿部质量因素提出的罗盘模型以及 Wisse 等^[8] 考虑上体质量提出的带上肢体模型. 基于这些经典模型, 许多学者对被动行走步态的动力学特性进行了深入研究. 同时, 为了改善行走性能, 学者们设计了各种各样的足型来增强行走稳定性与鲁棒性, 如平板足、圆弧足、多分段足和拟人足等^[9-13]. 其中圆弧足足型简单, 相较于点足、板足等拥有更高的稳定性以及行走效率^[14-15]. 近年来, 众多学者基于分岔和混沌理论研究了环境参数和机器人结构参数对步态演化的影响, 结果表明, 被动行走机器人的步态主要表现为以倍周期分岔的方式通向混沌. Goswami 等^[7] 首次报道了罗盘模型中出现的倍周期级联现象. 随后, 许多学者在最简模型和带上体模型等一系列模型中也发现了这种典型的分岔现象^[16-21]. 此外, Gritli 等^[22] 在罗盘模型中揭示了极限环的折叠分岔, 进而发现了一些新的行走模式. 目前, 参数变化对步态动力学特性的影响已被广泛研究.

被动行走机器人的动力学模型是由代数-微分方程组定义的脉冲混杂系统, 由单腿支撑的连续摆动方程与足地碰撞时刻的代数方程构成. 在摆动阶段, 支撑腿围绕足地接触点旋转, 此时机器人类似于

倒立摆机构, 而倒立摆模型的动力学特性则受鞍流形控制^[23]. 这导致被动行走机器人的吸引盆非常狭小, 稳定步态的产生对于初始值极其敏感^[24]. 除此以外, 动力学方程的混杂特点同样导致当前对被动行走机器人步态全局动力学研究进展缓慢, 特别是对于步态突变、机器人失稳机理的探索. 一般认为, 边界激变作为混沌吸引子突变中最剧烈的类型, 是引发机器人突然跌倒的主要原因之一, 而这种全局分岔行为通常至少需要两个吸引子共存^[22]. 目前已有学者对机器人中的共存步态进行了相关探索. Gritli 等^[25] 使用打靶法及 Davidchack-Lai 算法在罗盘模型中发现了与周期 1 步态共存的周期 3 步态; Li 等^[26-27] 基于 CPU + GPU 并行计算方法, 探索了最简模型中与周期 1 步态共存的周期 3 ~ 周期 7 步态. 然而, 这些研究主要关注共存步态的存在性, 对于共存步态的产生、演化及消失机制, 目前尚未得到系统研究.

综上所述, 本文以圆弧足被动行走机器人为研究对象, 对其共存步态的行走特性及演化过程进行了详细研究. 首先, 使用胞映射和点映射算法探索到与周期 1 步态共存的几种高周期步态, 对比分析了这些高周期步态的吸引盆大小以及步长和步速等行走特性. 其次, 考虑到行走系统的混杂特性, 本文基于跳跃矩阵方法^[28] 改进了 PNF 算法, 求解了圆弧足被动行走机器人的不稳定轨道以及 Floquet 乘子, 并结合吸引盆进一步揭示了步态演化过程中的分岔和激变现象. 本文的研究有助于理解被动行走步态的多重稳定性, 并对行走过程中的步态突变行为做出理论解释.

1 模型描述及动力学建模

1.1 圆弧足被动行走机器人

本文研究的被动行走机器人模型如图 1 所示. 该模型由两条完全相同的直腿构成, C_{sw} 和 C_{st} 分别

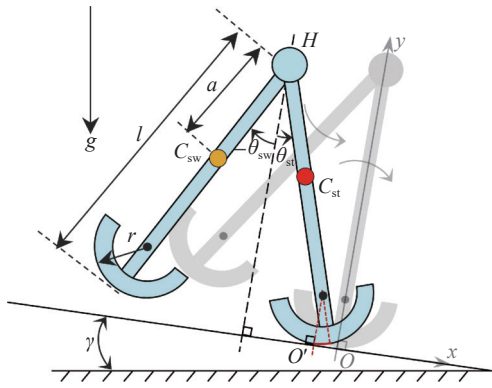


图 1 圆弧足被动行走机器人

Fig. 1 Passive dynamic walking robot with round feet

为摆动腿及支撑腿的质心位置, 两腿通过光滑铰链连接在髋关节 H 上, 并将上肢体质量集中于此关节处, 使用圆弧足模拟人类步行时脚跟-脚掌-脚尖依次着地的现象. 机器人各参数含义如下: m_h 为上体质量, m 为腿质量, l 为腿长, a 为腿质心与髋关节 H 的距离, r 为足半径, j 为腿相对于质心的转动惯量, γ 为斜面与水平面的夹角, g 为重力加速度. 各参数的取值如表 1 所示.

表 1 系统参数

Table 1 System parameters

Symbol	Value	Unit
m_h	2	kg
m	1	kg
a	0.5	m
l	1	m
r	0.1	m
j	0.02	kg·m ²
γ	0.05	rad

在机器人的行走过程中, 支撑腿沿斜面纯滚动, 摆动腿则绕髋关节旋转. 当机器人到达图 1 中的灰色阴影位置时, 支撑腿与斜面垂直. 此时, 足地接触点由原来的 O' 变为 O . 在斜面上建立直角坐标系, 令 O 点为坐标原点, x 轴沿斜面向下, y 轴垂直斜面向上. 摆动腿与支撑腿相对于 y 轴的夹角分别记为 θ_{sw} 与 θ_{st} , 方向均以逆时针为正. 根据几何关系可知, 此时 O' 与坐标原点之间的距离 $\overline{O'O}$ 等于支撑腿足部红色圆弧的弧长, 即 $\overline{O'O} = r \times \theta_{st}$.

1.2 动力学建模

为了使动力学方程具有普遍性并减少方程中的

参数个数, 使用 m, g, l 作为基本量对方程进行无量纲化. 设 $k_m = m_h/m, k_a = a/l, k_r = r/l, k_j = j/(ml^2)$, 此时无量纲时间 $t' = t\sqrt{g/l}$, 圆弧足被动行走机器人的无量纲方程如下所示.

(1) 摆动阶段

使用第二类 Lagrange 方程推导出此阶段机器人的动力学方程为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_{st}; \theta_{sw}]$; $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_{st}; \dot{\theta}_{sw}]$; $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = [\ddot{\theta}_{st}; \ddot{\theta}_{sw}]$; $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = [M_{11}, M_{12}; M_{21}, M_{22}]$; $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = [K_{11}; K_{21}]$; $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = [G_{11}; G_{21}]$. 具体表达式如下所示

$$\begin{aligned} M_{11} &= (2 + k_m)k_r^2 + 2(1 - k_r)^2 + k_j + (1 - k_r - k_a)^2 + \\ &\quad 2k_r[k_m(1 - k_r) + 2 - 2k_r - k_a]\cos\theta_{st} \\ M_{12} &= -k_a(1 - k_r)\cos(\theta_{st} - \theta_{sw}) - k_a k_r \cos\theta_{sw} \\ M_{21} &= M_{12} \\ M_{22} &= k_a^2 + k_j \\ K_{11} &= -[k_m(1 - k_r) + 2 - 2k_r - k_a]k_r \sin\theta_{st}\dot{\theta}_{st} - \\ &\quad k_a[(1 - k_r)\sin\theta_{st} - k_r \sin\theta_{sw}]\dot{\theta}_{sw} \\ K_{21} &= k_a(1 - k_r)\dot{\theta}_{st} \\ G_{11} &= (k_m k_r + 2k_r)\sin\gamma - \\ &\quad [k_m(1 - k_r) + (2 - 2k_r - k_a)]\sin(\theta_{st} - \gamma) \\ G_{21} &= k_a \sin(\theta_{sw} - \gamma) \end{aligned}$$

(2) 足地碰撞阶段

在足地碰撞时刻, 采用完全非弹性碰撞模型, 假设碰撞瞬时完成, 且支撑腿无滑移, 无弹起, 此时该系统满足角动量守恒定理, 其动力学方程为

$$\mathbf{Q}^-(\boldsymbol{\theta}^-)\dot{\boldsymbol{\theta}}^- = \mathbf{Q}^+(\boldsymbol{\theta}^+)\dot{\boldsymbol{\theta}}^+ \quad (2)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}^+ = [\theta_{st}^+; \theta_{sw}^+]$; $\boldsymbol{\theta}^- = [\theta_{st}^-; \theta_{sw}^-]$; $\dot{\boldsymbol{\theta}}^+ = [\dot{\theta}_{st}^+; \dot{\theta}_{sw}^+]$; $\dot{\boldsymbol{\theta}}^- = [\dot{\theta}_{st}^-; \dot{\theta}_{sw}^-]$; $\mathbf{Q}^+(\boldsymbol{\theta}^+) = [Q_{11}^+, Q_{12}^+, Q_{21}^+, Q_{22}^+]$; $\mathbf{Q}^-(\boldsymbol{\theta}^-) = [Q_{11}^-, Q_{12}^-, Q_{21}^-, Q_{22}^-]$.

具体表达式如下所示

$$\begin{aligned} Q_{11}^- &= -k_a[(1 - k_r - k_a) + \cos\theta_{st}^-] + k_j \\ Q_{12}^- &= 0 \\ Q_{21}^- &= 2k_r^2 + (1 - k_r - k_a)[2k_r \cos\theta_{st}^- + \\ &\quad (1 - k_r - k_a)\cos^2\theta_{st}^- - k_a \sin^2\theta_{st}^- + \\ &\quad (1 - k_r)\sin\theta_{st}^- \sin\theta_{sw}^-] + \\ &\quad (1 - k_r)[2k_r \cos\theta_{st}^- - (k_a + k_r - 1)\sin\theta_{st}^- \sin\theta_{sw}^- - \\ &\quad k_a \cos\theta_{st}^- \cos\theta_{sw}^- + (1 - k_r)\cos^2\theta_{st}^-] - \\ &\quad k_a k_r \cos\theta_{sw}^- + k_m[k_r^2 + 2k_r(1 - k_r)\cos\theta_{st}^- + \\ &\quad (1 - k_r)^2 \sin\theta_{st}^- \sin\theta_{sw}^- + (1 - k_r)^2 \cos^2\theta_{st}^-] + k_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22}^- &= k_a^2 \cos^2 \theta_{sw}^- - k_r k_a \cos \theta_{sw}^- - \\
&\quad k_a (1 - k_r) \cos \theta_{st}^- \cos \theta_{sw}^- + k_j + \\
&\quad k_a (k_a + k_r - 1) \sin^2 \theta_{sw}^- \\
Q_{11}^+ &= k_a^2 + k_j \\
Q_{12}^+ &= -k_a (1 - k_r) \cos (\theta_{st}^+ - \theta_{sw}^+) - k_a k_r \cos \theta_{st}^+ \\
Q_{21}^+ &= k_a^2 - k_a (1 - k_r) \cos (\theta_{st}^+ - \theta_{sw}^+) - k_r k_a \cos \theta_{st}^+ + k_j \\
Q_{22}^+ &= -k_a (1 - k_r) \cos (\theta_{st}^+ - \theta_{sw}^+) + (1 - k_r)^2 + 2k_r^2 - \\
&\quad k_r k_a \cos \theta_{st}^+ + 2k_r (1 - k_r) \cos \theta_{sw}^+ + k_j + \\
&\quad 2k_r (1 - k_r - k_a) \cos \theta_{sw}^+ + (1 - k_r - k_a)^2 + \\
&\quad k_m [k_r^2 + (1 - k_r)^2 + 2k_r (1 - k_r) \cos \theta_{sw}^+]
\end{aligned}$$

式中, 上标“-”与“+”用于区分碰撞前后系统的状态. 令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta_{st}, \dot{\theta}_{st}, \theta_{sw}, \dot{\theta}_{sw}]^T \in \mathbf{R}^4$, 方程式 (1) 和式 (2) 可整理成如下规范形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}), & \text{if } \mathbf{x} \notin \Sigma \\ \mathbf{x}^+ = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}^-), & \text{if } \mathbf{x} \in \Sigma \end{cases} \quad (3)$$

其中, 碰撞面 $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : h(\mathbf{x}) = x_1 + x_3 = 0\}$, $h(\mathbf{x})$ 为边界函数. 令 $\mathbf{x}_0$ 为步态初始值, 则该混杂动力系统的解可表示为 $\mathbf{x}(t) = \phi(\mathbf{x}_0, t)$.

2 改进的 PNF 方法

PNF 法是基于打靶法和 Floquet 分岔理论发展的一种同时进行周期解求解并判稳的数值算法^[29]. 选择碰撞面 Σ 作为 Poincaré 截面, 则系统周期解 $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}, T)$ 的求解可以转化为求非线性方程组 $\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的不动点问题. 牛顿法在计算方程组时具有局限性, 尤其是在高维系统中, 选择合适的初始值对于保证算法收敛至关重要^[30]. 因此本文采用牛顿下山法替代传统牛顿法. 这种方法通过控制迭代步长, 有效地减小了系统对初始迭代值的依赖性以及数值发散的可能性. 按照牛顿下山法, 将 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ 在给定的初始点 $\mathbf{x}_0$ 附近线性化展开, 得到下一迭代点 $\mathbf{x}_1$ 为

$$\mathbf{x}_1 = \beta[\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_0)]^{-1}[\mathbf{P}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0] + \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

其中, $\beta \in (0, 1]$ 为下山因子. 显然, 只要确定映射算子 $\mathbf{P}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处的雅可比矩阵 $\mathbf{DP}(\mathbf{x}_0)$ 即可实现迭代. 对于光滑系统, 此矩阵可通过积分变分方程获得. 然而, 被动行走机器人为混杂系统, 在步态切换时刻雅可比矩阵不存在. 因此, 本文引入一种新方法, 根据行走过程中的摆动与碰撞两个运动阶段依次完成对该矩阵的求解

(1) 在摆动阶段, 将式 (3) 中的非线性微分方程组对初始点 $\mathbf{x}_0$ 求偏导可得 $\dot{\Phi}(\mathbf{x}_0, t) = \dot{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x}_0(t))\Phi(\mathbf{x}_0, t)$, 其中, 变分方程 $\Phi(\mathbf{x}_0, t) = \partial\phi(\mathbf{x}_0, t)/\partial\mathbf{x}_0$, 初始积分时刻 $\Phi(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ 为 4×4 单位矩阵), 因此, 以 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{I})$ 为初值积分式 (5), 可获得直到碰撞发生前一刻系统的状态变量与基本解矩阵 $(\mathbf{x}^-, \Phi^-)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \\ \dot{\Phi}(\mathbf{x}_0, t) = \dot{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x}_0(t))\Phi(\mathbf{x}_0, t) \end{cases}, \quad \text{if } \mathbf{x} \notin \Sigma \quad (5)$$

(2) 在足地碰撞阶段, 需要构造一个跳跃矩阵 Ω 来连接碰撞前后的基本解矩阵. 该矩阵的具体推导过程可参见文献 [24, 28]. 本节直接给出这一矩阵的最终形式以及各部分的具体含义

$$\Omega = \frac{(\mathbf{F}_1^+ - \mathbf{J}^- \mathbf{F}_1^-)(\mathbf{N}^-)^T}{(\mathbf{N}^-)^T \mathbf{F}_1^-} + \mathbf{J}^- \quad (6)$$

其中, $\mathbf{J}^- = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^-}$, $\mathbf{N}^- = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^-}$, 以 $(\mathbf{x}^-, \Phi^-)$ 为初值积分式 (7) 可获得碰撞发生后一时刻的 $(\mathbf{x}^+, \Phi^+)$

$$\begin{cases} \mathbf{x}^+ = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}^-) \\ \Phi^+ = \Omega \Phi^- \end{cases}, \quad \text{if } \mathbf{x} \in \Sigma \quad (7)$$

此时完成一次完整的 Poincaré 映射, 对应状态变量为 $\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)$, 则 $\Phi^+ = \partial \mathbf{P}(\mathbf{x}_0)/\partial \mathbf{x}_0 = \mathbf{DP}(\mathbf{x}_0)$. 将 $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)$ 及 $\mathbf{DP}(\mathbf{x}_0)$ 代入式 (4), 若 $|\mathbf{P}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1| < |\mathbf{P}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0|$, 则将 $\mathbf{x}_1$ 赋给 $\mathbf{x}_0$ 后继续进行迭代, 否则令 $\beta = \beta/2$ (首次迭代时 $\beta = 1$), 重新计算式 (4), 直到满足该判断条件. 按照以上逻辑进行反复迭代, 直到误差 $\Delta \mathbf{x} = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$ 小于迭代精度为止. 此时的 $\mathbf{x}_0$ 为不动点, 对应的 $\mathbf{DP}(\mathbf{x}_0)$ 为离散状态的转移矩阵, 求解其特征值即可得到该周期解的 Floquet 乘子, 最后根据稳定性判据与分岔条件识别周期运动的稳定性与分岔类型.

3 共存步态及其行走特性

3.1 共存步态及其吸引盆

在本文给定的系统参数下, 首先对机器人运动的初始条件进行估计^[7], 然后代入 PNF 法中进行数值迭代. 当估计值 $\mathbf{x} = [0.29, -0.37, -0.29, -0.295]^T$ 时, 方程组 $\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解能够收敛到 $\mathbf{x}^* = [0.303959, -0.370892, -0.303959, -0.158152]^T$ 上. 令 $\mathbf{x}^*$ 作为初值, 利用吸引子追踪算法^[31] 获得了随斜面角度 γ 变化时的步态分岔图, 在图 2 中标记为 A1. 为了寻找

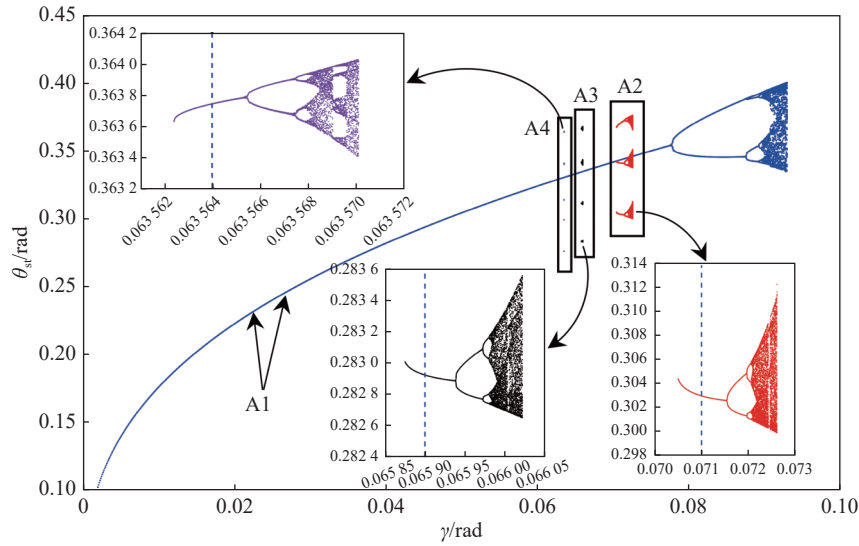


图2 共存步态的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram for coexisting gaits

共存步态, 文献 [26] 受 Feigenbaum 常数启发, 提出了使用分岔点预测被动行走机器人共存步态的计算公式. 基于该公式, 本文研究了可能产生共存步态的参数区间, 利用胞映射和点映射算法探索到了与周期 1 步态共存的周期 3, 4 和 5 步态, 并通过吸引子追踪法绘制了这 3 个高周期步态的分岔曲线, 在图 2 中依次标记为 A2, A3 和 A4. 如图所示, 随着共存步态周期数的增加, 分岔曲线存在的斜面范围越来越窄. 根据这一特点可以预见, 在 A4 的左侧可能存在更高周期的共存步态. 由于这些高周期步态存在的参数范围非常狭小, 无论是通过理论方法还是数值方法来探索它们都面临极大的困难.

为揭示共存步态的动力学特性, 图 3 展示了周期 1 (P1) 与周期 3 (P3) 步态, 以及周期 1 与周期 4 (P4) 步态共存时的吸引盆 (BoA), 在这两种场景下, 斜面角度分别取为 0.071 rad 与 0.0659 rad. 由于足地碰撞位置处两腿角度的绝对值相等, 因此状态空间被降维到三维空间. 考虑到相空间的高维性和机器人动力学方程的复杂性, 如何在合理的时间范围内完成对整个状态空间的搜索成为了数值计算的难点. 胞映射法作为计算吸引盆的方法之一, 其核心思想在于将连续的状态空间划分为许多离散的几何体 (即“胞”), 并使用每个几何体的中心作为初值参与运算 [32]. 相比于直接数值积分, 这种方法将状态的转移对应于胞的转移, 使得每个胞仅需映射一次, 极大地提高了运算效率. 因此, 本节将使用此算法对共

存步态的吸引盆进行研究. 设置状态空间的取值范围 $\theta_{st} \times \dot{\theta}_{st} \times \dot{\theta}_{sw} = [0.22, 0.47] \times [-0.52, -0.23] \times [-0.8, 0.8]$, 将此空间离散为 $200 \times 200 \times 100$ 个胞, 仿真结果如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 其中 $\dot{\theta}_{st}$ 和 $\dot{\theta}_{sw}$ 均为无量纲角速度, 因而未标注单位. 在图中, 白色区域映射到陷胞, 蓝色区域为 P1 步态的吸引盆, 而红色和黑色区域分别为 P3 与 P4 的吸引盆. 图 3(a) 和图 3(b) 中的几个二维切片分别显示在图 3(c) 和图 3(d) 中.

对周期胞个数进行定量统计. 定义周期 i 吸引盆的体积百分比 = (周期 i 的胞数) / (正规胞总数) $\times 100\%$, 具体结果如表 2 所示. 由表 2 可知, P4 的吸引盆体积约为 P3 的 1/14, 而对于 A4 中的 P5 吸引子, 使用图 3 中的胞尺寸划分状态空间甚至无法实现对它的搜索 (此步态是在 $\theta_{st}, \dot{\theta}_{st}$ 平面上使用高精度的点映射获得的), 这意味着此共存步态的吸引盆极小. 综合图 3 和表 2 可知, 随着共存步态周期数的增加, 吸引盆中相应的周期胞数量将显著减少 (如表 2 中 P3 胞数为 58015, 而 P4 胞数仅为 4082). 由于周期胞代表机器人产生特定周期步态的初始条件, 因此上述趋势表明, 可收敛到高周期步态上的初始值越来越少, 这些步态的稳定性将急剧下降. 可以预见, 与 P1 共存的更高周期的步态, 它们的稳定性将更差. 此时, 即使机器人步态受到扰动, 也很难突变到共存的高周期上, 而是更有可能收敛到 P1 或直接摔倒. 因此, 在实际行走中, 我们主要关注 A2 和 A3 这些共存步态, 而其他共存的高周期步态则可以忽略. 这

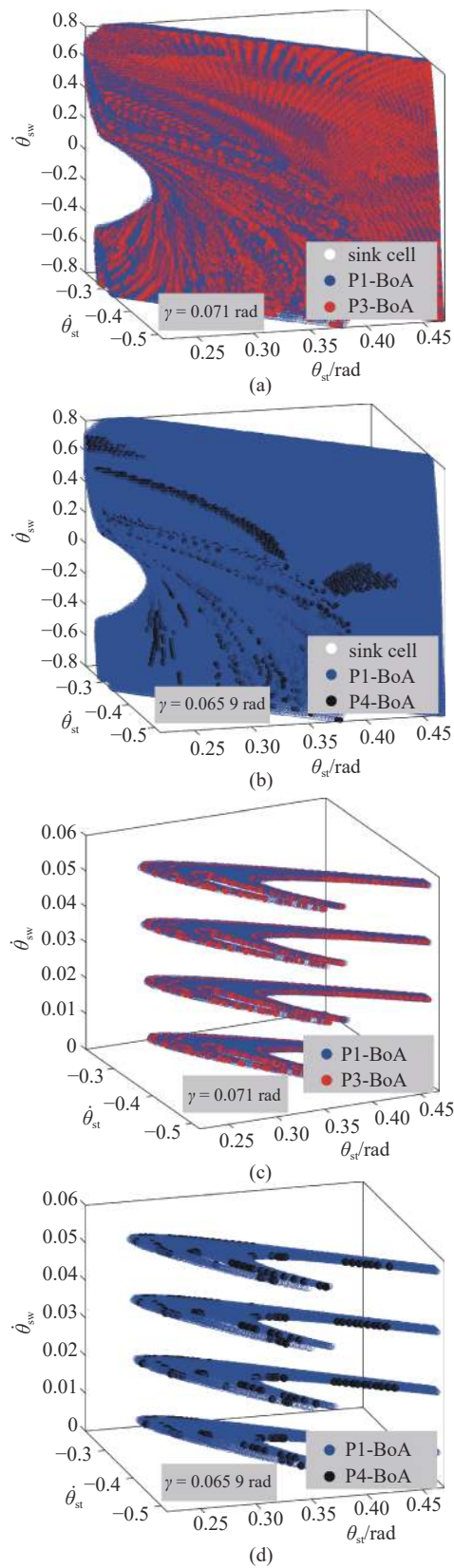


图 3 共存步态的三维吸引盆

Fig. 3 Three-dimensional basin of attraction for coexisting gaits

也表明,对于更高周期共存步态的探索需要划分更小的参数区间和状态胞。受限于数值精度和计算效

表 2 胞数及吸引盆体积百分比

Table 2 Number of cells and percentage of basin of attraction volume			
γ/rad	Gait	Number of cells	Percent by volume/%
0.071	P1	345 816	8.645 4
	P3	58 015	1.450 4
	divergence	3 596 169	89.904 2
0.065 9	P1	426 646	10.666 1
	P4	4082	0.102 1
	divergence	3 569 272	89.231 8

率,本文不再进行寻找。

3.2 共存步态的行走特征

为了研究圆弧足被动行走机器人的步态特性,定义其第 k 步的行走时间、步长及速度分别为 T, L 和 v ,其中 T 为每步的总积分时间, L 和 v 的计算式如下

$$\left. \begin{aligned} L &= r(\theta_{\text{st}(k-1)}^+ + \theta_{\text{st}(k)}^+) + 2(l-r)\sin\theta_{\text{st}(k)}^+ \\ v &= L/T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

通过数值仿真, A1 ~ A4 4 种步态的行走时间、步长和速度的分岔曲线如图 4(a) ~ 图 4(c) 所示,此时高周期共存步态的分岔曲线位于周期 1 分岔线的上、下两侧。此外,定义机器人周期运动的平均行走时间 $\bar{T}$, 平均步长 $\bar{L}$ 以及平均速度 $\bar{v}$ 如下

$$\left. \begin{aligned} \bar{T} &= \sum_{i=1}^n T_i/n \\ \bar{L} &= \sum_{i=1}^n L_i/n \\ \bar{v} &= \bar{L}/\bar{T} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 n 为机器人的行走周期数, i 为连续行走的步数,对于混沌运动,保留连续行走 50 步的数值用于计算平均值。A1 ~ A4 四种步态的平均行走时间、步长和速度的演化曲线如图 5(a) ~ 图 5(c) 所示。在共存区域,高周期步态的平均行走时间及步长均小于 A1,但平均行走速度比 A1 更大。

观察各曲线随斜面角度增大时的变化情况,使用符号“↑”与“↓”表示数值上升与下降,结果如表 3 所示。观察到,这些步态的平均行走时间及步长的变化情况虽然不一致,但是它们的平均行走速度都随着斜面角度的增加而增大,说明 $\bar{L}$ 的变化率始终大

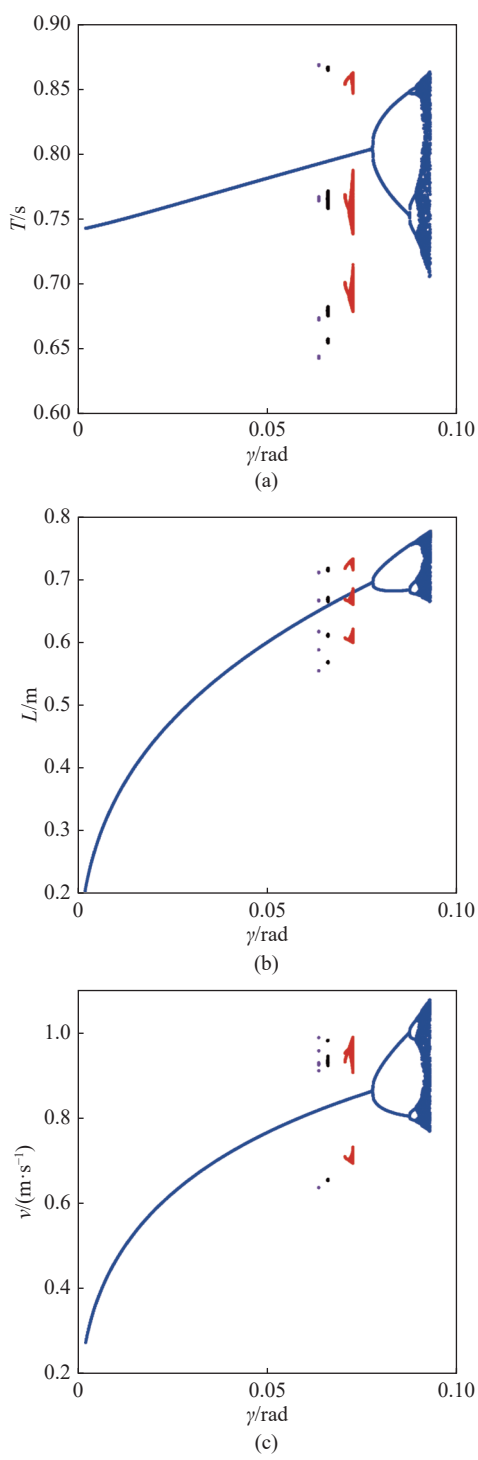


图 4 共存步态的 T, L 和 v 分岔图

Fig. 4 Bifurcation diagrams of T, L , and v for coexisting gaits

于 $\bar{T}$; 从机器人受力的角度来看, 更陡的斜面使得机器人在沿 x 轴方向获得更大的重力分量, 这可能是导致机器人加速的原因. 综合本小节可知, 机器人步态的多重稳定性使得在相同的系统参数下可能出现行走差异极大的步态. 另一方面, 当机器人受到外界干扰时, 其步态可能发生突变从而转移到共存的其

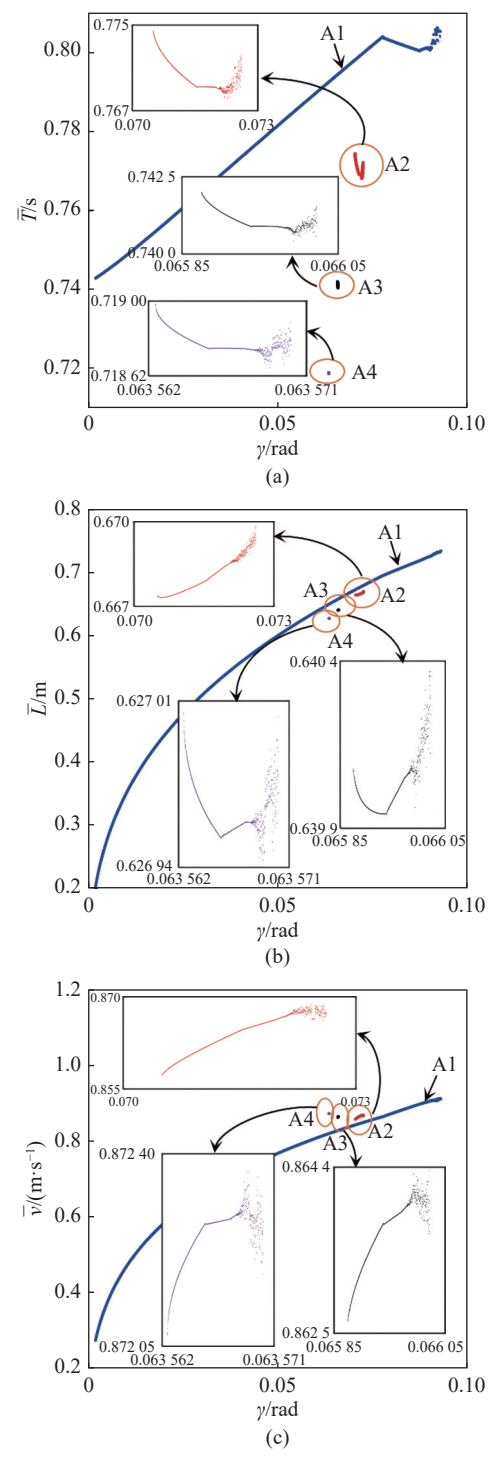


图 5 共存步态的 $\bar{T}, \bar{L}$ 和 $\bar{v}$ 对比

Fig. 5 Comparison of $\bar{T}, \bar{L}$, and $\bar{v}$ of coexisting gaits

表 3 步态特征变化趋势

Table 3 Trends in walking characteristics of gaits			
Gait	$\bar{T}$	$\bar{L}$	$\bar{v}$
A1	$\uparrow \downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
A2	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
A3	$\downarrow$	$\downarrow \uparrow$	$\uparrow$
A4	$\downarrow$	$\downarrow \uparrow$	$\uparrow$

他周期轨道上. 因此, 深入了解这些步态的行走特征差异, 对于判断和解释步态的突变行为非常有利, 同时有助于更好地理解机器人行走的动力学机制.

4 步态演化分析

4.1 步态的产生与演化

在被动行走机器人的相空间中, 有许多与步态吸引子共存的不稳定轨道 (UPO), 它们影响了稳定步态的产生、演化及消失. 应用第 2 节中改进的 PNF 算法计算了与 A1 步态共存的周期 1 不稳定轨道 (P1-UPO), 如图 6(a) 中橙色箭头所示的两条浅绿色曲线. 其中一条位于稳定轨道的下方, 另一条则由稳定周期 1 轨道 (P1-SPO) 发生倍周期分岔后遗留下来. 另外, 使用 PNF 法可以同时获得这些轨道对应的雅可比矩阵, 它们的特征值即为 Floquet 乘子. 将 P1 轨道对应乘子的最大模量记为 $\lambda_{\max}$, 在图中以玫红色曲线标识, 其数值大小对应图中右侧坐标轴. 在图 6(a) 中可以明显观察到, $\lambda_{\max}$ 的数值在星号位置

处两次超过 1, 这表明 P1 轨道对应的乘子在复平面上两次穿过单位圆, 从而引发了两次分岔. 经验证, 这两次分岔属于不同的类型: 当 γ 增大到约为 0.078 rad 时, 乘子对应复平面的 $(-1, 0)$ 位置, P1-SPO 失稳, 经由倍周期分岔 (PDB) 产生周期 2 稳定步态. 当 γ 减小到约为 0.002 rad 时, P1-SPO 与 P1-UPO 接触, 乘子对应复平面的 $(+1, 0)$ 位置. 由此可知, 这两条轨道是通过极限环的折叠分岔 (CFB) 同时产生的.

放大图 6(a) 的橙色椭圆区域, 探索与步态 A2 共存的 P3-UPO 的演化情况, 如图 6(b) 所示, 此时玫红色曲线代表 P3 轨道对应乘子的最大模量. 观察到, P3 轨道的乘子在星号位置处两次穿过单位圆, 发生两种不同类型的分岔: 当 γ 增大到约为 0.0716 rad 时, 乘子对应复平面的 $(-1, 0)$ 位置, P3-SPO 失稳, 经由 PDB 产生一个稳定周期 6 步态. 当 γ 减小到约为 0.0705 rad 时, P3-SPO 与 P3-UPO 接触, 乘子对应复平面的 $(+1, 0)$ 位置, 此时发生 CFB. 对于 A3, A4 步态, 其分岔图及某一分支的放大图分别如图 7(a)~图 7(d) 所示, 这里 P4-UPO 与 P5-UPO 的演化情况与图 6(b)

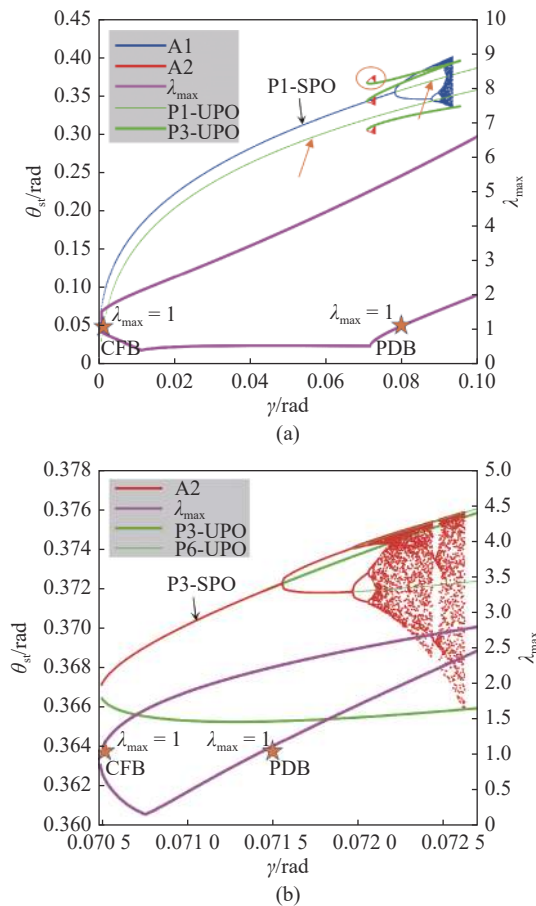


图 6 步态分岔图及其乘子图

Fig. 6 Gait bifurcation diagrams and multiplier diagrams

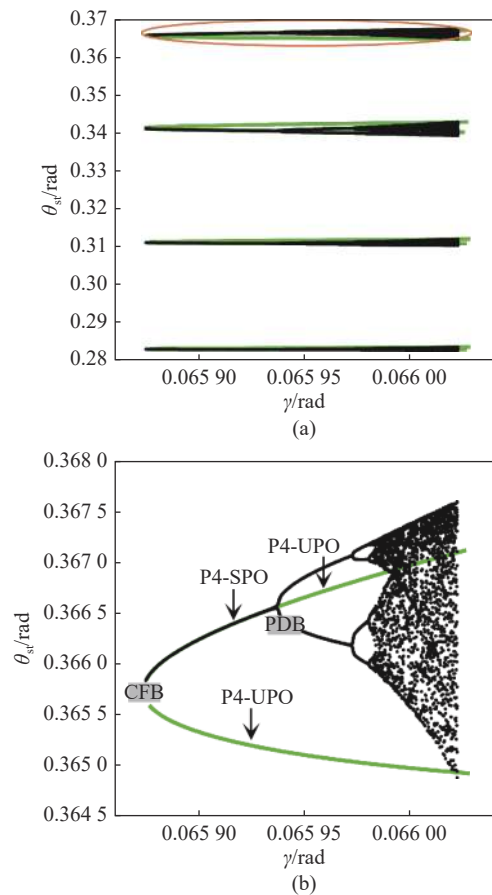


图 7 A3, A4 步态的演化

Fig. 7 Evolution of the A3 and A4 gaits

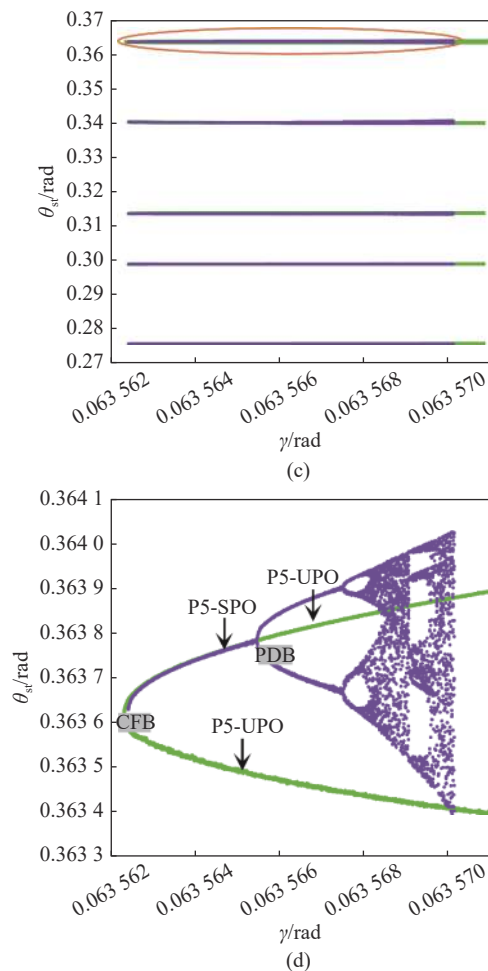


图7 A3, A4步态的演化(续)

Fig. 7 Evolution of the A3 and A4 gaits (continued)

中 P3-UPO 的演化非常相似, 因而不赘述.

综上所述, A1 及其共存的高周期步态都来源于 CFB 产生的稳定周期轨道, 当斜面角度不断增大时, 这些周期轨道经由 PDB 失稳, 随后经过倍周期级联通向混沌. 虽然共存步态的周期性、稳定性以及行走特性等均有较大差异, 但是它们的步态演化规律没有发生改变.

4.2 双重边界激变

从图 7(b) 与图 7(d) 中观察到, 由 CFB 产生的 UPO 在随着斜面角度不断增大的演化过程中与混沌吸引子发生了碰撞, 随后吸引子突然消失. 而在图 6 中, P3-UPO 似乎与 A2, A1 步态的混沌吸引子先后发生了两次碰撞. 为了验证, 将图 6(a) 的后半部分放大到图 8(a) 中, 此处的绿色粗实线, 细实线以及虚线分别为 CFB 产生的 P1-UPO, P3-UPO 与 P4-UPO. 如图所示, P1-UPO 与 P4-UPO 似乎在 $\gamma \approx 0.093$ rad 时也与 A1 的混沌吸引子产生了碰撞. 当在 $(\gamma, \theta_{st}, \dot{\theta}_{st})$

组成的三维空间上观察这一事件时, 如图 8(b) 所示, 可以清楚地看到只有 P3-UPO 在箭头所指位置真正碰撞了 A1 步态的吸引子, 而 P1-UPO 与 P4-UPO 则远离. 经验证, 对于当前获得的所有高周期不稳定轨道, 仅有与 A2 步态伴随产生的 P3-UPO 对不同步态的吸引子实现了两次碰撞, 其余仅发生一次. 而对于 P1-UPO, 未观察到它与任何吸引子产生碰撞的情况.

在动力系统理论中, 这种混沌吸引子突变的全局分岔行为被称为激变 (crisis) [33]. 它产生于不稳定周期轨道与混沌吸引子的碰撞, 根据碰撞点在吸引盆中的位置, 可进一步分为内部激变 (IC) 和边界激变 (BC). 前者发生于盆内部, 引发混沌吸引子尺寸的突然扩大或者收缩; 后者产生于盆边界, 引发混沌吸引子的突然产生或消失 [33-34]. 为了验证由 P3-UPO 引发的两次碰撞是否属于 BC, 分别对斜面角度为 0.072 6 rad 与 0.093 rad 时系统的吸引盆进行研究. 由图 8(a) 可知, 这两个角度为即将发生碰撞的参数点. 设置状态空间有效范围为 $\theta_{st} \times \dot{\theta}_{st} \times \theta_{sw} = [0.22, 0.47] \times [-0.52, -0.23] \times [-0.8, 0.8]$, 将此空间离散为 $200 \times 200 \times 100$ 份, 共计 4.0×10^6 个正规胞, 吸引盆如图 9(a) 和

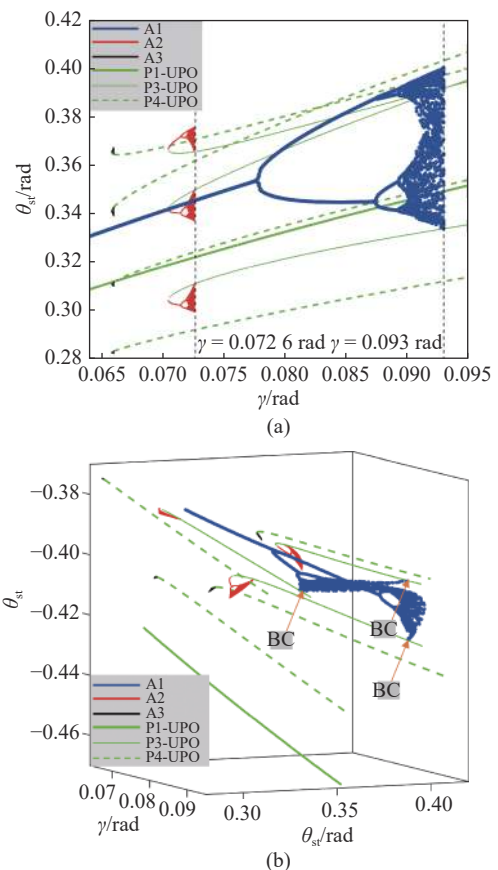


图8 被动行走系统的双重边界激变

Fig. 8 The double boundary crisis of passive walking systems

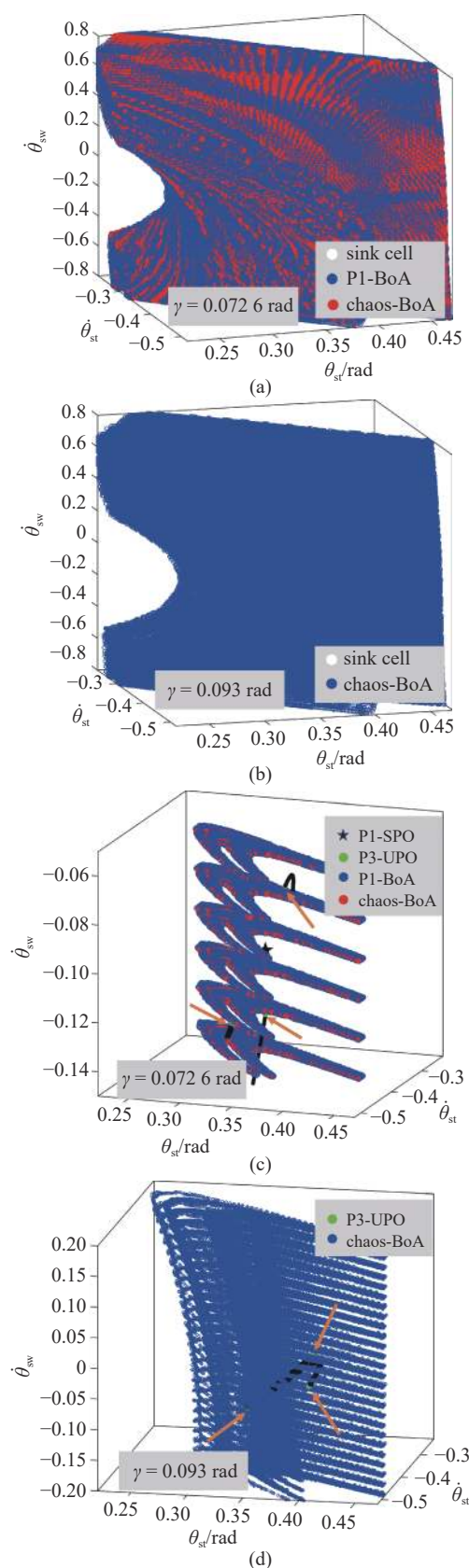


图 9 即将发生边界激变时系统的吸引盆

Fig. 9 The basin of attraction of the system in the case of an approaching boundary crisis

图 9(b) 所示. 空白区域映射到陷胞, 蓝色为 A1 步态吸引子的吸引盆, 红色为 A2 步态吸引子的吸引盆. 图 9(c) 和图 9(d) 分别为图 9(a) 和图 9(b) 中三维相空间的二维切面, 其中绿色圆点为 P3-UPO, 黑色为混沌吸引子, 橙色箭头指向即将产生激变的位置.

图 9 (a) 与图 9(c) 显示, 当斜面角度为 0.0726 rad 时, A2 的 3 带混沌与 A1 的 P1 吸引子 (图 9(c) 中的黑色星号) 共存, 此时 3 带混沌即将碰撞到红色吸引盆边界处的 P3-UPO; 当斜面角度略微增大到 0.0727 rad 时, 3 带混沌将湮灭, 机器人步态将在一段时间历程后收敛到 P1, 如图 10(a) 所示, 图中两种不同颜色的曲线代表摆动腿与支撑腿的角度. 图 9 (b) 与图 9(d) 显示, 当斜面角度为 0.093 rad 时, 仅 A1 步态上的混沌吸引子存在, 此时吸引子即将到达蓝色盆地边界并与 P3-UPO 碰撞; 当斜面角度增大到 0.0931 rad 时, 混沌步态湮灭并发散, 机器人跌倒, 如图 10(b) 所示. 显而易见, P3-UPO 引发了两次 BC, 这种现象被称为双重边界激变^[22]. 需要强调的是, 另外两种高周期步态 A3 与 A4 均由与之伴随产生的 UPO 引发的边界激变而湮灭, 不同的是这些轨道未对 A1 步态产

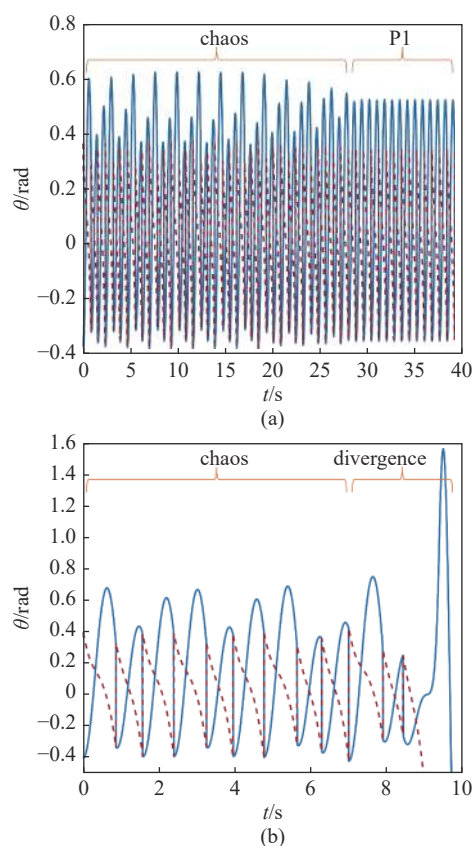


图 10 激变后的时间响应图

Fig. 10 Time response plots after crisis

生影响,这一结论同样可由图8所证实,这里不再赘述。

5 结论

本研究基于圆弧足被动行走系统,运用胞映射和点映射算法对系统的多种共存步态进行了全面搜索,并对这些步态的吸引盆,行走时间,步长,行走速度等进行了对比分析。此外,基于跳跃矩阵法改进了PNF算法,对被动行走系统的不稳定轨道及其对应的Floquet乘子进行了求解。同时,结合时间响应图、吸引盆等数值工具讨论了共存步态的生成、演化以及消失机制。

(1) 圆弧足被动行走机器人步态呈现多重稳定性,在不同的参数区间下存在与P1步态共存的多种高周期步态,且共存步态的周期数越高,其吸引盆范围越小,步态的稳定性越差。

(2) 共存步态的周期数越高,其对应的平均行走时间和平均行走步长越小,但是具有更高的平均行走速度。这些步态在随着斜面角度逐渐增大的演化过程中,平均行走速度一直呈增加趋势。

(3) 共存步态均产生于极限环的折叠分岔,并经由倍周期级联路径演化至混沌,而与之伴随产生的不稳定周期轨道则随着斜面角度的增加不断延伸,并与混沌吸引子在盆边界上发生碰撞引发边界激变,导致了共存步态吸引子的湮灭。特别地,P3-UPO引发了两次边界激变,这是导致机器人摔倒的重要动力学机理。

参 考 文 献

- McGeer T. Passive dynamic walking. *The International Journal of Robotics Research*, 1990, 9(2): 62-82
- Mikolajczyk T, Mikolajewska E, Al-Shuka HFN, et al. Recent advances in bipedal walking robots: Review of gait, drive, sensors and control systems. *Sensors*, 2022, 22(12): 4440
- 李刚, 陈伟, 宋振东. 基于被动行走原理的无动力外骨骼结构设计. *机械传动*, 2020, 44(1): 99-108 (Li Gang, Chen Wei, Song Zhen-dong. Structure design of powerless exoskeleton based on passive walking principle. *Journal of Mechanical Transmission*, 2020, 44(1): 99-108 (in Chinese))
- 于晓春, 贾骏恺, 李化洋等. 六足机器人半被动行走步态控制方法及其动力学仿真. *机械设计与研究*, 2022, 38(1): 55-61 (Yu Xiaochun, Jia Junkai, Li Huayang, et al. Research on the control method and dynamic simulation of semi-passive walking gait of hexapod robot. *Machine Design and Research*, 2022, 38(1): 55-61 (in Chinese))
- Islam S, Carter K, Yim J, et al. Scalable minimally actuated leg extension bipedal walker based on 3D passive dynamics//Proceedings of 2022 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Philadelphia, PA, USA: IEEE, 2022: 207-213
- Garcia M, Chatterjee A, Ruina A, et al. The simplest walking model: stability, complexity, and scaling. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1998, 120(2): 281-288
- Goswami A, Thuijot B, Espiau B. A study of the passive gait of a compass-like biped robot symmetry and chaos. *The International Journal of Robotics Research*, 1998, 17(12): 1282-1301
- Wisse M, Schwab AL, Helm FCTV. Passive dynamic walking model with upper body. *Robotica*, 2004, 22: 681-688
- 高家昌, 高建设, 陶征. 被动步行平足机器人动力学参数研究. *机械传动*, 2022, 46(12): 22-30 (Gao Jiachang, Gao Jianshe, Tao Zheng. Research on dynamic parameters of a passive walking robot with flat feet. *Journal of Mechanical Transmission*, 2022, 46(12): 22-30 (in Chinese))
- Smyrli A, Papadopoulos E. Modeling, validation, and design investigation of a passive biped walker with knees and biomimetic feet//Proceedings of 2022 International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Philadelphia, PA, USA: IEEE, 2022: 193-199
- Huang Y, Chen B, Wang Q, et al. Adding segmented feet to passive dynamic walkers//Proceedings of 2010 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Montreal, QC, Canada, 2010. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 652-657
- 倪修华, 陈维山, 刘军考等. 弹簧刚度对被动步行的稳定性影响. *力学学报*, 2010, 42(3): 541-547 (Ni Xiuhua, Chen Weishan, Liu Junkao, et al. The effect of spring stiffness on the stability of passive dynamic walking. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(3): 541-547 (in Chinese))
- 段文杰, 王琪, 王天舒. 圆弧足被动行走器非光滑动力学仿真研究. *力学学报*, 2011, 43(4): 765-774 (Duan Wenjie, Wang Qi, Wang Tianshu. Imulation research of a passive dynamic walker with round feet based on non-smooth method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(4): 765-774 (in Chinese))
- Asano F, Luo Z. Energy-efficient and high-speed dynamic biped locomotion based on principle of parametric excitation. *IEEE Transactions on Robotics*, 2008, 24(6): 1289-1301
- Kwan M, Hubbard M. Optimal foot shape for a passive dynamic biped. *Journal of Theoretical Biology*, 2007, 248(2): 331-339
- 魏巍, 丁维高, 谢进. 带仿生躯干的被动行走机器人步态特性. *西南交通大学学报*, 2024, 59(2): 477-480 (Wei Wei, Ding Weigao, Xie Jin. Gaits properties of the passive walking robot with biomimetic torso. *Journal of Southwest JiaoTong University*, 2024, 59(2): 477-480 (in Chinese))
- 张瑞, 张奇志, 周亚丽. 变长度弹性伸缩腿双足机器人半被动起步行走仿人控制. *计算机应用*, 2022, 42(1): 6 (Zhang Rui, Zhang Qizhi, Zhou Yali. Starting and walking human-like control of semi-passive bipedal robot with variable length telescopic legs. *Journal of Computer Applications*, 2022, 42(1): 6 (in Chinese))
- Safartoobi M, Dardel M, Daniali HM. Gait cycles of passive walking biped robot model with flexible legs. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 159: 104292
- 郑鹏, 王琪, 吕敬等. 摩擦与滚阻对被动行走器步态影响的研究. *力学学报*, 2020, 52(1): 162-170 (Zheng Peng, Wang Qi, Lyu Jing,

- et al. Study on the influence of friction and rolling resistance on the gaits of passive dynamic walking. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(1): 162-170 (in Chinese))
- 20 刘宋, 杨鑫. 平面双足机器人建模与仿真研究. 计算机仿真, 2020, 37(8): 281-285, 352 (Liu Song, Yang Xin. Modeling and simulation analysis of planar biped robot. *Computer Simulation*, 2020, 37(8): 281-285, 352 (in Chinese))
- 21 Safa M. Stability improvement of a dynamic walking system via reversible switching surfaces. *Multibody System Dynamics*, 2018, 43(4): 349-367
- 22 Gritli H, Belghith S, Khraief N. Cyclic-fold bifurcation and boundary crisis in dynamic walking of biped robots. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, 22(10): 1250257
- 23 Okamoto K, Aoi S, Obayashi I, et al. Fractal mechanism of basin of attraction in passive dynamic walking. *Bioinspiration & Biomimetics*, 2020, 15(5): 055002
- 24 Rao X, Gao J, Ding S, et al. Multistability of gaits, the basin of attraction and its external topology in the simplest passive walking model on stairs. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, 172: 113592
- 25 Gritli H, Khraief N, Belghith S. Period-three route to chaos induced by a cyclic-fold bifurcation in passive dynamic walking of a compass-gait biped robot. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(11): 4356-4372
- 26 Li Q, Tang S, Yang X. New bifurcations in the simplest passive walking model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2013, 23(4): 43110
- 27 Li Q, Yang X. New walking dynamics in the simplest passive bipedal walking model. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(11): 5262-5271
- 28 Bernardo M, Budd C, Champneys AR, et al. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. New York: Springer Science & Business Media, 2008: 109-111
- 29 郇志英. 强非线性齿轮系统周期解结构及其稳定性的研究. [硕士学位论文]. 西安: 西北工业大学, 2003: 42-43 (Gao Zhiying. A study of the periodic solution structure of strongly nonlinear gear systems and their stability. [Master Thesis]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2003: 42-43 (in Chinese))
- 30 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析, 第 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008: 225-226
- 31 Araújo JRBM, Gallas JAC. Nested sequences of period-adding stability phases in a CO₂ laser map proxy. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 150: 111180
- 32 Hsu CS. A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47: 931-939
- 33 Grebogi C, Ott E, York JA. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, 1982, 48: 1507-1510
- 34 Grebogi C, Ott E. Crisis, Sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, 7(1): 181-200