

近刚性壁面异相双气泡耦合及射流增强效应研究

吕 可, 邹佳俊, 陈 颖, 颜 帅, 李 帅, 张阿漫

STUDY ON THE INTERACTION AND JET ENHANCEMENT EFFECT OF TWO OUT-OF-PHASE BUBBLES NEAR A RIGID BOUNDARY

L ü Ke, Zou Jiajun, Chen Ying, Yan Shuai, Li Shuai, and Zhang Aman

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-23-105>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

壁面约束对裙带气泡动力学的影响

CONFINEMENT EFFECT ON THE RISING DYNAMICS OF A SKIRTED BUBBLE

力学学报. 2017, 49(5): 1050–1058

水中高压脉动气泡与浮体流固耦合特性研究

FLUID-STRUCTURE INTERACTION BETWEEN A HIGH-PRESSURE PULSATING BUBBLE AND A FLOATING STRUCTURE

力学学报. 2021, 53(4): 944–961

水中高压脉动气泡水射流形成机理及载荷特性研究

THE MECHANISM OF JETTING BEHAVIORS OF AN OSCILLATING BUBBLE

力学学报. 2019, 51(6): 1666–1681

应用边界积分法求圆形夹杂问题的解析解

EXACT SOLUTION OF CIRCULAR INCLUSION PROBLEMS BY A BOUNDARY INTEGRAL METHOD

力学学报. 2020, 52(1): 73–81

垂直壁面附近上升单气泡的弹跳动力学研究

THE BOUNCE DYNAMICS OF A RISING SINGLE BUBBLE NEAR A VERTICAL WALL

力学学报. 2020, 52(1): 1–11

含气泡油滴撞击油膜壁面时气泡的变形与破裂

DEFORMATION AND RUPTURE OF BUBBLE WHEN THE HOLLOW DROPLET IMPACTS ON THE OIL FILM

力学学报. 2018, 50(2): 427–437



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

近刚性壁面异相双气泡耦合及射流增强效应研究¹⁾吕 可 邹佳俊 陈 颖 颜 帅²⁾ 李 帅³⁾ 张阿漫

(哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要 气泡广泛存在于自然界和工程应用中, 由于其往往不是孤立存在的, 在多气泡耦合作用下会出现更为复杂有趣的气泡动力学现象和射流行为. 近刚性边界水下脉动气泡在坍塌过程中会产生朝向结构的高速射流, 严重威胁结构的局部强度安全. 通过多气泡耦合作用能够调控气泡的坍塌模式、射流方向和撞击速度, 其中异相双气泡耦合作用下形成的射流增强效应有着广阔的应用前景. 本文联合气泡动力学理论和边界积分法, 建立了近刚性壁面异相双气泡非线性耦合数值模型, 能够准确模拟气泡的初生、膨胀、坍塌和射流等动力学行为, 并预报双气泡的耦合方式和坍塌模式, 数值计算结果很好地再现了实验中的气泡动力学行为, 验证了模型的有效性. 然后, 系统研究了较大参数空间内的双气泡耦合动力学行为, 着重分析了射流增强效应, 并借助压力场、速度场等信息揭示了其中的力学机理. 研究发现, 气泡延迟生成时间 τ 极大地影响了双气泡耦合射流增强程度, 近壁面气泡的射流撞击速度随 τ 的增大先增大再减小, 在 $\tau = 2$ 附近达到极大值, 并得到了有效的射流增强参数区间. 旨在为多发水下爆炸武器的攻击策略及其它多气泡相关领域提供理论支撑.

关键词 气泡动力学, 多气泡, 高速射流, 延迟效应, 边界积分法

中图分类号: O358 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-23-105

STUDY ON THE INTERACTION AND JET ENHANCEMENT EFFECT OF TWO OUT-OF-PHASE BUBBLES NEAR A RIGID BOUNDARY¹⁾Lü Ke Zou Jiajun Chen Ying Yan Shuai²⁾ Li Shuai³⁾ Zhang Aman

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract Bubbles widely exist in nature and engineering applications. Bubbles usually do not appear in isolation and therefore more complex and interesting bubble dynamics and jet behaviors occur under multi-bubble coupling. The collapse of underwater pulsating bubble near rigid boundary will produce high-speed jet towards the structure, which will seriously threaten the local strength safety of the structure. The interaction of multiple bubbles can regulate and control the bubble collapse mode, jet direction, jet impact velocity, etc. in which the jet enhancement effect of out-of-phase double bubbles has a broad application prospect. In this work, a numerical model of nonlinear coupling of two out-of-phase bubbles near rigid boundary is established by combining bubble dynamics theory and boundary integral method. It can accurately simulate the dynamic behavior of the nascent, expansion and collapse jet of the bubble, and predict the coupling mode and collapse mode of the two bubbles. By comparing the numerical results with the experimental results,

2023-03-21 收稿, 2023-06-19 录用, 2023-06-20 网络版发表.

1) 国家重点研发计划 (2022YFC2803503), 黑龙江省自然科学基金 (YQ2022E017) 和国家级大学生创新创业训练计划 (202210217015) 资助项目.

2) 通讯作者: 颜帅, 博士研究生, 主要研究方向为多气泡耦合动力学等. E-mail: yanshuai@hrbeu.edu.cn

3) 通讯作者: 李帅, 副教授, 主要研究方向为流固耦合动力学、气泡动力学等. E-mail: lishuai@hrbeu.edu.cn

引用格式: 吕可, 邹佳俊, 陈颖, 颜帅, 李帅, 张阿漫. 近刚性壁面异相双气泡耦合及射流增强效应研究. 力学学报, 2023, 55(8): 1605-1617

Lü Ke, Zou Jiajun, Chen Ying, Yan Shuai, Li Shuai, Zhang Aman. Study on the interaction and jet enhancement effect of two out-of-phase bubbles near a rigid boundary. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(8): 1605-1617

the favorable agreement is achieved which validates this numerical model. Using the numerical model as is mentioned above, the dynamic behavior of two bubbles is studied systematically in a large parameter space, and the enhancement effect of the jet is analyzed emphatically. With the aid of the pressure and velocity information of flow field, the mechanical mechanism is revealed. It is found that the delay time of bubbles formation τ greatly affects the jet enhancement degree of double bubbles coupling. The jet impact velocity of the near-wall bubble increases first and then decreases with the increase of τ , and reaches the maximum value nearby $\tau = 2$. The effective parameter range of jet enhancement is obtained, which aims to provide new ideas and theoretical support for the attack strategy of multiple underwater explosive weapons.

Key words bubble dynamics, multiple bubbles, high-speed jet, delayed effect, boundary integral method

引言

气泡广泛存在于自然界和工程应用中,而且气泡常常并不是孤立产生,多气泡耦合现象十分普遍,例如气泡帷幕抗冲击^[1]、多发武器水下爆炸^[2-3]、超声波清洗^[4-6]、气枪阵列水下资源勘探^[7-8]等,其背后蕴含的多气泡动力学耦合机理具有重要的学术意义和工程价值.一般而言,近壁面气泡在坍塌阶段会产生朝向壁面的高速水射流,其速度在几十至百米每秒量级^[5].然而,多气泡耦合过程中会出现更为复杂有趣的气泡动力学现象和射流行为^[9-12].例如,同相双气泡坍塌阶段会产生对射流现象,异相双气泡可能出现“弹弓效应”反向射流增强现象^[13].“射流增强现象”,即当一个气泡形成坍塌射流后,另一个气泡紧接着产生,利用第二个气泡初生阶段的高压载荷增强第一个气泡的射流速度.然而,能够使气泡射流出现增强效应的参数空间和最优的参数组合,以及边界条件的影响规律仍有待深入研究,这也是本文拟开展的研究工作.

目前国内外科研人员在气泡动力学领域已开展了丰富的研究工作,取得了许多理论、实验和数值方面的成果. Rayleigh-Plesset 方程^[14]及国内外学者在其基础上提出的修正方程^[15-17]能较好地描述球状气泡的脉动过程.张阿漫等^[18]推导了能够同时计入边界效应、多气泡、迁移、可压缩性等条件和因素的气泡统一方程. Klaseboer 等^[19]通过建立的针对结构非线性响应的近边界三维气泡模型,模拟了刚性结构和弹性结构附近的水下爆炸气泡动力学行为并开展了相应的实验研究,分析了气泡射流、壁面迁移等气泡动力学问题.有关单气泡动力学特性的研究已经较为深入和广泛,这里不予详细综述,可参考相关的综述论文^[20-22].

在多气泡研究方面, Cui 等^[23]针对多个对称布

置的水下爆炸气泡间的耦合作用进行了实验研究,发现气泡的动力学行为基本对称,且气泡水射流速度随气泡间距离参数的增大而增大,同时射流体积减小. Han 等^[24]对自由场中两个毫米级气泡的耦合作用开展了实验和数值研究,发现两气泡间间距对射流行为有显著影响,同时两个反相气泡,即在其中一个气泡达到最大体积时产生另一个气泡,在彼此靠近但不发生融合的情况下能够有效提高射流速度. Tomita 等^[25]研究了轴对称布置的两个激光气泡在不同参数条件下的形态变化规律,总结了异相双气泡发生射流砰击的参数空间,发现延迟生成气泡的快速膨胀所引起的流体加速运动显著影响率先生成的气泡水射流速度和射流尖端形状. Liang 等^[26]对自由场中两同尺寸气泡在不同参数组合工况下的耦合行为进行了研究,区分了 5 种双气泡射流模式并给出了气泡不同耦合行为的边界条件. Liu 等^[13]采用边界元方法研究了受限流体域内两同相气泡与自由表面的耦合作用. Han 等^[27]通过实验和数值模拟研究了水下两个电火花气泡的气泡动力学行为,发现了射流形式与泡壁间距变化的规律. Blake 等^[28]比较了近边界两个同相激光诱导气泡的数值解和实验结果,发现气泡间的耦合作用和边界的影响同等重要. Li 等^[29]通过实验与数值模拟方法探究了两个同相水下爆炸气泡的非线性耦合作用,再现了融合气泡的多次分裂,一定程度上揭示了气泡云的形成机理.总的而言,前人针对多气泡耦合作用的研究多集中在自由场工况,少有针对近壁面异相双气泡耦合作用的研究,更鲜有针对射流增强效应的规律性探索与分析.

本文首先针对水下小尺度近壁面异相双气泡,联合气泡动力学理论和边界积分法,构建了近刚性壁面异相双气泡非线性耦合的数值模型,较好重现了前人进行的异相双激光气泡和电火花气泡实验中

重要的物理特征, 验证了本文数值模型的有效性. 然后, 利用建立的数值模型探究不同特征参数下双气泡在刚性固壁面附近的动力学行为, 以获得射流增强效果. 最后, 分析距离参数与气泡延迟生成时间对近刚性壁面气泡射流砰击速度的影响, 探索产生射流增强效果的参数空间. 本文结合典型工况的流场压力、速度信息, 阐释了双气泡射流增强效应的力学机理, 旨在为构建新型水中气泡毁伤技术提供新思路 and 理论支撑.

1 物理问题和数值模型

1.1 物理问题及无量纲化

如图 1 所示为本文所研究的近刚性壁面双气泡耦合问题在典型工况下的位置示意图, 双气泡布置在同一竖直线上, 定义靠近刚性壁面的气泡为气泡 1, 其下方气泡为气泡 2.

本文以气泡在自由场中脉动所能达到的最大半径 R_m 、流场中流体密度 ρ 以及坐标原点位置水平方向无穷远处的流场压力 P_∞ 作为特征量进行无量纲化, 同时以气泡 1 生成时的球心位置为原点建立坐标系, 定义两气泡生成时球心位置的垂向距离为 d_{bb} , 刚性壁面布置在气泡 1 上方, 定义气泡 1 生成时的球心位置与壁面的垂向距离为 d_{bw} . 定义气泡 1 和气泡 2 生成时间差为 Δt . 本文中带有“*”的变量均为无量纲量, 其中定义 V^* 是气泡水射流随时间发展过程中的瞬时速度, 而 V_{jet}^* 是气泡水射流砰击上表面时射流尖端的速度. 本文常用物理量的特征量如下表 1

表 1 本文常用物理量的无量纲因子

Table 1 The dimensionless factor of different physical quantities in this paper

Length	R_{max}	Pressure	P_∞
density	ρ	time	$R_{max}(\rho/P_\infty)^{0.5}$
velocity	$(P_\infty/\rho)^{0.5}$	acceleration	$P_\infty/(\rho R_{max})$

所示.

同时引入气泡间距 γ_{bb} , 泡壁间距 γ_{bw} , 延迟生成时间 τ , 气泡强度参数 ε 及浮力参数 δ 无量纲参数, 定义如下

$$\gamma_{bb} = \frac{d_{bb}}{R_m}, \gamma_{bw} = \frac{d_{bw}}{R_m}, \tau = \frac{\Delta t}{R_m} \sqrt{\frac{P_\infty}{\rho}}, \varepsilon = \frac{P_0}{P_\infty}, \delta = \sqrt{\frac{\rho g R_m}{P_\infty}} \quad (1)$$

其中, 气泡无量纲强度参数 ε 用以衡量气泡初始内压. Blake 等^[30] 和 Turangan 等^[31] 发现强度参数的选取对气泡射流时刻的气泡形态影响并不显著 (气泡无量纲初始半径会随 ε 变化), 在计算中较随意的选取气泡强度参数 $\varepsilon = 50 \sim 500$, 射流特性对强度参数的敏感性很低, 本文中为方便研究和控制计算量, 固定气泡的强度参数 $\varepsilon = 100$, 更多关于 ε 的影响规律可参考文献^[32], 本文不作更多的讨论. 浮力参数用以衡量气泡的浮力效应. 一般而言, 常压下的电火花气泡浮力参数趋近于 0, 浮力效应不明显^[33-34]; 在本文选取的两个实验验证工况中, 其气泡的浮力参数分别为 0.017 和 0.027, 针对第二个对比工况, 分别取浮力参数 $\delta = 0$ 和 $\delta = 0.027$ 进行计算, 计算结果如图 2 所示, 发现该条件下浮力参数对结果的影响

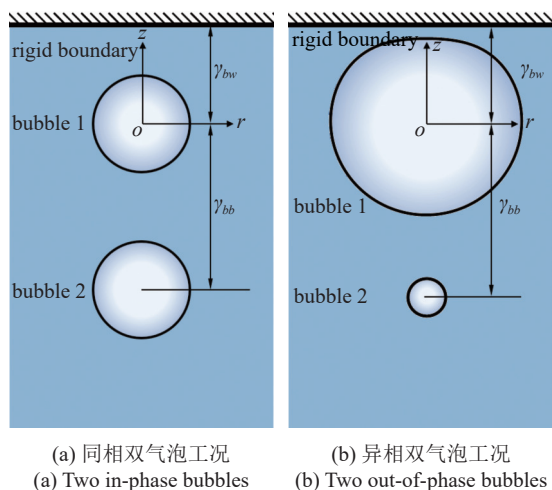


Fig. 1 Sketch of the coupling of two out-of-phase bubbles near rigid boundary

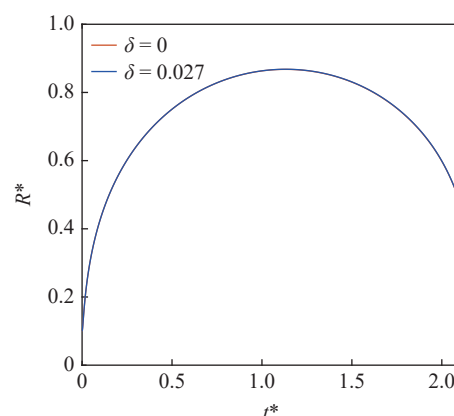


Fig. 2 The time history curves of the radius of bubble 1 at the buoyancy parameter δ of 0 and 0.027 when working condition 2

仅为 0.042%; 同时本文主要侧重探究近壁面异相双气泡在泡壁间距、泡泡间距和生成时延参数改变时气泡射流速度的变化规律, 所以取与小尺度空泡 (如激光气泡、电火花气泡) 相符的 $\delta = 0$ 条件以简化过多的特征参数.

1.2 边界积分法

基于势流理论, 采用边界元法^[35-37]对多气泡的发展演化过程进行时域模拟, 假设流体无黏无旋, 在气泡外部流场中存在速度势 φ^* 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (2)$$

本文采用壁面格林函数^[37]计算刚性壁面与双气泡的相互作用, 边界积分方程为

$$c(\mathbf{r}^*)\varphi^*(\mathbf{r}^*) = \iint_S \left[\frac{\partial \varphi^*(\mathbf{q}^*)}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{q}^*|} + \frac{1}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{q}'^*|} \right) - \varphi^*(\mathbf{q}^*) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{q}^*|} + \frac{1}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{q}'^*|} \right) \right] dS^* \quad (3)$$

其中, $\mathbf{r}^*$ 表示流场控制点, $\mathbf{q}^*$ 表示边界积分点, $\mathbf{q}'^*$ 为源点 $\mathbf{q}^*$ 相对于刚性壁面的镜像点, S^* 表示边界面, $c(\mathbf{r}^*)$ 为 $\mathbf{r}^*$ 点观察流场的立体角, n 表示边界上的法向, 以指向流场外部为正. 该方法无需离散刚性壁面, 能够提高计算效率, 壁面上自动满足以下条件

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

气泡表面上需要满足的动力学和运动学边界条件分别为

$$\frac{d\varphi^*}{dt^*} = \frac{|\nabla \varphi^*|^2}{2} + 1 - p_b^* - \delta^2 z^* \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} = \nabla \varphi^* \quad (6)$$

式中, d/dt^* 为物质导数, ρ^* 为无量纲液体密度, z^* 为垂直位置分量, p_b^* 为气泡内部压力.

气泡膨胀收缩过程中的气体压力 p_b^* 由绝热气体状态方程^[38]获得

$$p_b^* = p_c^* + p_0^* \left(\frac{V_0^*}{V^*} \right)^\kappa \quad (7)$$

其中, V^* 表示气泡体积, p_0^* 和 V_0^* 分别表示初始时刻的气泡的气体压力和气泡体积, p_c^* 为饱和蒸汽压, κ 为气体的比热, 一般取为 1.25 ~ 1.4. 以上各式为流场控制方程以及流场边界需要满足的边界条件, 联立

方程即可对气泡运动进行时域求解.

1.3 压力场与速度场求解

流场压力可由伯努利方程得到

$$p^* = 1 - \delta^2 z^* - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} - \frac{|\nabla \varphi^*|^2}{2} \quad (8)$$

当已知气泡表面及自由液面各个节点的速度势后, 可通过间接边界元法联合辅助函数法求解流场压力和速度场, 间接边界元法中流场中任一点的速度势可由边界上分布源^[33]表示

$$\varphi^*(\mathbf{r}^*, t^*) = \iint_S \sigma^*(\mathbf{q}^*, t^*) G(\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*) dS^* \quad (9)$$

式中 σ^* 为流场边界上的分布源密度, 将控制点布置在流场边界上, 利用上式可求得边界上分布源密度. 再将控制点置于流场内部则可获得流场内部点的速度势. 将上式两边进行空间求导, 求得流场速度如下

$$\nabla \varphi^*(\mathbf{r}^*, t^*) = \nabla \iint_S \sigma^*(\mathbf{q}^*, t^*) G(\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*) dS^* \quad (10)$$

同理, 引入用以计算 $\partial \varphi^* / \partial t^*$ 的辅助函数 ζ 替换式 (9) 中的速度势可获得 ζ 对应的分布源密度, 进而得到流场内部控制点的 $\partial \varphi^* / \partial t^*$ 值, 最终通过非定常伯努利方程获得流场压力.

2 数值模型验证

为验证数值模型的有效性, 本节将模型数值结果与两个异相激光气泡耦合的实验结果^[39]和两个同相电火花耦合特性实验结果^[40]对比如图 3 和图 4, 图中红色和蓝色曲线为模拟结果. 实验工况 1 中, 气泡 1 生成时球心距离壁面约 29 mm, 两气泡间距约 4.5 mm, 两个气泡的最大等效半径均为 2.9 mm. 设置无量纲参数 $\gamma_{bw} = 10$, $\gamma_{bb} = 1.55$, $\tau = 0.96$, $\varepsilon_1 = 280$, $\varepsilon_2 = 107$, 气泡 1 和气泡 2 的初始无量纲半径为 $R_{01}^* = R_{02}^* = 0.1$. 数值与实验结果对比如图 3 所示, 气泡 2 在气泡 1 膨胀至最大体积时生成, 而后气泡 1 坍塌, 其下表面快速收缩并向内凹陷, 气泡 2 上表面在气泡 1 低压吸引下膨胀更快, 向上凸起呈“鸡蛋型”(如图 3(a) 和图 3(b) 所示). 随后气泡 1 不断收缩并形成锥形射流, 气泡 2 膨胀过程中与气泡 1 强烈耦合而呈“水滴型”(如图 3(c) 所示).

实验工况 2 中, 将模型数值结果与两同相气泡

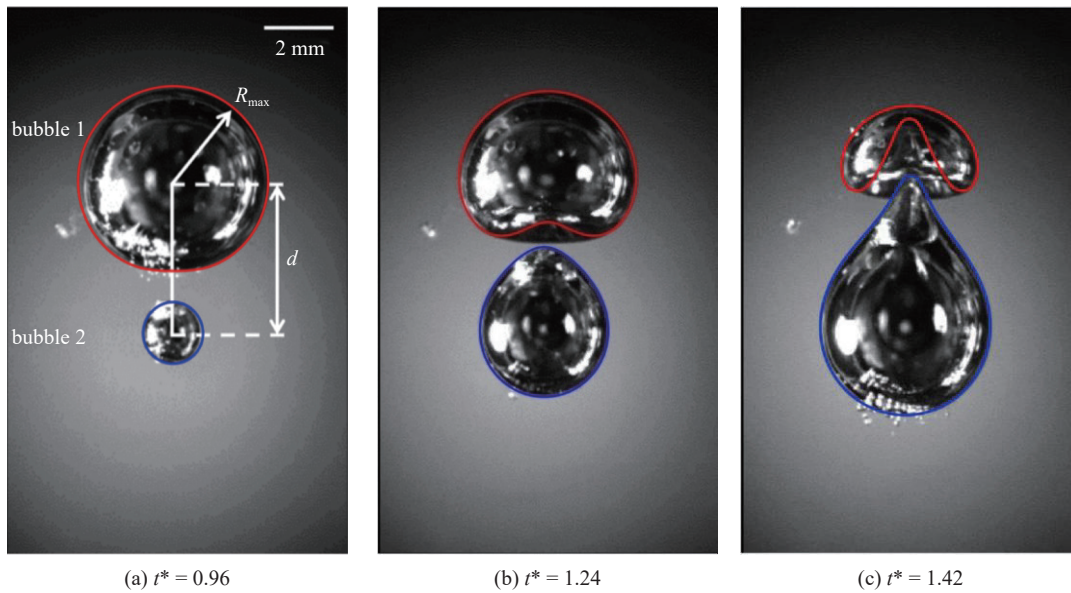


图 3 两个异相激光气泡耦合特性试验^[39]和数值结果对比, 图中红色和蓝色曲线为模拟结果

Fig. 3 Comparison of the bubble shape of out-of-phase laser-induced bubble pair between the experimental results^[39] and numerical results, the numerical results is shown by red and blue curve

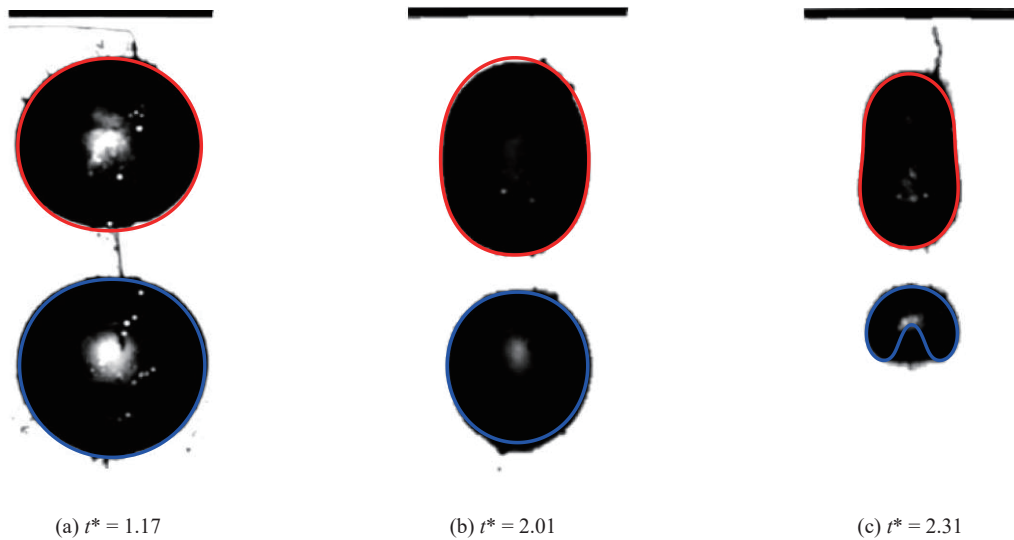


图 4 两个同相电火花耦合特性试验^[40]和数值结果对比, 图中红色和蓝色曲线为模拟结果

Fig. 4 Comparison of the bubble shape of out-of-phase spark generated bubble pair between the experimental results^[40] and numerical results, the numerical results is shown by red and blue curve

耦合实验结果^[40]进行对比如图 4, 图中红色和蓝色曲线为模拟结果. 气泡 1 生成时球心距离壁面约 10 mm, 气泡间距约 16.7 mm, 两个气泡的最大等效半径分别为 7.5 mm 和 7.04 mm. 设置无量纲参数 $\gamma_{bw} = 1.3$, $\gamma_{bb} = 2.15$, $\tau = 0$, $\varepsilon_1 = 280$, $\varepsilon_2 = 330$, 气泡 1 和气泡 2 的初始无量纲半径为 $R_{01}^* = R_{02}^* = 0.1$. 数值与实验结果对比如图 4 所示, 两气泡同时生成并迅速膨胀; 在坍塌过程中, 气泡 1 轴向收缩速度较慢, 沿轴向被拉长, 气泡 2 坍塌速度较快且上表面快

速收缩变平 (如图 4(a) 和图 4(b) 所示), 而后气泡 1 出现颈缩现象, 气泡 2 下表面迅速收缩并向内凹陷形成水射流 (如图 4(c) 所示). 可见数值结果较好地再现了双气泡的耦合过程, 气泡形态吻合很好, 说明了本文数值模型的正确性.

同时, 为验证本文数值模型的收敛性, 选择实验验证工况 1 (泡壁间距 $\gamma_{bw} = 10$, 气泡间距 $\gamma_{bb} = 1.55$, 气泡延迟生成时间 $\tau = 0.96$), 单个气泡节点数 n 分别取 60, 80, 100, 150 和 200 进行计算, 并将气泡 1 下

表面中心节点的速度时历曲线绘制如图 5。当节点数分别为 100 和 200 时, 计算得出的射流砰击速度偏差仅为 0.92%, 满足计算收敛性要求。故本文在保证计算精度的同时, 为节省运算时间, 所有算例均使用 $n = 100$ 进行计算。对于实验中的此类小尺度激光空泡, 其浮力效应非常弱。在自由场中, 单个此类激光气泡并不会发生射流, 但正是由于多气泡的存在, 改变了流场的边界条件, 气泡 2 与气泡 1 的耦合作用促使气泡 1 发生射流现象。因而, 在气泡群的动力学中, 气泡与气泡间的相互作用十分重要, 这种耦合作用是气泡群中各个气泡产生射流现象的关键。

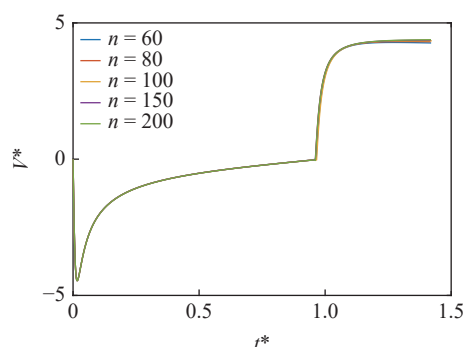


图 5 节点数 n 分别取 60, 80, 100, 150 和 200 时计算获得的气泡 1 下表面中心节点速度 V^* 时历曲线

Fig. 5 The time history curves of the velocity V^* of the central node on the lower surface of bubble 1 were calculated when the number of nodes was 60, 80, 100, 150 and 200, respectively

3 双气泡耦合动力学行为

近壁面双气泡耦合过程同时涉及到壁面-气泡

和气泡-气泡耦合作用, 其机制较为复杂, 在众多影响因素中, 气泡延迟生成时间 τ 会显著改变双气泡耦合的动力学行为。因此, 本节将针对不同气泡延迟生成时间 τ 影响下的近刚性壁面双气泡动力学行为进行数值模拟研究, 壁面及气泡的布置如图 1 所示, 下面选取 5 种代表性工况, 并设置其初始无量纲参数如下: 保持泡壁间距 γ_{bw} 为 1, 气泡间距 γ_{bb} 为 2, 取气泡延迟生成时间 τ 分别为 0, 1.12, 1.69, 1.99 和 2.16。下面将针对以上工况, 结合气泡脉动过程中的压力、速度流场信息图对双气泡动力学行为进行深入探讨, 着重分析射流增强工况的力学机制。为便于比较不同工况下的射流砰击速度及判断是否产生射流增强效应, 计算获得气泡 1 单气泡在相同泡壁间距 $\gamma_{bw} = 1$ 工况下其下表面中心节点速度时历曲线, 计算得射流砰击气泡上表面时刻其下表面中心节点速度为 89 m/s。

3.1 同相 ($\tau = 0$) 双气泡工况

本节首先针对同相 ($\tau = 0$) 双气泡工况进行数值研究, 图 6 所示为同相双气泡工况中典型时刻的压力、速度流场信息图。如图 6(a) 所示为气泡初生时刻, 上下两气泡在内部高压气体作用下加速膨胀, 其内部压力持续降低。当气泡内压小于周围流场环境压力时, 双气泡在惯性作用下继续膨胀, 由于两气泡上下表面相互挤压, 气泡轴向生长被抑制, 形状逐渐变为椭圆形 (如图 6(b) 所示)。上下气泡之间的流体在气泡表面挤压作用下向两侧加速流动, 导致流场压力减小, 在两气泡间形成低压区。由于气泡 1 受

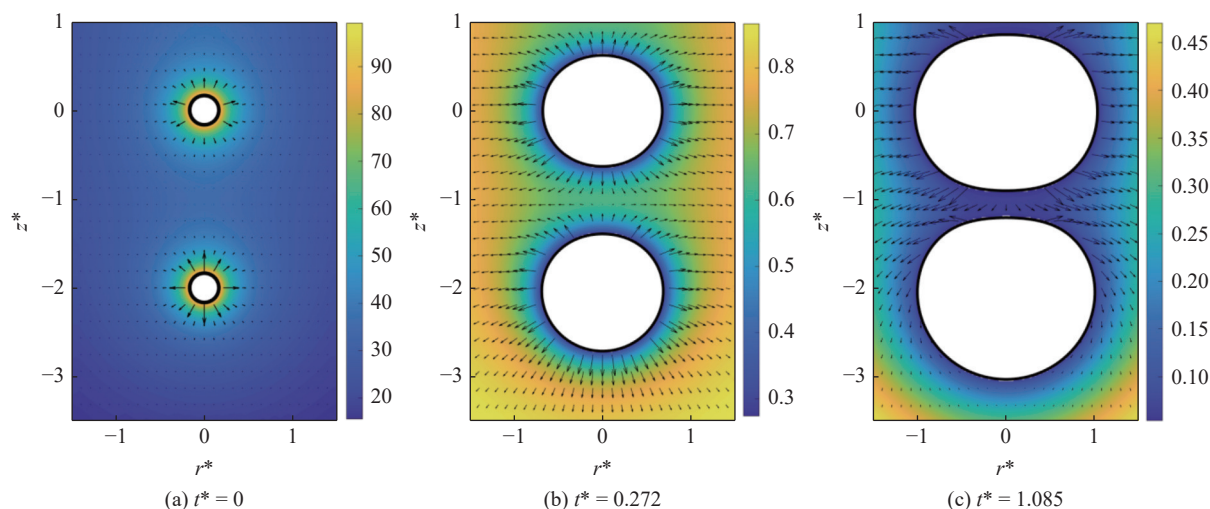
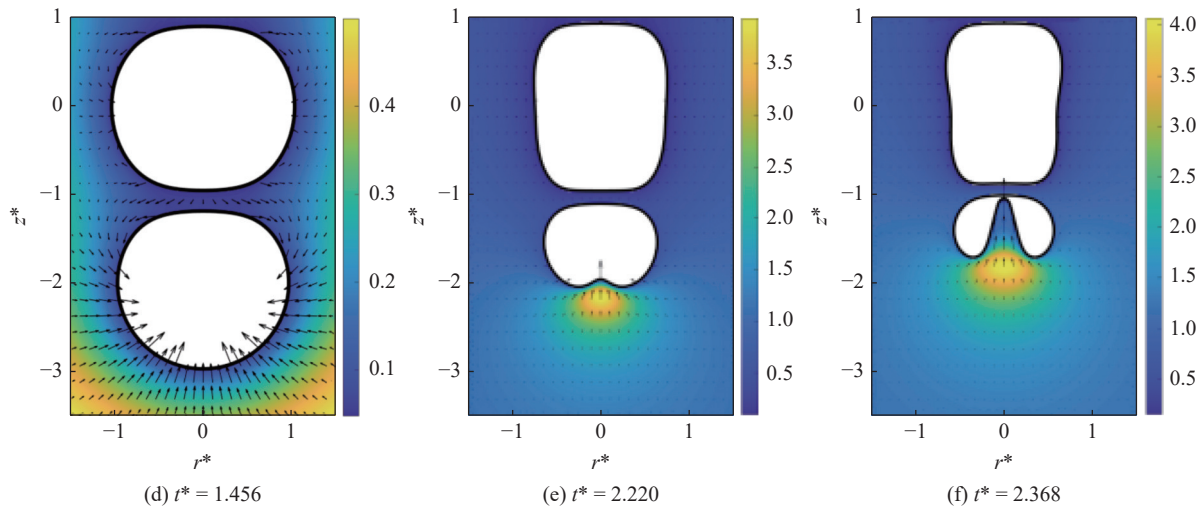


图 6 同相 ($\tau = 0$) 双气泡工况中典型时刻的压力、速度流场信息图

Fig. 6 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of in-phase ($\tau = 0$) bubble pair

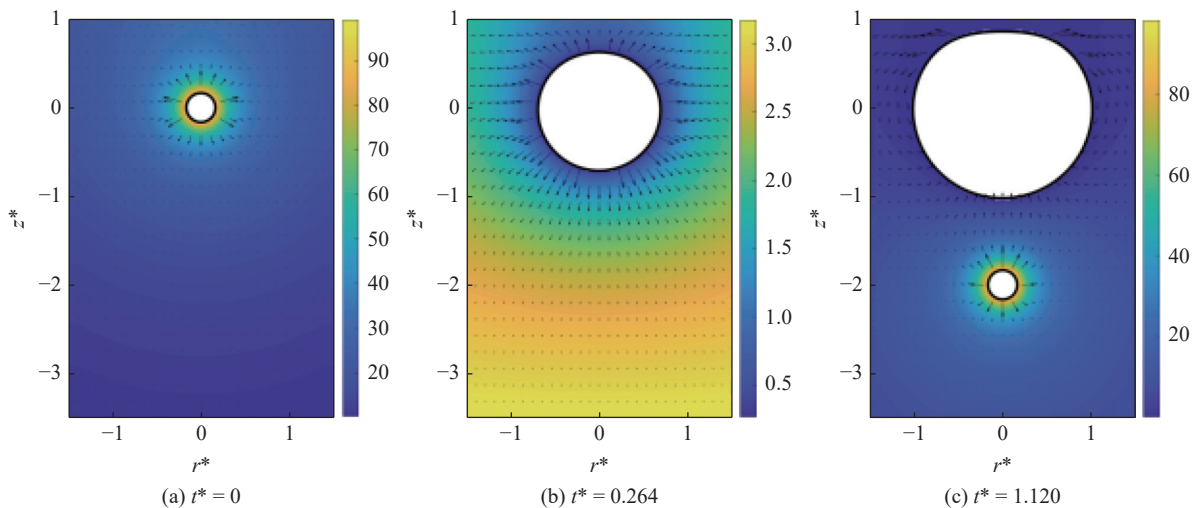
图 6 同相 ($\tau = 0$) 双气泡工况中典型时刻的压力、速度场信息图 (续)Fig. 6 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of in-phase ($\tau = 0$) bubble pair (continued)

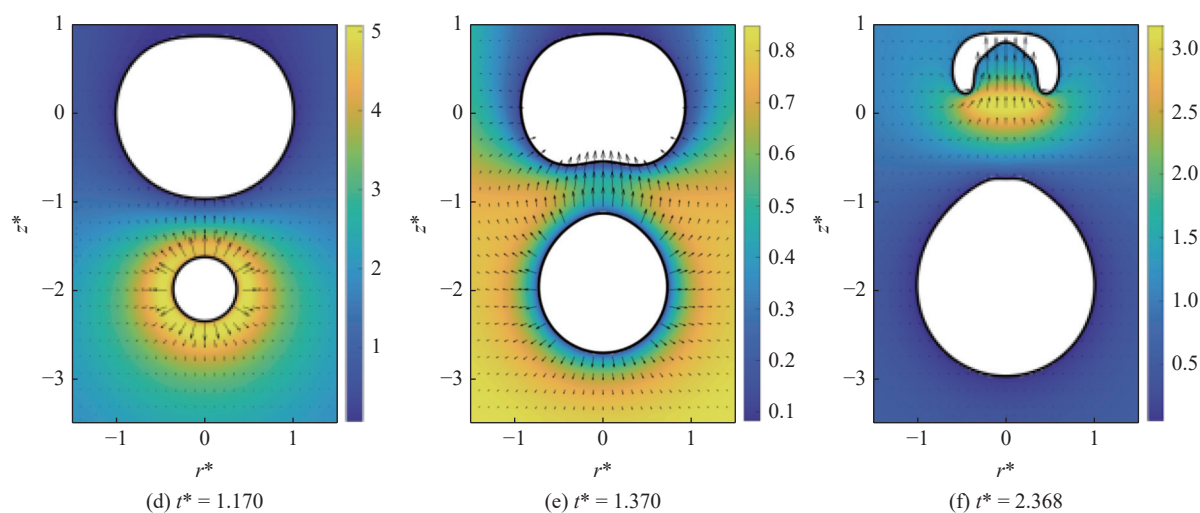
壁面和气泡 2 影响, 周围流场压力较低, 导致其脉动周期延长, 气泡 2 较气泡 1 率先达到最大体积 (如图 6(c) 所示). 图 6(d) ~ 图 6(f) 为气泡的收缩坍塌阶段, 由于气泡 2 下方压力梯度较大, 下表面较上表面收缩速度快, 下方流体向轴线方向不断汇聚, 局部形成高压区, 高压区进一步加速气泡 2 底部收缩, 诱导其形成向上的水射流. 如图 6(e) 所示, 由于壁面以及气泡 2 的吸引作用, 气泡 1 沿轴向被拉长, 轴向收缩速度较慢. 至图 6(f) 时, 在气泡 1 低压吸引和气泡 2 下方高压区的持续作用下, 气泡 2 整体向上迁移, 下表面迅速收缩并撞击上表面.

3.2 异相双气泡 ($\tau = 1.12$) 工况

图 7 所示为 $\tau = 1.12$ 工况下的压力、速度流场

信息图. 此时气泡 1 在距离刚性壁面 $\gamma_{bw} = 1$ 处率先起爆, 并在其内部高压气体作用下快速膨胀至其最大体积, 此过程与近刚性壁面单气泡行为一致 (如图 7(a) 和图 7(b) 所示). 当气泡 1 膨胀至最大体积时, 下方气泡 2 起爆, 此时气泡 1 下表面处压力梯度逐渐变大, 进入收缩坍塌阶段 (如图 7(c) 所示). 气泡 2 不断膨胀, 在其周围形成高压区, 至图 7(d) 时气泡 2 仍呈较规则的圆球状, 而气泡 1 下表面在高压作用下开始加速收缩. 在图 7(e) 中, 气泡 1 下表面向内凹陷坍塌, 气泡 2 在气泡 1 的吸引下向上凸起呈“鸡蛋型”. 气泡 1 在局部高压区作用下, 下表面形成宽射流并撞击上表面, 气泡 2 上表面率先向内凹陷, 此现象可以用曲率较大处的气泡表面坍塌速度更快来

图 7 异相双气泡 ($\tau = 1.12$) 工况中典型时刻的压力、速度场信息图Fig. 7 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of out-of-phase ($\tau = 1.12$) bubble pair

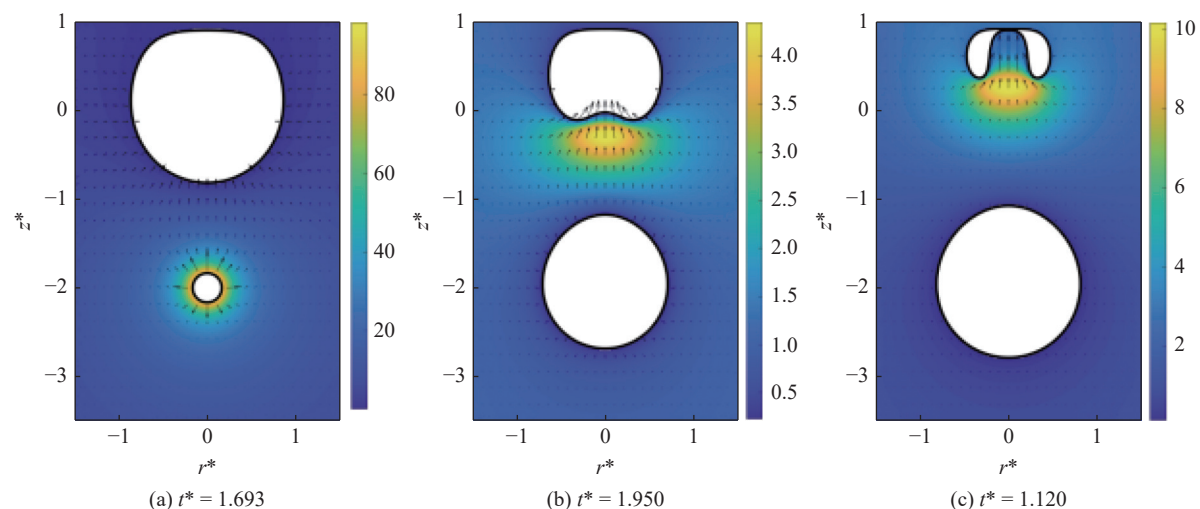
图 7 异相双气泡 ($\tau = 1.12$) 工况中典型时刻的压力、速度场信息图 (续)Fig. 7 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of out-of-phase ($\tau = 1.12$) bubble pair (continued)

解释 (如图 7(f) 所示). 由于气泡 1 形成的水射流宽度较大, 根据能量守恒推测其速度小于细长水射流撞击速度, 经计算发现, 此工况下气泡 1 的射流撞击速度仅 34 m/s, 小于同距离工况下单气泡的射流撞击速度 89 m/s.

3.3 异相双气泡 ($\tau = 1.69$) 工况

图 8 所示为 $\tau = 1.69$ 工况下的压力、速度场信息图. 在此工况下, 气泡 1 经历起爆、膨胀、收缩过程与近刚性壁面单气泡行为无异, 此处不做赘述. 在气泡 1 坍塌过程中, 气泡 2 于无量纲时间 $t^* =$

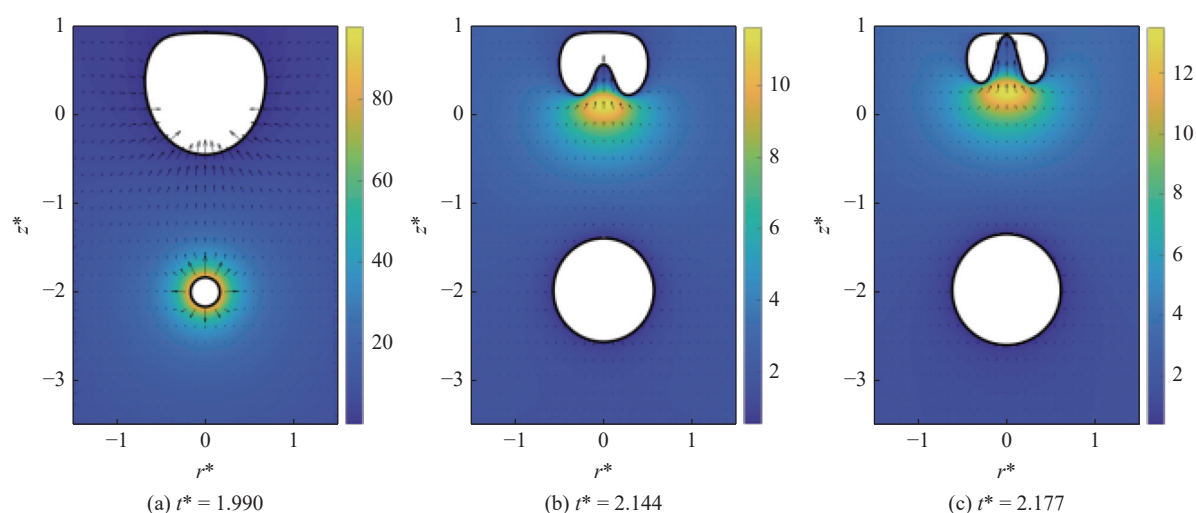
1.693 时起爆, 此时气泡 1 处于坍塌初期, 气泡下表面开始收缩 (如图 8(a) 所示). 气泡 2 在内部高压气体作用下快速膨胀, 气泡 1 在气泡 2 高压影响下, 其下表面加速收缩, 促使流体向气泡 1 下方汇聚, 形成局部高压区与高速射流 (如图 8(b) 所示). 由图 8(c) 可以观察到, 气泡 1 形成的射流头部较宽, 气泡 2 呈“鸡蛋型”. 与上一工况相比, 此工况中气泡 1 形成的水射流宽度有所减小, 经计算得射流撞击速度为 77 m/s, 同样小于同距离工况下的单气泡射流撞击速度.

图 8 异相双气泡 ($\tau = 1.69$) 工况中典型时刻的压力、速度场信息图Fig. 8 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of out-of-phase ($\tau = 1.69$) bubble pair

3.4 异相双气泡 ($\tau = 1.99$) 工况

图 9 所示为 $\tau = 1.99$ 工况下的压力、速度场信息图. 图 9(a) 所示为该工况气泡 2 起爆时刻的图

像, 此时气泡 1 处于坍塌阶段末期, 气泡下表面快速收缩. 气泡 2 在内压与惯性作用下不断膨胀, 其表面压力迅速降低, 气泡 1 在气泡 2 膨胀影响下, 其下方

图 9 异相双气泡 ($\tau = 1.99$) 工况中典型时刻的压力、速度流场信息图Fig. 9 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of out-of-phase ($\tau = 1.99$) bubble pair

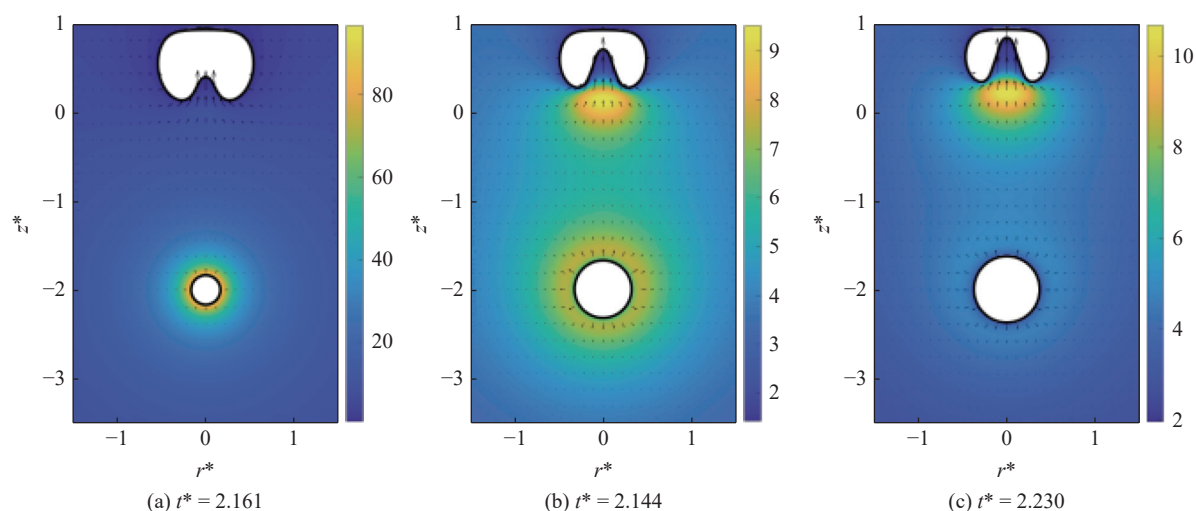
高压区压力进一步升高, 促进高速射流的形成, 该工况下, 气泡 1 下方局部高压区的压力较前述工况更高 (如图 9(b) 所示). 如图 9(c) 所示, 气泡 1 最终形成细长锥形水射流, 射流砰击的速度为 112 m/s, 高于同距离工况下的单气泡射流砰击速度.

3.5 异相双气泡 ($\tau = 2.16$) 工况

图 10 所示为 $\tau = 2.16$ 工况下的压力、速度流场信息图. 由图 10 可知, 单气泡在射流砰击前, 气泡下表面中心速度存在一个“平台期”, 该工况即为在射流速度处于“平台期”时起爆下气泡. 因气泡 2 起爆

前气泡 1 的行为与前述无异, 故直接给出气泡 2 起爆时刻的压力、速度流场信息图.

如图 10(a) 所示, 气泡 2 起爆时气泡 1 下表面已经向内凹陷, 初步形成了向上的水射流. 气泡 2 不断膨胀, 其表面压力迅速降低, 由压力云图可见, 随着流场整体压力的减小, 气泡 1 下方高压区显现, 但高压区压力低于 $\tau = 1.99$ 工况 (如图 10(b) 和图 10(c) 所示). 经计算比较可知, 气泡 1 的射流砰击速度与同距离工况下的单气泡射流砰击速度无异, 由于双气泡耦合时间较短, 气泡 2 的起爆对气泡 1 的射流砰击速度几乎没有影响.

图 10 异相双气泡 ($\tau = 2.16$) 工况中典型时刻的压力、速度流场信息图Fig. 10 Pressure and velocity fields at some typical moments under the condition of out-of-phase ($\tau = 2.16$) bubble pair

3.6 射流增强工况

将上述异相双气泡工况的气泡 1 下表面中心节点速度时历曲线与同泡壁距离工况下单气泡下表面

中心节点速度时历曲线对比绘制如图 11. 由图 11 中曲线及上述工况的压力、流场信息图可以看出, 在气泡坍塌过程中, 气泡下表面处逐渐形成高压区, 压

力梯度迅速增大, 导致气泡下表面速度快速跃升, 而在坍塌末期, 随着水射流不断向内发展, 射流内部流场压力梯度减小, 射流尖端的加速度减小, 整体压力梯度作用减弱, 使气泡表面速度变化不明显. 这里我们定义在气泡坍塌阶段, 当气泡射流尖端的加速度达到其最大加速度的 5% 时, 进入“阶跃期”, 定义当气泡射流尖端的加速度减小至其最大加速度的 5% 时进入“平台期”. 在上述工况下, 气泡 1 下表面中心节点在 $t^* \in [1.60, 2.22]$ 内加速度如图 12 所示, 依照定义即有“阶跃期”为 $t^* \in [1.87, 2.14]$, “平台期”为 $t^* \in [2.14, 2.23]$ (如图 13 所示). 图 13 中延迟生成时间 τ 在 $[1.87, 2.14]$ 区间 (单气泡速度“阶跃期”) 内的工况, 气泡 2 均对气泡 1 产生明显的射流增强效果.

如图 14 所示即为不同无量纲气泡延迟生成时间 τ 在 $[1.69, 2.09]$ 区间内的气泡 1 射流砰击速度图

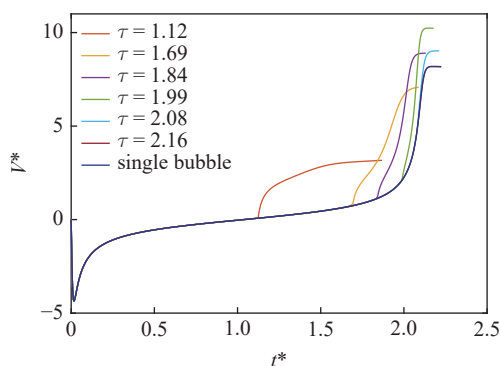


图 11 单气泡下表面中心节点速度 V^* 时历曲线及 $\tau = 1.12, 1.69, 1.84, 1.99, 2.08, 2.16$ 时气泡 1 下表面中心节点速度 V^* 时历曲线

Fig. 11 The time history curve of the central node's velocity V^* on the lower surface of single bubble and the time history curves of the central node's velocity V^* on the lower surface of bubble 1 when $\tau = 1.12, 1.69, 1.84, 1.99, 2.08, 2.16$

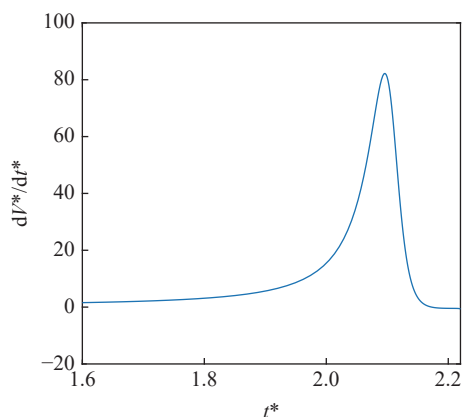


图 12 单气泡下表面中心节点加速度 dV^*/dt^* 时历曲线

Fig. 12 The time history curve of the central node's acceleration dV^*/dt^* on the lower surface of single bubble

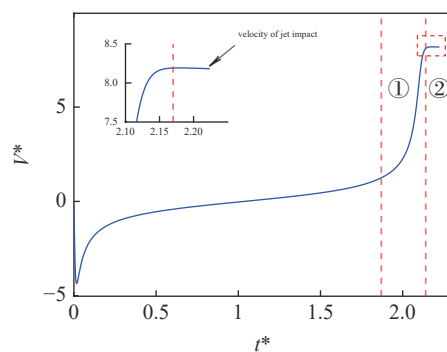


图 13 单气泡下表面中心节点速度 V^* “阶跃期”、“平台期”说明示意图, 其中①为“阶跃期”阶段 $t^* \in [1.87, 2.14]$, ②为“平台期”阶段 $t^* \in [2.14, 2.23]$

Fig. 13 Sketch of "step period" and "plateau period" of the central node's velocity V^* on lower surface of single bubble, in which ① stands for "step period": $t^* \in [1.87, 2.14]$, ② stands for "plateau period": $t^* \in [2.14, 2.23]$

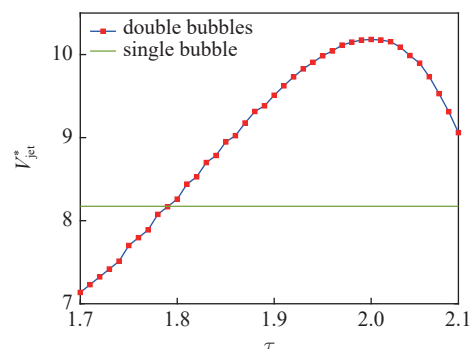


图 14 τ 在 $[1.69, 2.09]$ 区间内气泡 1 射流砰击速度 V_{jet}^* 曲线, 其中 V_{jet}^* 为射流砰击时刻气泡 1 下表面中心节点速度

Fig. 14 The variations in the jet impact velocity V_{jet}^* of bubble 1 versus $\tau \in [1.69, 2.09]$. V_{jet}^* represent for the jet impact velocity of the central node on lower surface of bubble 1

像, 观察到随着 τ 的增加, 射流砰击速度呈先增大再减小的变化趋势, 在延迟生成时间 $\tau = 1.99$ 工况下, 气泡 1 的射流砰击速度最快, 射流增强效果最强.

4 $\gamma_{bw} - \tau - \gamma_{bb}$ 参数空间内射流特性研究

由于本研究无量纲泡壁间距对双气泡射流增强效应影响并不明显, 同时为控制计算量, 本文仅选取 $\gamma_{bw} = 0.8$, $\gamma_{bw} = 1$ 和 $\gamma_{bw} = 1.5$ 这 3 种典型工况, 针对 $\tau - \gamma_{bb}$ 参数空间进行数值模拟, 计算并记录气泡 1 的射流砰击速度, 探究其在 $\tau - \gamma_{bb}$ 参数影响下的变化规律.

由于在参数区间 $\gamma_{bb} < 1.4$ 时会发生气泡融合现象, 参数区间 $\tau < 0.3$, $\gamma_{bb} > 2.2$ 时气泡 1 会发生撕裂或气泡 2 率先形成射流并砰击等, 故以上参数范围

不列为本文的研究对象. 本节在 $\gamma_{bw} = 0.8$, $\gamma_{bw} = 1$ 和 $\gamma_{bw} = 1.5$ 工况下, 在气泡 1 能够形成高速射流的参数空间 $\gamma_{bb} \in [1.4, 2.2]$, $\tau \in [0.3, 2.2]$ 中模拟计算 180 个数据点, 绘制如图 15 所示的射流砰击速度等高线云图.

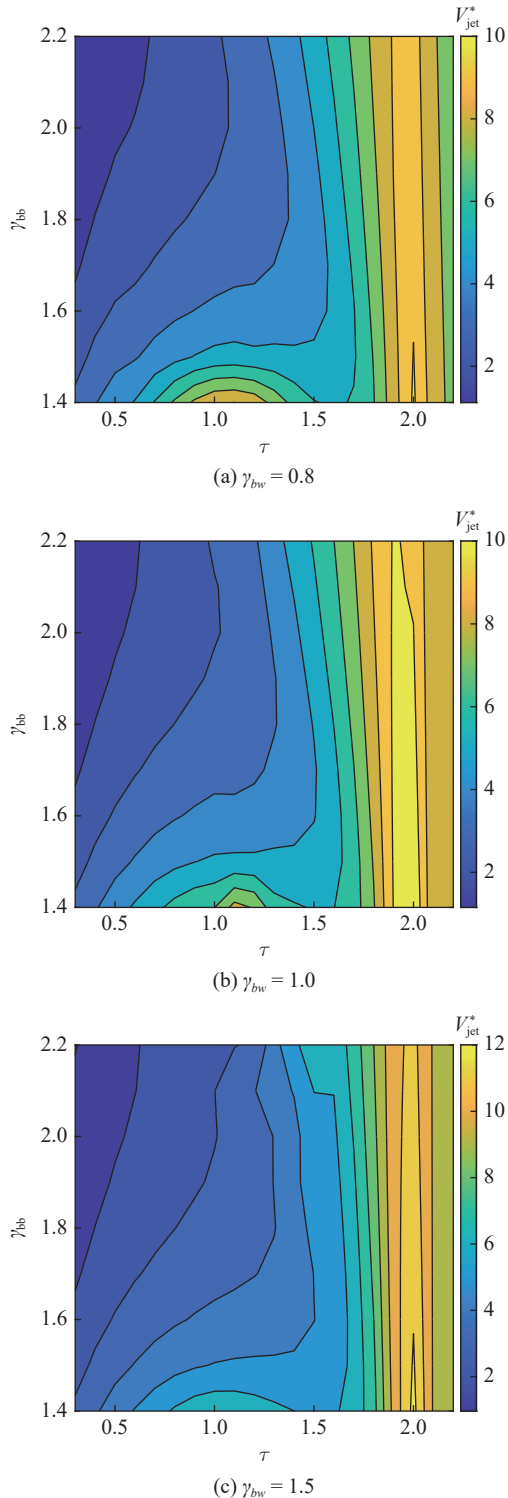


图 15 $\gamma_{bw} = 0.8, 1, 1.5$ 工况下气泡 1 射流砰击速度等高线云图

Fig. 15 The contour map of the jet impact velocity V_{jet}^* of bubble 1 for parameters $\gamma_{bw} = 0.8, 1, 1.5$

对比图 15(a) ~ 图 15(c) 可知, 当 $1.6 < \gamma_{bb} < 2.2$ 时, 气泡 1 射流砰击速度随 τ 的增大而增大, 并在 $\tau = 2$ 附近达到峰值, 随后缓慢减小, 这与第 3 节中图 14 所示规律吻合. 当 $1.4 < \gamma_{bb} < 1.6$ 时, τ 在 1.1 附近出现第二个高亮区, 这是由于当 τ 约为 1.1 时, 气泡 2 在气泡 1 达到最大半径时生成, 此时气泡 1 内部压力较小且下表面距离气泡 2 较近, 从而气泡 1 下表面在高压驱动下加速收缩, 形成高速射流. 但由于气泡 1 坍塌末期时气泡 2 内部压力因膨胀而减小, 对气泡 1 下表面的加速作用减弱甚至转变为吸引作用, 故射流增强效果不如 $\tau = 2$ 时显著. 而当 τ 略大于或小于 1 时, 气泡 2 生成时气泡 1 并不处于最大膨胀状态, 双气泡耦合作用减弱, 导致射流增强效果不明显. 对比图 15(a) 和图 15(b) 可以看到, $\gamma_{bw} = 0.8$ 时 $\tau = 1.1$ 附近的射流砰击速度增强效果更为明显, 这是由于气泡 1 与壁面距离较近, 在膨胀阶段上表面被壁面抑制, 气泡中心向壁面迁移的距离较小, 导致气泡 2 能够在气泡 1 下表面较近处起爆并迅速膨胀, 射流增强效果更强. 总体来看, 当 $\tau = 2$ 时气泡射流增强效果最好, 且在本文的研究参数范围内, $\gamma_{bb} = 1.4$ 时射流砰击速度达到最大. 以 $\gamma_{bw} = 1.5$ 工况为例, $\gamma_{bb} = 1.4$ 时气泡 1 射流砰击速度可达单气泡射流砰击速度 89 m/s 的 1.25 倍, 射流增强效果明显. 此时, 若保持其他参数不变, 减小泡泡距离 γ_{bb} 可以获得更好的射流增强效果, 当 $\gamma_{bb} = 0.8$ 时, 气泡 1 射流砰击速度可增大至单气泡射流砰击速度的 1.6 倍.

5 结论与展望

本文基于边界积分法与多气泡动力学等理论, 提出了一种近刚性壁面异相双气泡的计算方法, 能够准确模拟气泡的初生、膨胀、坍塌、射流等动力学行为, 并预报双气泡的耦合方式和坍塌模式、射流砰击速度以及流场压力速度信息, 模拟、分析得到了射流增强的具体参数空间和其力学机理, 为构建新型水中气泡智能毁伤技术提供新思路 and 理论支撑, 为未来海军战场提供一种新型高效毁伤技术, 或多发武器攻击策略. 本文得到的主要结论如下.

(1) 气泡在近刚性壁面坍塌过程中, 射流速度存在着明显的“阶跃期”和“平台期”. 在“阶跃期”时起爆气泡 2 对气泡 1 的射流砰击速度有明显增强作用, 使气泡 1 射流砰击速度在特定参数下可增强到单气泡射流砰击速度的 1.6 倍. 但在“平台期”时起爆气

泡 2 对气泡 1 的射流增强作用并不明显.

(2) 在泡泡间距 $1.4 < \gamma_{bb} < 1.6$ 范围内时, 双气泡在延迟生成时间 $\tau = 1.1$ 附近会产生一定的射流增强效应, 但其增强效果弱于 $\tau = 2$ 工况. $\tau = 1.1$ 工况下, 气泡 2 在气泡 1 膨胀至最大时起爆, 此时两气泡间距离较近, 耦合作用强烈. 气泡 2 的起爆增强了气泡 1 的射流砰击速度, 产生了射流增强效应. 然而, 相较于 $\tau = 2$ 工况, $\tau = 1.1$ 工况中当气泡 1 发展至坍塌末期时, 气泡 2 内部压力因其体积膨胀而迅速减小, 使气泡 2 对气泡 1 下表面的加速作用减弱甚至转变为吸引作用, 因而 $\tau = 1.1$ 时的射流增强效果不如 $\tau = 2$ 时显著.

(3) 在泡泡间距 $1.6 < \gamma_{bb} < 2.2$ 范围内, 气泡 1 的射流砰击速度首先随 τ 的增大而增大, 并在 $\tau = 2$ 附近达到峰值, 随后随 τ 的增大而缓慢减小. 当 $\tau = 2$ 时, 气泡 2 在气泡 1 射流速度“阶跃期”起爆, 此时气泡 1 虽然体积较小但其内部压力仍远低于气泡 2 的内部高压. 气泡 2 快速膨胀并与气泡 1 产生耦合作用, 使气泡 1 下表面迅速向内凹陷并完成射流砰击, 此时气泡 2 与气泡 1 下表面距离较远, 并不会对其产生吸引作用, 因而在此工况下, 射流增强效果最明显. 总体来看, 在本文的参数研究范围内, 双气泡延迟生成时间 $\tau = 2$ 时, 射流增强效果最好, 能够极大提高近壁面气泡的水射流砰击速度, 在 $\gamma_{bw} = 1.5$, $\gamma_{bb} = 0.8$ 和 $\tau = 2$ 工况下可提升至 142 m/s (即单气泡射流砰击速度的 1.6 倍), 提供更好的毁伤破坏能力.

参 考 文 献

- Betney MR, Tully B, Hawker NA, et al. Computational modelling of the interaction of shock waves with multiple gas-filled bubbles in a liquid. *Physics of Fluids*, 2015, 27(3): 94-98
- Li SM, Zhang AM, Wang QX, et al. The jet characteristics of bubbles near mixed boundaries. *Physics of Fluids*, 2019, 31(10): 107105
- Avachat S, Zhou M. Response of submerged metallic sandwich structures to underwater impulsive loads. *Journal of Mechanics of Materials & Structures*, 2015, 10(1): 17-41
- Song WD, Hong MH, Lukyanchuk B, et al. Laser-induced cavitation bubbles for cleaning of solid surfaces. *Journal of Applied Physics*, 2004, 95(6): 2952-2956
- Makuta T, Takemura F, Hihara E, et al. Generation of micro gas bubbles of uniform diameter in an ultrasonic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, 548: 113-131
- 王成会, 林书玉. 超声波作用下气泡的非线性振动. *力学学报*, 2010, 42(6): 1050-1059 (Wang Chenghui, Lin Shuyu. The nonlinear oscillation of bubbles in the ultrasonic field. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(6): 1050-1059 (in Chinese))
- Li S, van der Meer D, Zhang AM, et al. Modelling large scale air-gun-bubble dynamics with highly non-spherical features. *International Journal of Multiphase Flow*, 2020, 122: 103143
- Cox E, Pearson A, Blake JR, et al. Comparison of methods for modelling the behaviour of bubbles produced by marine seismic airguns. *Geophysical Prospecting*, 2004, 52(5): 451-477
- 王诗平, 张阿漫, 刘云龙等. 同相气泡耦合特性实验研究. *力学学报*, 2012, 44(1): 56-64 (Wang Shiping, Zhang A'man, Liu Yunlong, et al. Experimental study on interaction of inphase bubbles. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(1): 56-64 (in Chinese))
- 张凌新, 闻仲卿, 邵雪明. 多泡相互作用对气泡溃灭的影响. *力学学报*, 2013, 45(6): 861-867 (Zhang Lingxin, Wen Zhongqing, Shao Xueming. Investigation of bubble-bubble interaction effect during the collapse of multi-bubble system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(6): 861-867 (in Chinese))
- Fong SW, Adhikari D, Klaseboer E, et al. Interactions of multiple spark-generated bubbles with phase differences. *Experiments in Fluids*, 2009, 46(4): 705-724
- Zhang AM, Li SM, Cui P, et al. Interactions between a central bubble and a surrounding bubble cluster. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2023, 13: 100438
- Liu NN, Cui P, Ren SF, et al. Study on the interactions between two identical oscillation bubbles and a free surface in a tank. *Physics of Fluids*, 2017, 29(5): 052104
- Plesset MS. The dynamics of cavitation bubbles. *Journal of Applied Mechanics*, 1949: 277-282
- Gilmore FR. The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid. California Institute of Technology. Report No. 26-4, 1952
- Lezzi A, Prosperetti A. Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 2. Second-order theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, 185: 289-321
- Storey BD, Szeri AJ. A reduced model of cavitation physics for use in sonochemistry. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2001, 457(2011): 1685-1700
- Zhang AM, Li SM, Cui P, et al. A unified theory for bubble dynamics. *Physics of Fluids*, 2023, 35(3): 033323
- Klaseboer E, Hung KC, Wang C, et al. Experimental and numerical investigation of the dynamics of an underwater explosion bubble near a resilient/rigid structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 537: 387-413
- Lauterborn W, Kurz T. Physics of bubble oscillations. *Reports on Progress in Physics*, 2010, 73(10): 106501
- Lohse D. Bubble puzzles: from fundamentals to applications. *Physical Review Fluids*, 2018, 3(11): 110504
- Wang SP, Zhang AM, Liu YL, et al. Bubble dynamics and its applications. *Journal of Hydrodynamics*, 2018, 30(6): 975-991
- Cui P, Wang QX, Wang SP, et al. Experimental study on interaction and coalescence of synchronized multiple bubbles. *Physics of Fluids*,

- 2016, 28(1): 012103
- 24 Han B, Köhler K, Jungnickel K, et al. Dynamics of laser-induced bubble pairs. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015, 771: 706-742
- 25 Tomita Y, Sato K. Pulsed jets driven by two interacting cavitation bubbles produced at different times. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 819: 465-493
- 26 Liang W, Chen R, Zheng J, et al. Interaction of two approximately equal-size bubbles produced by sparks in a free field. *Physics of Fluids*, 2021, 33(6): 067107
- 27 Han R, Zhang AM, Li S, et al. Experimental and numerical study of the effects of a wall on the coalescence and collapse of bubble pairs. *Physics of Fluids*, 2018, 30(4): 042107
- 28 Blake JR, Robinson PB, Shima A, et al. Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, 255: 707-721
- 29 Li S, Zhang AM, Han R, et al. Experimental and numerical study of two underwater explosion bubbles: Coalescence, fragmentation and shock wave emission. *Ocean Engineering*, 2019, 190: 106414
- 30 Blake JR, Tomita Y, Tong RP. The art, craft and science of modeling jet impact in a collapsing cavitation bubble. In: Fascination of Fluid Dynamics: A Symposium in Honour of Leen Van Wijngaarden. Springer Netherlands, 1998: 77-90
- 31 Turangan CK, Ong GP, Klaseboer E, et al. Experimental and numerical study of transient bubble-elastic membrane interaction. *Journal of Applied Physics*, 2006, 100(5): 69
- 32 Li S, Han R, Zhang AM, et al. Analysis of pressure field generated by a collapsing bubble. *Ocean Engineering*, 2016, 117: 22-38
- 33 Supponen O, Obreschkow D, Tinguely M, et al. Scaling laws for jets of single cavitation bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, 2016, 802: 263-293
- 34 Zhang AM, Cui P, Cui J, et al. Experimental study on bubble dynamics subject to buoyancy. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015, 776: 137-160
- 35 Han R, Zhang AM, Tan S, et al. Interaction of cavitation bubbles with the interface of two immiscible fluids on multiple time scales. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 932: A8
- 36 Li S, Zhang AM, Han R, et al. 3D full coupling model for strong interaction between a pulsating bubble and a movable sphere. *Journal of Computational Physics*, 2019, 392: 713-731
- 37 Zhang AM, Li S, Cui J. Study on splitting of a toroidal bubble near a rigid boundary. *Physics of Fluids*, 2015, 27(6): 809-822
- 38 Best JP. The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, 251: 79-107
- 39 Mishra A, Bourquard C, Roy A, et al. Flow focusing from interacting cavitation bubbles. *Physical Review Fluids*, 2022, 7(11): 110502
- 40 韩蕊. 多气泡 (气泡群) 非线性耦合作用及融合特性研究. [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2017 (Han Rui. Study on the non-linear interaction and coalescence of multiple bubbles. [PhD Thesis]. Harbin: Harbin Engineering University, 2017 (in Chinese))