

化可分离凸规划为对偶规划显式模型的普适解法研究比较

彭细荣, 隋允康

RESEARCH ON UNIVERSAL SOLUTION OF TRANSFORMING SEPARABLE CONVEX PROGRAMMING TO DUAL PROGRAMMING WITH EXPLICIT MODEL

Peng Xirong and Sui Yunkang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-23-267>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

求解一类可分离凸规划的对偶显式模型DP-EM方法

A DUAL EXPLICIT MODEL BASED DP-EM METHOD FOR SOLVING A CLASS OF SEPARABLE CONVEX PROGRAMMING
力学学报. 2017, 49(5): 1135-1144

互逆规划的拓宽和深化及其在结构拓扑优化的应用

WIDENING AND DEEPENING OF RECIPROCAL PROGRAMMING AND ITS APPLICATION TO STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION
力学学报. 2020, 52(6): 1822-1837

基于改进的双向渐进结构优化法的应力约束拓扑优化

STRESS-CONSTRAINED TOPOLOGY OPTIMIZATION BASED ON IMPROVED BI-DIRECTIONAL EVOLUTIONARY OPTIMIZATION METHOD
力学学报. 2018, 50(2): 385-394

互逆规划理论及其用于建立结构拓扑优化的合理模型

RECIPROCAL PROGRAMMING THEORY AND ITS APPLICATION TO ESTABLISH A REASONABLE MODEL OF STRUCTURAL TOPOLOGY OPTIMIZATION
力学学报. 2019, 51(6): 1940-1948

含有非圆形双孔的无限平板中应力的解析解研究

ANALYTICAL STRESS SOLUTION RESEARCH ON AN INFINITE PLATE CONTAINING TWO NON-CIRCULAR HOLES
力学学报. 2019, 51(1): 170-181

考虑破损-安全的连续体结构拓扑优化ICM方法

ICM METHOD FOR FAIL-SAFE TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURES
力学学报. 2018, 50(3): 611-621



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

化可分离凸规划为对偶规划显式模型的普适解法研究比较¹⁾

彭细荣^{*, 2)} 隋允康^{†, 3)}

^{*}(湖南城市学院土木工程学院, 湖南益阳 413000)

[†](北京工业大学材料与制造学部, 北京 100022)

摘要 文章旨在提升对偶规划显式模型 (dual programming-explicit model, DP-EM) 的建模和求解的境界. DP-EM 模型从一类变量可分离凸规划的特点出发, 突破了对偶目标二阶采用近似的定势, 推导出显式的对偶目标函数; 应用于 ICM 方法求解连续体结构拓扑优化问题时, 其求解效率比对偶序列二次规划方法 (DSQP) 和可移动渐近线方法 (MMA) 求解效率更高. 文章进一步把常见的一类显式模型抽象为普适的可分离凸规划列式, 在需要满足的一些条件下, 转换为 DP-EM 模型, 并且提出 4 种处理方法: (1) 对偶变量迭代逼近法; (2) 指数函数形式的解法; (3) 幂函数形式的解法; (4) 基于变换的精确解法. 为了进行数值验证, 做了广泛的计算, 限于篇幅, 文章列出了 5 个具有代表性的算例, 除了算例 1 属于纯数学问题, 其余 4 个算例皆基于 ICM 方法, 分别对于位移、应力、疲劳等约束和破损-安全的连续体结构拓扑优化问题, 基于所提出的方法进行建模和求解, 都显示了所提出方法的普适性及更高的求解效率. 工作的意义在于: (1) 深度方面, 加深了结构优化对偶解法的研究; (2) 广度方面, 对数学规划对偶理论的发展做出了新的贡献.

关键词 结构拓扑优化, 映射函数, 求解效率, ICM 方法

中图分类号: O343.1 文献标识码: A doi: [10.6052/0459-1879-23-267](https://doi.org/10.6052/0459-1879-23-267)

RESEARCH ON UNIVERSAL SOLUTION OF TRANSFORMING SEPARABLE CONVEX PROGRAMMING TO DUAL PROGRAMMING WITH EXPLICIT MODEL¹⁾

Peng Xirong^{*, 2)} Sui Yunkang^{†, 3)}

^{*}(School of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000 Hunan, China)

[†](College of Materials and Manufacturing, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract This paper aims to improve the modeling and solving level of DP-EM (dual programming-explicit model) method. Based on the characteristics of a class of convex programming with separable variables, the DP-EM model breaks through the usual way of using second-order approximation for the dual objective function, and derives an explicit dual objective function. The DP-EM method is more efficient than the dual sequential quadratic programming (DSQP) and the method of moving asymptotes (MMA) when it is applied to the ICM method solving the continuum topology

2023-06-28 收稿, 2023-08-20 录用, 2023-08-21 网络版发表.

1) 湖南省自然科学基金 (2022JJ30113) 和湖南省教育厅重点项目 (21A0507) 资助项目.

2) 通讯作者: 彭细荣, 教授, 主要研究方向为结构优化设计. E-mail: pxr568@163.com

3) 通讯作者: 隋允康, 教授, 主要研究方向为结构优化设计. E-mail: ysui@bjut.edu.cn

引用格式: 彭细荣, 隋允康. 化可分离凸规划为对偶规划显式模型的普适解法研究比较. 力学学报, 2023, 55(10): 2417-2426

Peng Xirong, Sui Yunkang. Research on universal solution of transforming separable convex programming to dual programming with explicit model. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(10): 2417-2426

optimization problems. In this paper, the common explicit models are abstracted into universal separable convex programming, and then converted into DP-EM models under certain conditions. Four processing methods are proposed: (1) The approximate solution of iterative approximation of dual variables; (2) The solution of objective and constraint functions with the exponential function form; (3) The solution of objective and constraint functions with the power function form; (4) Accurate solution based on variable transformation. In order to conduct numerical verification, extensive calculations have been carried out. Limited by paper space, five representative examples among them are listed. Example 1 is a pure mathematical problem, which is used to compare the efficiency of the processing method 1 and the processing method 4. The remaining four examples are all continuum topology optimization problems modeled and solved by the ICM (independent continuous and mapping) method, including displacement, stress, fatigue constraint problems and fail-safe optimization. Those four examples are illustrations of the processing method 3. All the results show the universality of the proposed method and the higher solving efficiency. The proposed method can be used for different penalty functions in the variable density method and filtering functions in the ICM method. And the proposed method is more efficient than the MMA method. The contribution of the work is as follows: (1) In depth, it deepens the research on the dual solution of structural optimization; (2) In breadth, it makes a contribution to the dual theory of mathematical programming.

Key words structural topology optimization, mapping function, solving efficiency, ICM method

引言

Fleury 首先将非线性对偶规划引到结构优化领域, 进行建立模型和求解算法的研究^[1-3]. 钱令希团队用对偶序列二次规划算法求解结构优化问题^[4]. 结构优化中经典的优化求解算法如 CONLIN (convex linearization method)^[5] 是基于对偶算法. Svanberg^[6] 提出的移动渐近线法 (MMA) 也是基于对偶算法. Beekers 等^[7] 和 Hoppe 等^[8] 均是较早研究了利用原-对偶算法解决结构优化问题. 隋允康等^[9-10] 结合累积迭代信息策略, 研究了对偶算法在结构优化中的方法和应用. 吴京等^[11] 和金鹏等^[12] 用对偶规划研究了钢管混凝土拱结构优化设计问题. Xuan 等^[13] 在优化层应用对偶内点法的线性规划和在分析层应用二次规划法求解非光滑结构优化问题. Etman 等^[14] 研究了利用对偶理论的近似对角二次规划法. Cronje 等^[15] 探讨了序列对偶近似规划中约束的等效性. Liang 等^[16] 通过序列整数规划和典范对偶理论求解结构拓扑优化问题.

多数结构拓扑优化方法对应的模型归结为非线性规划, 如均匀化方法^[17], 变密度方法^[18]、ICM(独立连续映射)方法^[19-21]、水平集方法^[22-23]、拓扑导数法^[24-25]、MMC(可移动变形组件)方法^[26]、CBS (close B-splines) 方法^[27] 等, 可以采用基于非线性规划理论的各种求解算法. 如果采用数学规划对偶理论, 借助原-对偶变量的显式关系, 将大规模的原问

题转化为小规模的对偶问题求解, 可以大幅度地提高算法的效率^[19-21]. 然而, 对偶目标函数却是一个含参数的极小化问题, 难以求解出对偶目标函数的显式表达式, 只得转而求其 1 阶导数和 2 阶导数, 构造二次规划逼近对偶规划, 迭代求解, 最后由对偶问题最大解求出原问题的最小解.

隋允康等^[28] 从优化所建立的数学规划模型的特点出发, 针对一大类广泛遇见的变量可分离的凸规划问题, 突破了只是停留在对偶目标二阶近似的定势, 推导得出了显式的对偶目标函数. 在这一研究的基础上, 提出了便捷求解的对偶规划显式模型 (dual programming-explicit model, DP-EM) 方法, 并将其应用于 ICM 方法^[19-21] 求解连续体结构拓扑优化问题, 将 DP-EM 方法与基于 DSQP 算法及 MMA 算法^[6] 的方法进行计算效率对比, 结果显示 DP-EM 方法具有更高的求解效率.

本文的工作旨在进一步提升 DP-EM 方法的境界, 隋允康等^[28] 提出的 DP-EM 方法仅解决了优化模型中约束和目标函数的每一项均为幂函数形式的情况 (对应于本文所列举的情况 3: 幂函数形式的解法), 而本文把常见的一类变量可分离的凸规划模型抽象为普适的可分离规划列式, 在需要满足的一些条件下, 转换为 DP-EM 解法. 相关工作有 4 个具体的成果: (1) 对偶变量迭代逼近法; (2) 指数函数形式的解法; (3) 幂函数形式的解法; (4) 基于变换的精确

解法. 这一工作有深度与广度两方面的意义: (1) 深度方面, 加深了结构优化对偶解法的研究, 相关的结论在结构拓扑优化里得到了验证; (2) 广度方面, 对数学规划对偶理论的发展做出了新贡献. 预期今后无论在数学规划寻优算法和结构拓扑优化的求解中, 都将会进一步的有应用.

1 普适的可分离凸规划转换为 DP-EM 解法

可分离规划通常可以表达为

$$\left. \begin{aligned} \min_{x \in E^N} F(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\ \text{s.t. } G_j(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N g_{ji}(x_i) - \bar{g}_j \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, M) \\ \underline{x}_i &\leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 f_i 和 g_{ji} 为任意的单变量函数, 即目标函数与约束条件属于可分离函数形式.

式 (1) 的拉格朗日函数为

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{j=1}^M \lambda_j \left(\sum_{i=1}^N g_{ji}(x_i) - \bar{g}_j \right) \quad (2)$$

其中 λ_j ($j=1, 2, \dots, M$) 为拉格朗日乘子.

原问题 (1) 的对偶问题为

$$\left. \begin{aligned} \max_{\lambda \in E^M} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \\ \text{s.t. } \lambda_j &\geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} (L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (4)$$

式 (4) 的库恩-塔克条件为

$$\frac{df_i(x_i^*)}{dx_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{dg_{ji}(x_i^*)}{dx_i} \begin{cases} < 0 & (x_i^* = \bar{x}_i) \\ = 0 & (\underline{x}_i < x_i^* < \bar{x}_i) \\ > 0 & (x_i^* = \underline{x}_i) \end{cases} \quad (5)$$

式 (5) 表明存在如下的函数关系

$$x_i^* = x_i^*(\boldsymbol{\lambda}) \quad (6)$$

式 (6) 表达了抽象的原-对偶设计变量关系, 当对偶规划的最优解求出来之后, 需根据具体的原-对偶设计变量关系式 (5) 由对偶规划的最优解求出来对应的原规划最优解. 可以按如下两步求解式 (5).

先得到如下非线性方程的解

$$\frac{df_i(x_i^s)}{dx_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{dg_{ji}(x_i^s)}{dx_i} = 0 \quad (7)$$

由式 (7) 的解得到

$$x_i^* = \begin{cases} \bar{x}_i & (\text{if } x_i^s > \bar{x}_i) \\ x_i^s & (\text{if } \underline{x}_i < x_i^s < \bar{x}_i) \\ \underline{x}_i & (\text{if } x_i^s < \underline{x}_i) \end{cases} \quad (8)$$

为了给推导对偶规划的海赛阵做准备, 先将式 (6) 代入式 (5) 得

$$\frac{df_i(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{dg_{ji}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i} \begin{cases} < 0 & (x_i^* = \bar{x}_i) \\ = 0 & (\underline{x}_i < x_i^* < \bar{x}_i) \\ > 0 & (x_i^* = \underline{x}_i) \end{cases} \quad (9)$$

对偶规划有如下结论^[2-3]

$$\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} = G_j(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\lambda})) \quad (10)$$

由式 (10) 可列出对偶目标函数的梯度向量, 而其海赛阵的元素则可在式 (10) 继续求偏导数给出

$$\frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \frac{\partial G_j(\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^N \frac{dg_{ji}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i} \frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} \quad (11)$$

为了求出 $\frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k}$, 对式 (9) 的 $\underline{x}_i < x_i^* < \bar{x}_i$ 即 $i \in I_a$, 求 λ_k 的偏导数得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f_i(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i^2} \frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_k} \frac{dg_{ki}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i} + \\ & \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{d^2 g_{ji}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i^2} \frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

由式 (12) 得

$$\frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = \frac{-\frac{dg_{ki}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i}}{\frac{d^2 f_i(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i^2} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{d^2 g_{ji}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i^2}} \quad (13)$$

式 (13) 是 $i \in I_a$ 的结果; 若 $i \notin I_a$, 则有

$$x_i^* \equiv \begin{cases} \bar{x}_i & (\text{if } x_i^* > \bar{x}_i) \\ \underline{x}_i & (\text{if } x_i^* < \underline{x}_i) \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{\partial x_i^*(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (15)$$

于是, 若 $i \notin I_a$ 时, 将式 (13) 和式 (15) 代入式 (11), 就得到了

$$\frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i \in I_a} \frac{\frac{dg_{ji}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i} \frac{dg_{ki}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i}}{\frac{d^2 f_i(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i^2} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{d^2 g_{ji}(x_i^*(\boldsymbol{\lambda}))}{dx_i^2}} \quad (16)$$

有了式 (10) 和式 (16), 就可以构造对偶规划的

近似 2 阶显式

$$\varphi(\lambda) = \nabla^T \varphi(\lambda^{(v)})(\lambda - \lambda^{(v)}) + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{(v)})^T \nabla^2 \varphi(\lambda^{(v)})(\lambda - \lambda^{(v)}) \quad (17)$$

其中 $\lambda^{(v)}$ 取上一步的最优解 λ^* 作为本次的初始点, 以便构造第 v 次的对偶二次规划模型.

当第 v 次寻优收敛后, 需要代入式 (6) 求出对应的原变量最优解. 不过式 (6) 只是理论上的表达, 具体将第 $v+1$ 次的最优解 $\lambda^{(v+1)}$ 代入式 (7) 求出 $\mathbf{x}^s$, 然后代入式 (8) 得到第 $\mu+1$ 次的原变量 $\mathbf{x}^{(\mu+1)}$, 这里的 μ 与 v 不同, 它表示结构重分析的指标. 经过在 $\mathbf{x}^{(\mu+1)}$ 的结构重分析之后, 重新构造新的对偶规划式 (17), 其中梯度向量和海赛阵分别按式 (10) 和式 (16) 构造, 此时的式 (17) 中的 v 清零, 取 $\lambda^{(0)} = \lambda^{(v+1)}$, 这里的 $\lambda^{(v+1)}$ 是前一步的最优解, 开始新一轮的对偶规划寻优, 式 (3) 是一个迭代的寻优序列, 直到得到新一轮的最优解为止. 然后, 再求出新的原变量.

值得探讨一下式 (7) 的算法实现. 在求解式 (7) 时, 于具体的 λ 值, 除了可按变量 x_i 非线性方程式求解, 常常会遇到显式解, 更为方便.

由于式 (16) 中含有 λ_j ($j=1, 2, \dots, M$), 因而需对此进行处理, 使对偶二阶导数不显含对偶变量. 下面给出 4 种处理方法, 分别是: (1) 对偶变量迭代逼近法; (2) 指数函数形式的解法; (3) 幂函数形式的解法; (4) 基于变换的精确解法.

1.1 对偶变量迭代逼近法

在迭代寻优过程中, 取式 (13) 中的 $f_k(\lambda_j) = (t_i)^b$ 为上一步的变量, 于是海赛阵中就不显含本次的对偶变量了.

至于由对偶规划的最优解按式 (7) 和式 (8) 求出对应的原变量, 一般要求解 N 个变量 x_i 各自的非线性方程解, 有时存在原-对偶变量之间的显函数关系可以利用, 从而勿需求解非线性方程.

1.2 指数函数形式的解法

若约束函数存在下述形式

$$g_{ji}(x_i) = a_{ji}e^{b_i x_i} \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M) \quad (18)$$

其中 a_{ji} 和 b_i 为实数值.

将式 (18) 代入式 (16) 得

$$\frac{\partial^2 \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i \in I_a} \frac{a_{ji} a_{ki} b_i^2 e^{2b_i x_i^*}}{\frac{d^2 f_i(x_i^*)}{dx_i^2} + \sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji} b_i^2 e^{b_i x_i^*}} \quad (19)$$

为了将式 (19) 中含 λ_j ($j=1, \dots, M$) 的项消除, 现将式 (18) 代入到式 (5), 得

$$\sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji} b_i e^{b_i x_i^*} = - \frac{df_i(x_i^*)}{dx_i} \quad (i \in I_a) \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (19) 得

$$\frac{\partial^2 \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i \in I_a} \frac{a_{ji} a_{ki} b_i^2 e^{2b_i x_i^*}}{\frac{d^2 f_i(x_i^*)}{dx_i^2} - b_i \frac{df_i(x_i^*)}{dx_i}} \quad (21)$$

为了求出原-对偶变量的函数关系, 假定有

$$f_i(x_i) = c_i e^{d_i x_i} \quad (22)$$

将式 (22) 代入到式 (20) 得

$$e^{(d_i - b_i)x_i^*} = \frac{- \sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji} b_i}{c_i d_i} \quad (23)$$

若上式右边大于 0 能够保证, 则得到原-对偶变量的如下显式关系, 避免了非线性方程的求解

$$x_i^* = \frac{1}{d_i - b_i} \ln \left(\frac{- \sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji} b_i}{c_i d_i} \right) \quad (24)$$

1.3 幂函数形式的解法

若约束函数存在下述形式

$$g_{ji}(x_i) = a_{ji} x_i^{b_i} \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M) \quad (25)$$

其中 a_{ji} 和 b_i 为实数值.

同上一情况类似, 可以推导出

$$\frac{\partial^2 \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i \in I_a} \frac{a_{ji} a_{ki} b_i^2 (x_i^*)^{2b_i - 2}}{\frac{d^2 f_i(x_i^*)}{dx_i^2} - \frac{b_i - 1}{x_i} \frac{df_i(x_i^*)}{dx_i}} \quad (26)$$

为了求出原-对偶变量的函数关系, 假定有

$$f_i(x_i) = c_i x_i^{d_i} \quad (27)$$

将式 (25) 和式 (27) 代入式 (5), 得到原-对偶变量的如下显式关系

$$x_i^* = \left(\frac{-b_i \sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji}}{c_i d_i} \right)^{\frac{1}{d_i - b_i}} \quad (28)$$

上式开方时必须注意实根的存在.

1.4 基于变换的精确解法

第 2 和第 3 种处理针对两种函数形式的情况,

能否给出约束函数更一般情况的处理? 本文就如下情况予以回答.

若

$$g_{ji}(x_i) = a_{ji}\theta_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M) \quad (29)$$

满足凸函数条件, 则将式 (29) 代入式 (1) 得

$$\left. \begin{aligned} \min_{x \in E^N} F(x) &= \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\ \text{s.t. } G_j(x) &= \sum_{i=1}^N a_{ji}\theta_i(x_i) - \bar{g}_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M) \\ \underline{x}_i &\leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

引入变换及其逆变换

$$z_i = \theta_i(x_i), \quad x_i = \theta_i^{-1}(z_i) \quad (31)$$

代入式 (30) 得

$$\left. \begin{aligned} \min_{z \in E^N} F(z) &= \sum_{i=1}^N f_i(z_i) \\ \text{s.t. } G_j(z) &= \sum_{i=1}^N a_{ji}z_i - \bar{g}_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M) \\ \underline{z}_i &\leq z_i \leq \bar{z}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

其中

$$f_i(x_i) = f_i(\theta_i^{-1}(z_i)), \quad \underline{z}_i = \theta_i(\underline{x}_i), \quad \bar{z}_i = \theta_i(\bar{x}_i) \quad (33)$$

仿前面的推导, 得如下结果

$$\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_j} = G_j(z^*(\lambda)) \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i \in I_a} \frac{a_{ji}a_{ki}}{\frac{d^2 f_i(z_i^*)}{dz_i^2}} \quad (35)$$

$$\frac{df_i(z_i^*)}{dz_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji} = 0 \quad (36)$$

$$z_i^* = \begin{cases} \bar{z}_i & (\text{if } z_i^s > \bar{z}_i) \\ z_i^s & (\text{if } \underline{z}_i < z_i^s < \bar{z}_i) \\ \underline{z}_i & (\text{if } z_i^s < \underline{z}_i) \end{cases} \quad (37)$$

其中表达原-对偶变量关系的式 (36) 并不需要解非线性方程, 记

$$\frac{df_i(z)}{dz_i} = \Omega_i(z_i), \quad z^s = \Omega^{-1} \left(- \sum_{j=1}^M \lambda_j a_{ji} \right) \quad (38)$$

由式 (37) 解得 z_i^* 后, 可得规划式 (30) 的解

$$x_i^* = \theta_i^{-1}(z_i^*) \quad (39)$$

以上的 4 种处理尽量不采用第 1 种, 原因是多了一个对 λ 的迭代过程. 当分离的每一项函数形式为指数函数或幂函数时分别按第 2 种和第 3 种处理, 一般情况下可采用第 4 种处理.

2 算例

本研究团队以往用对偶规划求解结构优化问题时, 多遇到幂函数的情况, 故多按第 3 种情况进行了处理, 当时的推导均为个案进行, 现以算例 2 至算例 5 中 4 类不同结构拓扑优化问题为例, 按本文的结果进行了验证. 算例 1 为特别设计的简单数学算例, 以比较按第 1 种情况和第 4 种情况处理的效率, 其它算例均是按第 3 种情况处理.

2.1 算例 1: 普适处理的效果比较

取

$$f_i(x_i) = c_i \frac{x_i}{1+2(1-x_i)}, \quad g_{ji}(x_i) = a_{ji} \frac{1+5(1-x_i)}{x_i}$$

计算如下可分离非线性优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min_{x_1, x_2} F(x_1, x_2) &= 2 \frac{x_1}{1+2(1-x_1)} + 5 \frac{x_2}{1+2(1-x_2)} \\ \text{s.t. } G_1(x_1, x_2) &= 6 \frac{1+5(1-x_1)}{x_1} + 3 \frac{1+5(1-x_2)}{x_2} \leq 47 \\ 0.01 &\leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

取初值 $(x_1, x_2) = (0.01, 0.01)$, 按第 1 种情况处理, 迭代 12 次, 目标值 1.9226, 最优点 $(x_1, x_2)^* = (0.7137, 0.4331)$. 按第 4 种情况处理, 迭代 9 次, 目标值最优值相同. 第 4 种处理方式的迭代次数更少. 算例 1 的目标函数等值线及约束可行域如图 1 所示, 星号点为最优值.

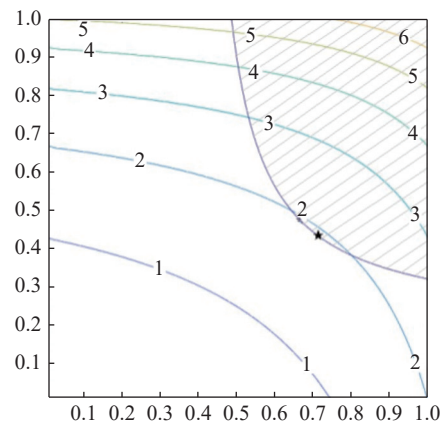


图 1 算例 1 的目标函数等值线及可行域

Fig. 1 Contour lines of the objective function and feasible region of example 1

2.2 算例 2: 位移约束下连续体拓扑优化问题^[19-21,28]

本算例以多工况位移约束下结构重量极小化结构拓扑优化问题为例, 比较 MMA 算法^[6]与本文提出的 DP-EM 算法的计算效率. 算例数据如下.

如图 2 所示, 基结构尺寸为 $240 \times 120 \times 1$ 的平面体, 材料弹性模量为 $E = 1$, 泊松比为 0.3. 左右边界固定, 工况 1: 集中载荷 $F_1 = -1$ 竖直向下作用于上边界中点; 工况 2: 集中载荷 $F_2 = 1$ 竖直向上作用于下边界中点 (力以竖直向上为正). 计算网格为 240×120 个正方形单元. 初始位移为工况 1 沿集中载荷 F_1 方向位移为 -5.156 , 工况 2 沿集中载荷 F_2 方向位移为 5.156 (位移方向竖直向上为正). 位移约束为: 工况 1 时约束集中载荷 F_1 方向位移大于等于 -15 , 工况 2 时约束集中载荷 F_2 方向位移小于等于 15 . 收敛精度取 0.01.

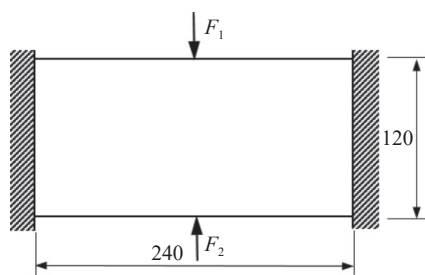


图 2 算例 2 结构力学简图
Fig. 2 Mechanical diagram of example 2

使用 MMA 算法经过 80 次迭代收敛, 历时 247.904 s, 最优点结构体积比为 24.88%, 上下结构边中点处约束点位移分别为 -15.001 和 15.001 , 最优拓扑图形如图 3(a) 所示. 使用 DP-EM 算法经过 75 次迭代收敛, 历时 65.435 s, 最优点结构体积比为 23.76%, 上下结构边中点处约束点位移分别为 -14.999 和 14.999 , 最优拓扑图形如图 3(b) 所示. MMA 算法的用时是 DP-EM 算法的 3.789 倍. 结果显示 DP-EM 算法具有更高的求解效率.

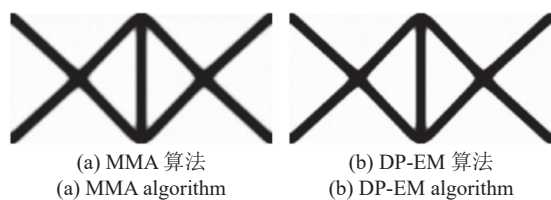


图 3 算例 2 最优拓扑
Fig. 3 Optimized topologies of example 2

2.3 算例 3: 应力约束下连续体拓扑优化问题^[29-31]

算例 3 的基结构及载荷与算例 2 相同, 只是为了避免集中力作用导致的应力集中, 将集中载荷分散布

置在相邻的 3 个节点上. Mises 应力约束小于或等于 0.3.

取用本文算法, 迭代 66 次收敛, 最优点体积比 15.42%, 最优拓扑图形如图 4 所示. 各工况的最大 Mises 应力为 0.2957, 两个工况下的 Mises 应力分布图如图 5 所示, 满足应力约束条件.



图 4 算例 3 最优拓扑
Fig. 4 Optimized topology of example 3

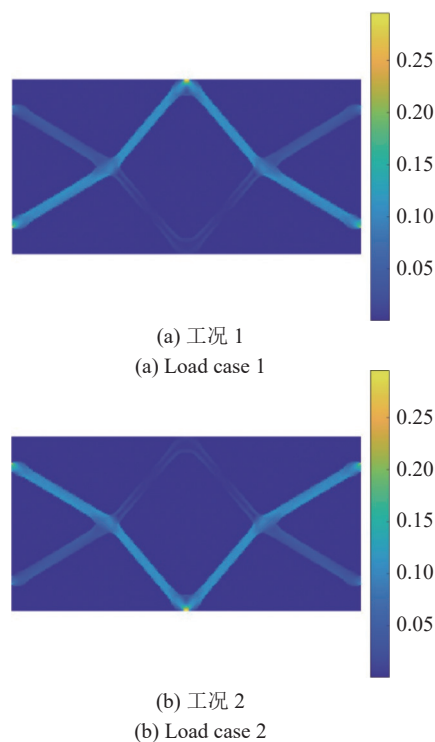


图 5 算例 3 Mises 应力分布
Fig. 5 Mises stress distributions of example 3

比较算例 2 可知, 位移约束与应力约束下的结构拓扑优化得到的最优拓扑是不相同的.

2.4 算例 4: 疲劳约束下连续体拓扑优化问题^[30-31]

如图 6 所示, 材料弹性模量为 $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 材料对应于循环次数 1.0×10^6 的疲劳极限为 $\sigma_s = 250$ MPa, 基结构为 $300 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ 的平面体, 划分为 300×100 个正方形单元. 基结构的左边界固定, 正弦形式循环载荷 $F = 7500 \text{ N}$ 且均值为零, 相位角为零, 作用于基结构右边界的中心点, 为了避免应力集中将载荷施加在 3 个节点上.

疲劳寿命约束为大于或等于 1.0×10^5 次. 巴士昆公式 $\sigma = AL^{-m}$ 中, σ 为疲劳循环下的材料应力, L 为对应的疲劳寿命, A 与 m 为材料给定的常数, 此例中取值为 $m = 0.10$, $A = 995.3$ MPa, $S-N$ 曲线如图 7 所示.

取用本文算法, 经过 62 次迭代收敛, 最优体积比为 39.73%, 最大疲劳寿命为 99163 次. 得到的最优拓扑如图 8 所示, 对应的疲劳寿命以 10 为底的对数分布如图 9 所示.

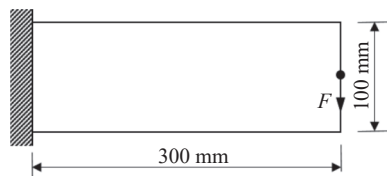


图 6 悬臂结构的分析优化模型

Fig. 6 Model of the cantilever structure for analysis and optimization

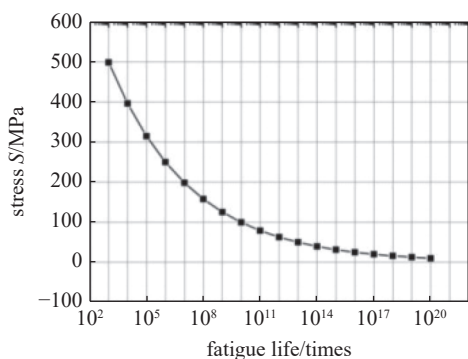


图 7 $m = 0.10$, $A = 995.3$ MPa 材料的 $S-N$ 曲线

Fig. 7 $S-N$ curve for the material with $m = 0.10$, $A = 995.3$ MPa



图 8 算例 4 最优拓扑

Fig. 8 Optimized topology of example 4

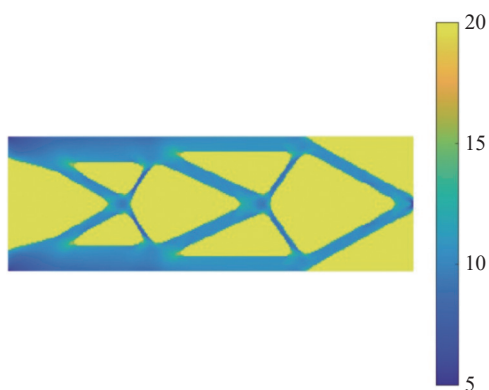


图 9 算例 4 最优时疲劳寿命分布

Fig. 9 Fatigue life distribution of the optimized topology of example 4

2.5 算例 5: 破损-安全拓扑优化问题^[32]

如图 10 所示, 基结构为 160×100 的平面体, 厚度为 1, 材料弹性模量为 1, 泊松比为 0.3. 左边界固定, 一集中载荷 $F = 1$ 作用于右边界中心位置. 采用 25×25 的正方形作为结构局部破损模式, 如图 11 中白色和灰色正方形所示, 采用无缝平铺的结构破损状况预估分布模式, 右边界附近区域为保留不发生破损的区域 (如图 11 所示方格子图案填充部分). 有限元网格为 160×100 个正方形单元, 位移约束条件为 A 点的竖直向下位移值小于 120.

不考虑破损-安全, 按传统安全理念进行拓扑优化, 得到的最优点体积比为 18.40%, 最优拓扑如图 12(a) 所示, 最优点时约束点位移值为 -119.9, 满足位移约束条件. 考虑破损-安全的结构拓扑优化最优点体积比为 38.12%, 最优拓扑如图 12(b) 所示. 可以看出, 考虑破损-安全之后得到的结构体积比更大, 结构拓扑更复杂, 但结构可满足所有破损情况下的安全. 图 13 为部分破损工况下的结构拓扑图及位

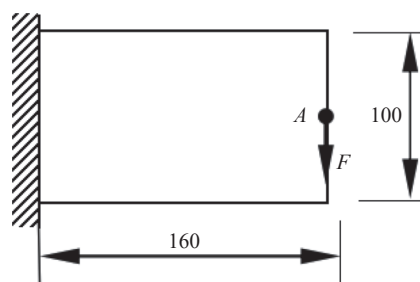


图 10 算例 5 力学模型

Fig. 10 Mechanical model of example 5

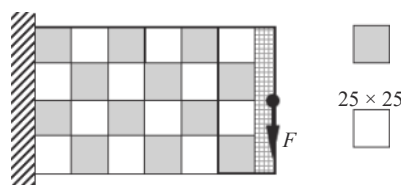
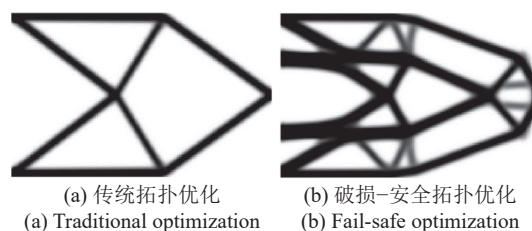


图 11 算例 5 的破损区域及其分布

Fig. 11 Fail regions and their distribution of example 5



(a) 传统拓扑优化 (b) 破损-安全拓扑优化
(a) Traditional optimization (b) Fail-safe optimization

图 12 算例 5 最优拓扑

Fig. 12 Optimized topologies of example 5

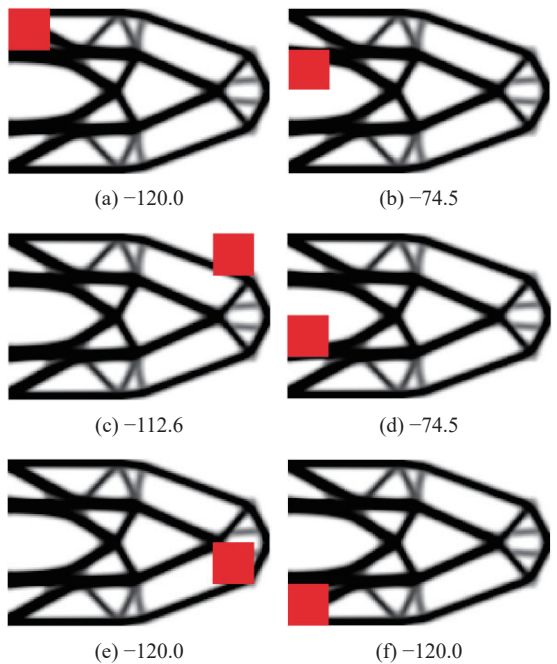


图 13 算例 5 带破损区域的最优拓扑及对应最优点时约束位移值
Fig. 13 Optimized topologies with failure regions and their constraint displacements of example 5

移,表 1 为最优点时所有各破损工况位移约束点的位移值,表中各行列数据均与图 11 中的破损工况位置一一对应,例如表中的第 1 行第 1 列数据 (-120.0) 对应于图 11 中第 1 行第 1 列破损位置发生破损,如图 13(a) 所示.可以看出有些破损工况是关键约束,有些破损工况不是关键约束,但所有破损工况均满足位移约束条件.

表 1 算例 5 最优点时各破损工况对应的约束点位移值

Table 1 Displacements at constraint point for all failure cases at optimization of example 5

Columns	Rows					
	1	2	3	4	5	6
1	-120.0	-120.0	-120.0	-116.3	-112.6	-112.6
2	-74.5	-94.2	-120.0	-118.5	-120.0	-120.0
3	-74.5	-94.2	-120.0	-118.5	-120.0	-120.0
4	-120.0	-120.0	-120.0	-116.3	-112.6	-112.6

3 结论

我们团队以往经常把对偶规划用于结构优化的建模和求解,尤其用于结构拓扑优化问题,以提高求解效率,不过那时建立对偶规划的海赛阵,均为对个

案的推导.

本文阐述了普适的处理方法,针对一类变量可分离凸规划模型,给出了 4 种处理方法: (1) 对偶变量迭代逼近法; (2) 指数函数形式的解法; (3) 幂函数形式的解法; (4) 基于变换的精确解法. 其中方法 (1) 和方法 (4) 是普适的方法,由于方法 4 不需要采用迭代逼近的近似求解,比方法 1 的求解效率更高. 而方法 2 和方法 3 则示例了当函数形式给定后,依据具体的函数形式,同样可以给出直接解法,而不需要如方法 1 中采取迭代解法.

不同于以往变密度法或 ICM 方法中针对某一具体惩罚函数或过滤函数形式所建立的优化模型给出个案的求解公式及算法,本文针对一类变量可分离凸规划模型所阐述的普适处理方法,对文献 [28] 的 DP-EM 方法进行了推广,从原来的只处理幂函数形式推广为可处理任意函数形式,因而保证今后惩罚函数或过滤函数采取不同函数形式时,优化模型的求解有一套普遍适用的可靠理论和算法. 本文所提出方法相比广泛使用的 MMA 方法具有更高的求解效率. 这说明理论高度的提升会导致更有效和广泛的应用前景. 相信本文的工作也会对于同行有借鉴作用.

参 考 文 献

1 Fleury C. Structural weight optimization by dual methods of convex programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14(2): 1761-1783

2 Fleury C. Primal and dual methods in structural optimization. *Journal of the Structural Division*, 1980, 106(5): 1117-1133

3 Fleury C, Braibant V. Structural optimization: A new dual method using mixed variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, 23(3): 409-428

4 钱令希, 钟万勰, 程耿东等. 工程结构优化设计的一个新途径——序列二次规划 SQP. *计算结构力学及其应用*, 1984, 1(1): 7-20 (Qian Lingxi, Zhong Wanxie, Cheng Gengdong, Sui Yunkang. An approach to structural optimization—sequential quadratic programming SQP. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1984, 1(1): 7-20 (in Chinese))

5 Fleury C. CONLIN: An efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. *Structural Optimization*, 1989, 1(2): 81-89

6 Svanberg K. The method of moving asymptotes—A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373

7 Beekers M, Fleury C. A primal-dual approach in truss topology optimization. *Computers & Structures*, 1997, 64(1-4): 77-88

8 Hoppe RHW, Linsenmann C, Petrova SI. Primal-dual Newton methods in structural optimization. *Computing and Visualization in Science*, 2006, 9(2): 71-87

- 9 隋允康, 阳志光. 应用两点有理逼近改进的牛顿法和对偶法. 大连理工大学学报, 1994, 34(1): 1-9 (Sui Yunkang, Yang Zhiguang. Modified newton's method and dual method through rational approximation at two expanded points. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, 34(1): 1-9 (in Chinese))
- 10 隋允康, 邢誉峰, 张桂明. 基于两点累积信息的原/倒变量展开的对偶优化方法. 力学学报, 1994, 26(6): 699-710 (Sui Yunkang, Xing Yufeng, Zhang Guiming. The dual optimization method by original/reciprocal variables' expansion based on cumulative information at two points. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 26(6): 699-710 (in Chinese))
- 11 吴京, 刘荣桂, 苏军. 对偶规划法在钢管混凝土拱桥结构优化设计中的应用. 工程力学, 1999, 16(4): 97-104 (Wu Jing, Liu Ronggui, Su Jun. Application of the dual theory to the CFST structure's optimization design. *Engineering Mechanics*, 1999, 16(4): 97-104 (in Chinese))
- 12 金鹏. 对偶规划法在钢管混凝土拱结构优化设计中的应用. 建筑结构学报, 2001, 22(6): 59-63 (Jin Peng. Optimum design of concrete filled steel tubular arch structure using dual theory. *Journal of Building Structures*, 2001, 22(6): 59-63 (in Chinese))
- 13 Xuan ZC, Shao PG. A programming approach for nonsmooth structural optimization. *Advances in Engineering Software*, 2000, 31(2): 75-81
- 14 Etman LFP, Groenwold AA, Rooda JE. First-order sequential convex programming using approximate diagonal QP subproblems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, 45(4): 479-488
- 15 Cronje M, Marthinus RN, Munro DP, et al. Brief note on equality constraints in pure dual SAO settings. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 59(5): 1853-1861
- 16 Liang Y, Cheng GD. Topology optimization via sequential integer programming and Canonical relaxation algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 348(5): 64-96
- 17 Bendsoe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224
- 18 Mlejnek HP. Some aspects of the genesis of structures. *Structural Optimization*, 1992, 5(1-2): 64-69
- 19 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展. 大连: 大连理工大学出版社, 1996 (Sui Yunkang. Modelling, Transformation, and Optimization—New Developments of Structural Synthesis Method. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996 (in Chinese))
- 20 隋允康, 叶红玲. 连续体结构拓扑优化的 ICM 方法. 北京: 科学出版社, 2013 (Sui Yunkang, Ye Hongling. Continuum Topology Optimization Methods ICM. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))
- 21 Sui YK, Peng XR, Modeling, Solving and Application for Topology Optimization of Continuum Structures: ICM Method Based on Step Function. Cambridge: Elsevier Inc., 2018
- 22 Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed-algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 1988, 79(1): 12-49
- 23 Wei P, Li ZY, Li XP, et al. An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(2): 831-849
- 24 Norato J, Bendsoe M, Haber R, et al. A topological derivative method for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4-5): 375-386
- 25 Cai SY, Zhang WH. An adaptive bubble method for structural shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 360: 1-25
- 26 Guo X, Zhang WS, Zhang J. Explicit structural topology optimization based on moving morphable components (MMC) with curved skeletons. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 310(10): 711-748
- 27 Zhang WH, Zhao LY, Gao T, et al. Topology optimization with closed B-splines and Boolean operations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 315(3): 652-670
- 28 隋允康, 彭细荣. 求解一类可分离凸规划的对偶显式模型 DP-EM 方法. 力学学报, 2017, 49(5): 1135-1144 (Sui Yunkang, Peng Xirong. A dual explicit model based DP-EM method for solving a class of separable convex programming. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(5): 1135-1144 (in Chinese))
- 29 彭细荣, 隋允康, 叶红玲等. 比较基于化整交融应力拓扑优化诸解法的效果. 力学学报, 2022, 54(2): 459-470 (Peng Xirong, Sui Yunkang, Ye Hongling, et al. Effect comparison of globalization blend based-methods for stress topology optimization. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(2): 459-470 (in Chinese))
- 30 隋允康, 彭细荣, 叶红玲等. 结构拓扑优化局部性能约束下轻量化问题的互逆规划解法. 计算力学学报, 2021, 38(4): 479-486 (Sui Yunkang, Peng Xirong, Ye Hongling, et al. Reciprocal programming method for structural lightweight topology optimization with local performance constraints. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, 38(4): 479-486 (in Chinese))
- 31 彭细荣, 隋允康, 叶红玲等. K-S 函数集成局部性能约束的结构拓扑优化二阶逼近解法. 固体力学学报, 2022, 43(3): 307-317 (Peng Xirong, Sui Yunkang, Ye Hongling, et al. Second-order approximation algorithm of using K-S function to integrate local performance constraints in structural topology optimization. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2022, 43(3): 307-317 (in Chinese))
- 32 彭细荣, 隋允康. 考虑破损-安全的连续体结构拓扑优化 ICM 方法. 力学学报, 2018, 50(3): 611-621 (Peng Xirong, Sui Yunkang. ICM method for fail-safe topology optimization of continuum structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 611-621 (in Chinese))

附录 A

以下列举基于 ICM 方法建立的位移、应力、疲劳等约束下结构拓扑优化模型, 以及考虑破损-安全的结构拓扑优化模型.

(1) 位移约束连续体结构拓扑优化^[19-21,28]

采用幂函数形式的过滤函数, 单元重量及单元刚度用过滤函数识别

$$w_i = (t_i)^\alpha w_i^0, \quad k_i = (t_i)^\beta k_i^0 \quad (\text{A1})$$

其中 w_i 及 k_i 为单元重量及单元刚度阵, w_i^0 及 k_i^0 为单元固有重量及单元固有刚度阵. $f_w(t_i) = (t_i)^\alpha$ 及 $f_k(t_i) = (t_i)^\beta$ 分别为单元重量及单元刚度的幂函数形式过滤函数.

结构总重量表达为

$$w_i = \sum_{i=1}^N (t_i)^\alpha w_i^0 \quad (\text{A2})$$

其中 N 表示单元拓扑设计变量的总数.

位移利用莫尔定理表达为

$$u_j = \sum_{i=1}^N \frac{(t_i^{(k)})^\beta}{(t_i)^\beta} [(u_{ij}^V)^T F_i^R]^{(k)} = \sum_{i=1}^N \frac{(t_i^{(k)})^\beta}{(t_i)^\beta} A_{ij} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{ij}}{(t_i)^\beta} \quad (\text{A3})$$

其中 $t_i^{(k)}$ 为第 k 步迭代时单元 i 对应的拓扑变量值, u_{ij}^V 及 F_i^R 为单元 i 在第 j 个位移对应单位虚工况下的单元节点位移向量及在实工况下的单元节点力向量, $j = 1, 2, \dots, J, J = L \times R$ 为优化模型中位移约束条件总数, L 为工况数, R 为定义的位移约束总数. $A_{ij} = [(u_{ij}^V)^T F_i^R]^{(k)}$ 定义为第 k 次迭代时单元 i 对位移 j 的贡献系数, $c_{ij} = (t_i^{(k)})^\beta A_{ij}$ 为位移 j 的约束近似方程系数.

用 ICM 法建立的拓扑优化模型表示为

$$\left. \begin{aligned} & \text{find } \mathbf{t} \in E^N \\ & \text{make } W = \sum_{i=1}^N (t_i)^\alpha w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^N \frac{c_{ji}}{(t_i)^\beta} \leq \bar{u}_j \\ & \quad \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

式中 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)^T$ 是单元拓扑设计变量向量 $\bar{u}_j$ 表示第 j 号位移约束的上限.

(2) 应力或疲劳局部性能约束连续体结构拓扑优化^[30-31]

对结构重量 (或体积)、结构局部性能如应力或疲劳寿

命等, 均用过滤函数进行识别

$$w_i(t_i) = w_i^0 f_w(t_i), \bar{\psi}_i(t_i) = f_\psi(t_i) \bar{\psi} \quad (\text{A5})$$

式中, $f_w(t_i)$ 及 $f_\psi(t_i)$ 分别为结构重量 (或体积) 及结构性能如应力或疲劳寿命等的过滤函数, w_i^0 及 $\bar{\psi}$ 分别为结构固有的重量 (或体积) 及结构性能如应力或疲劳寿命允许值等.

将 N 个约束应用 K-S 函数进行集成, 得到基于 K-S 函数集成的局部性能约束优化模型

$$\left. \begin{aligned} & \text{find } \mathbf{t} \in E^N \\ & \min : \sum_{i=1}^N w_i^0 f_w(t_i) \\ & \text{s.t. } \frac{1}{\rho} \ln \sum_{i=1}^N \exp \left(\rho \frac{\max_{l=1,2,\dots,L} (\psi_{il}^{(v)})}{f_\psi(t_i)} \right) \leq \bar{\psi} \\ & \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6})$$

式中 $\max_{(l=1,2,\dots,L)} (\psi_{il}^{(v)}) = \psi_i^{(v)}$, 称此措施为多工况的“单工况化”处理. ρ 为 K-S 函数参数, ρ 值越大, K-S 函数逼近效果越好.

(3) 考虑破损-安全的连续体结构拓扑优化^[32]

应用 ICM 方法, 建立的结构拓扑优化模型为

$$\left. \begin{aligned} & \text{find } \mathbf{t} \in E^N \\ & \text{make } V(\mathbf{t}, \Phi) = \max_{s=1,2,\dots,S} V_s(\mathbf{t}) \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } u_{jls}(\mathbf{t}) \leq \bar{u}_j \\ & \quad (j = 1, 2, \dots, J; l = 1, 2, \dots, L; s = 1, 2, \dots, S) \\ & \quad \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A7})$$

其中, $\mathbf{t}$ 为拓扑设计变量向量; $V(\mathbf{t}, \Phi)$ 为结构失效状况集合 Φ 中所有结构失效状况中体积最大值; $u_{jls}(\mathbf{t})$ 为结构失效状况集合 Φ 中第 s 号结构失效状况 Ω_s 在第 l 的载荷工况下的第 j 号位移约束函数, $\bar{u}_j$ 为第 j 号位移约束值; J 为位移约束总数, L 为载荷工况总数; $\underline{t}_i$ 为防止有限元分析时总刚度矩阵奇异而设置的拓扑变量下限值.

结构总体积及位移约束的显式化与 1 中的式 (A1)~式 (A4) 类似. 在此不再重复.