

基于无量纲分析的法向恢复系数模型研究

马 佳, 揭 豪, 白梦昊, 彭 静, 陈 辉, 陈得良

RESEARCH ON NORMAL RESTITUTION COEFFICIENT BASED ON DIMENSIONLESS ANALYSES

Ma Jia, Jie Hao, Bai Menghao, Peng Jing, Chen Hui, and Chen Deliang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-583>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于能量等效原理的应变局部化分析: II .有限元解法

ANALYSIS OF STRAIN LOCALIZATION BY ENERGY EQUIVALENCE: II .FINITE ELEMENT SOLUTION

力学学报. 2017, 49(4): 880-893

基于正面碰撞实验的胸部损伤有限元分析

ANALYSIS OF CHEST INJURY IN FRONTAL IMPACT VIA FINITE ELEMENT MODELLING BASED ON BIOMECHANICAL EXPERIMENT

力学学报. 2017, 49(1): 191-201

基于Iwan模型的接合面切向响应建模

TANGENTIAL RESPONSE MODELING OF JOINT SURFACE BASED ON IWAN MODEL

力学学报. 2020, 52(2): 462-471

轻敲模式下原子力显微镜的能量耗散

ENERGY DISSIPATION IN TAPPING MODE ATOMIC FORCE MICROSCOPY

力学学报. 2017, 49(6): 1301-1311

轻敲模式下 AFM 动力学模型及能量耗散机理研究

STUDY ON A DYNAMICS MODEL OF TAPPING MODE AFM AND ENERGY DISSIPATION MECHANISM

力学学报. 2020, 52(4): 1106-1119

比例边界有限元法求解裂纹面接触问题

CRACK FACE CONTACT PROBLEM ANALYSIS USING THE SCALED BOUNDARY FINITE ELEMENT METHOD

力学学报. 2017, 49(6): 1335-1347



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

基于无量纲分析的法向恢复系数模型研究¹⁾马佳^{*,†} 揭豪^{*} 白梦昊^{*} 彭静^{*} 陈辉^{*} 陈得良^{*,2)}^{*}(长沙理工大学土木工程学院, 长沙 410114)[†](德国萨尔大学材料科学与工程系, 德国萨尔布吕肯 66123)

摘要 作为描述接触碰撞过程能量损失的重要参量, 恢复系数的深入研究对于提升现有接触碰撞力模型预测性能、准确描述接触碰撞现象, 并进一步探明其对机械系统整体动态特性影响规律方面具有重要作用. 鉴于现有恢复系数模型计算精度的局限性, 本文基于无量纲分析方法, 提出了一种考虑材料特性与初始碰撞速度的新型恢复系数模型. 具体实施过程如下: 首先, 利用有限元软件 ABAQUS 建立弹性球-理想弹塑性基底法向接触碰撞数值仿真模型, 分别从最小网格尺寸设置与接触碰撞能量转换角度验证了所建模型的有效性; 基于此模型开展多工况下的数值模拟研究, 分析不同材料弹塑性参数与初始碰撞速度对接触碰撞响应的影响; 在此基础上, 引入无量纲化参数 $E^*/(\rho v_{nc}^2)$ 与 σ_y/E^* , 寻找恢复系数与弹塑性参数及初始碰撞速度间的函数关系; 进一步结合 Johnson 塑性碰撞理论, 反向推算获取屈服速度与材料属性的映射关系, 最终建立无量纲化恢复系数新模型; 通过与低速试验数据、高速有限元模拟结果的对比, 验证了新模型的预测精度和泛化性能.

关键词 接触碰撞过程, 能量耗散, 恢复系数, 无量纲分析, 有限元方法

中图分类号: O3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-583

RESEARCH ON NORMAL RESTITUTION COEFFICIENT BASED ON DIMENSIONLESS ANALYSES¹⁾Ma Jia^{*,†} Jie Hao^{*} Bai Menghao^{*} Peng Jing^{*} Chen Hui^{*} Chen Deliang^{*,2)}^{*}(School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)[†](Department of Material Science and Engineering, Saarland University, Saarbrücken 66123, Germany)

Abstract As an important indicator for the quantification of energy dissipation during the contact/impact process, in-depth researches of the restitution coefficient are of great significance not only for the prediction performance improvement of the existing contact force models, but also for the accurate quantification of contact/impact responses, and the further exploration towards the influence laws of the contact phenomena on the overall system dynamical characteristics. Due to the limitations of current researches, a new restitution coefficient model considering the material properties and initial contact velocities is proposed based on the dimensionless analyses in this work. The specific implementation process can be summarized as follows: Firstly, the contact/impact FEM simulation model between the elastic sphere and the elastic-perfectly plastic substrate is established by using the commercial software ABAQUS, of which the effectiveness can be verified from the setting of minimum mesh sizes of the contact domain and the changing curves of all types of energies during one contact/impact process. Then, large numbers of simulation examples under different working conditions are conducted, and the effects of material property and initial contacting velocity on the

2022-10-20 收稿, 2022-12-29 录用, 2022-12-30 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (12002065), 湖南省自然科学基金 (2021JJ40556) 和国家留学基金委博士后项目 (202008430121) 资助.

2) 通讯作者: 陈得良, 教授, 主要研究方向为结构非线性动力学分析. E-mail: deliang_chen@126.com

引用格式: 马佳, 揭豪, 白梦昊, 彭静, 陈辉, 陈得良. 基于无量纲分析的法向恢复系数模型研究. 力学学报, 2023, 55(4): 982-990

Ma Jia, Jie Hao, Bai Menghao, Peng Jing, Chen Hui, Chen Deliang. Research on normal restitution coefficient based on dimensionless analyses. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(4): 982-990

contact/impact responses can be thus analyzed. After that, two dimensionless variables, $E^*/(\rho v_{nc}^2)$ and σ_y/E^* , are introduced and the mapping relationships among the restitution coefficient, material properties, and initial contact velocities are explored. In addition, combined with the Johnson theory, the mapping relationship between the yield velocity and material properties is reversely calculated, and thus the novel restitution coefficient model based on the dimensional analyses can be finally established. Comparisons with the experimental data under low contacting velocities and FEM results for high contacting velocities validate the effectiveness and generalization abilities of the presented restitution coefficient model.

Key words contact/impact process, energy loss, restitution coefficient, dimensionless analyses, FEM

引言

由于制造公差、结构装配、运行磨损和材料变形等不确定性因素,机械关节处的间隙碰撞不可避免.接触碰撞现象因其作用时间短、相互作用力大等特点,极易引发机械系统的局部损伤,并导致系统整体性能下降^[1-3].为了精确量化接触碰撞行为对机械系统的运动影响,Hertz^[4]率先于 1882 年开展了相关研究,并提出了著名的 Hertz 模型.鉴于 Hertz 模型并未考虑接触碰撞过程中的能量损失,国内外学者^[5-7]又相继进行了大量研究,通过引入相关参数量化描述物体相互作用过程中的能量损失,从而提出了诸多接触碰撞模型,其中应用较为广泛的如 Hunt-Crossley 模型^[8]、Lankarani-Nikravesh 模型^[9]、Flores 模型^[10]等.然而需要注意的是,上述模型在模拟系统的接触碰撞行为时,皆需依靠计算者经验假设一个恒定的恢复系数^[11].

恢复系数作为衡量碰撞过程能量损失的宏观简化量,其取值大小直接影响了接触碰撞行为的模拟精度.现有研究表明^[12],恢复系数并非常数,其取值不仅取决于碰撞体的材料特性,而且与初始碰撞速度紧密相关.常见的恢复系数模型包含牛顿运动学恢复系数模型、泊松动力学恢复系数模型以及 Stronge 能量恢复系数模型^[13].针对对心正碰撞过程,三种恢复系数的定义等价^[12].

恢复系数模型的研究属于接触碰撞领域较为基础的工作.鉴于接触碰撞过程时间历程极短,现有测量设备的局限性导致难以获得较为精确的试验结果,因此目前大多学者仍采用有限元数值模拟的方法获取所需数据,分析总结规律,从而建立相应的恢复系数模型.恢复系数表征接触碰撞过程中的各种能量损失,主要包含应力波及塑性损失^[14-15].Wu^[16]基于有限元法研究了球与基底间的接触碰撞过程,通过改变基底尺寸,系统分析了应力波引起的能量

损失.其结果表明:当应力波在基底内反弹次数大于 3 时,其所导致的能量损失小于初始总能量的 1%.而当碰撞引起塑性变形时,塑性损失则成为系统能量的主要耗散源,此时应力波造成的能量损失几乎可以忽略不计,相似的结论也可见 Hutchings^[17]针对塑性撞击过程中应力波引起的能量损失的研究.Johnson^[18]基于接触半径、变形量以及等效半径间的假设关系,建立了碰撞进入全塑性变形的恢复系数模型,因未能精确定义弹塑性碰撞的柔度关系,其模型的精度不高.针对两个理想弹塑性球体间的法向碰撞过程,Thornton^[19]基于准静态接触理论,将加载分为弹性和塑性两个阶段,提出了恢复系数解析模型,该模型在低速碰撞下表现良好,但高速碰撞时的预测结果较试验值偏低.Wu 等^[20]进一步将碰撞过程分为多个阶段,并提出了分段的恢复系数模型.针对较小碰撞速度情况,恢复系数仅与归一化速度有关,而对于有限塑性变形阶段,恢复系数还与碰撞材料的折合弹性模量及塑性参数有关.在文献^[20]的研究的基础上,葛藤等^[21]进一步考虑了应变强化对恢复系数的影响,但其结果并未显式表明这一因素的作用.Jackson 等^[22]针对弹塑性球体间的恢复系数模型开展研究,分别基于文献^[23-24]相关理论求解获得了球体塑性变形回弹后的残余曲率半径,据此得到了两种不同的恢复系数模型.通过试验对比验证了所建模型的有效性,并进一步指明应变强化对恢复系数的影响较小.郭振等^[25]进行了有关恒定外力作用下的恢复系数研究,结果表明低速重载时恒定外力对恢复系数影响较大.此外,近年来针对切向恢复系数模型的研究也在逐步开展^[26].更多的关于恢复系数模型的综述可参阅文献^[13].

本文拟利用有限元商业软件 ABAQUS,建立考虑不同材料参数与初始碰撞速度的弹性球与弹塑性基底法向接触碰撞数值仿真模型.在此基础上,引入无量纲参数,探索恢复系数与材料特性及初始碰撞

速度间的函数关系, 从而建立恢复系数新模型. 通过与现有多数恢复系数模型、低速试验数据及高速仿真结果的对比, 进一步验证所建模型的有效性.

1 法向正碰撞数值仿真模型

由于几何和加载的对称性, 为提高仿真计算效率, 选取如图 1 所示小球与基底正碰撞轴对称模型开展研究. 图中虚线表示对称轴, 沿着对称轴的滚珠表明此轴上各节点仅能发生竖向位移. 球体施加竖直向下的初始速度场 v_{nc} , 基底下边缘固定. 小球半径为 R , 基底尺寸为 $L \times L$. 为减少应力波导致的能量损失, 参照文献 [16], 设置 $L = 2R = 70$ mm. 为避免干涉, 球与基底的初始间隙设置为 0.1 mm. 考虑球体为符合胡克定律的弹性材料, 基底为理想弹塑性材料, 其本构关系可表示为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon_y \\ \sigma_y, & \varepsilon \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (1)$$

其中, σ 为应力, ε 为应变, E 为材料弹性模量, σ_y 和 ε_y 分别表示材料屈服应力和屈服应变. 球与基底的具体材料参数列于表 1. 其中 ρ 与 u 分别表示材料密度和泊松比.

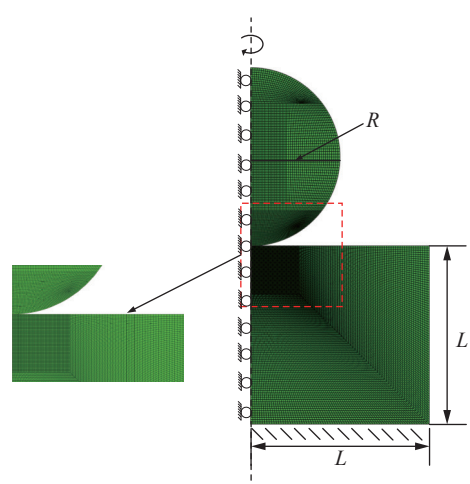


图 1 小球与基底正碰撞数值仿真模型
Fig. 1 Normal contact FEM model between the sphere and substrate

表 1 材料参数

Table 1 Material parameters				
Body	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	E/GPa	u	σ_y/MPa
sphere	7850	210	0.3	—
substrate	7850	210	0.3	500

1.1 接触碰撞区域网格划分验证

众所周知, 网格划分会对有限元数值模拟结果的精度产生影响. 通常而言, 网格划分越细, 所得结果相对更加精确, 然而与此同时, 所需的计算资源也会越多, 计算效率会严重降低. 因此, 选取合适的网格尺寸非常重要[27]. 如图 1 所示, 为获取高精度数值计算结果, 接触区域网格进行了局部加密处理. 图 2(a)~图 2(c) 列举了初始碰撞速度 5 m/s 情况下, 五种不

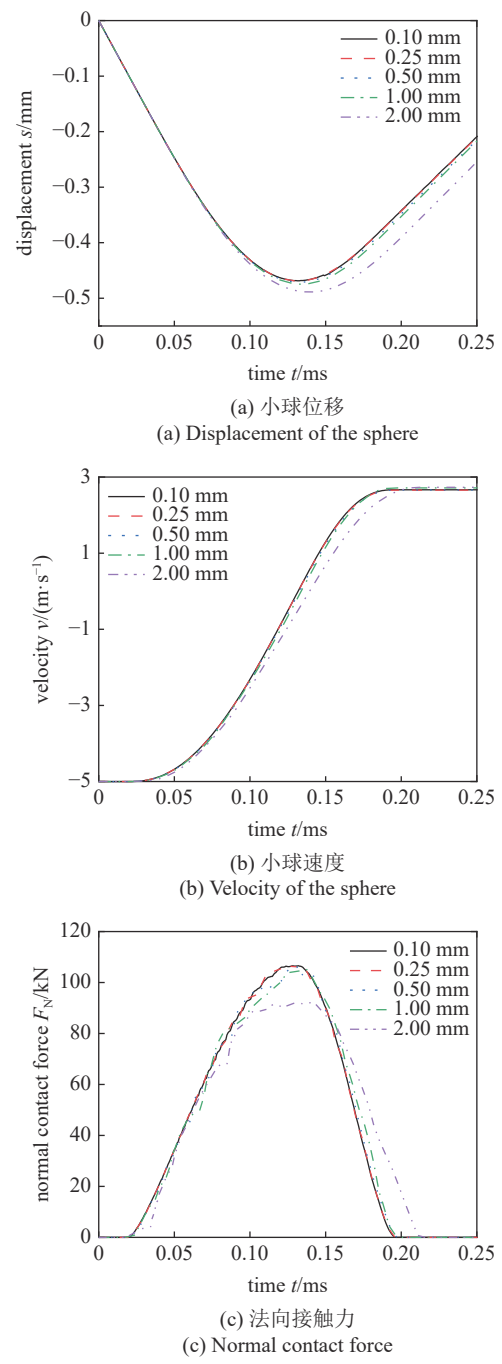


图 2 不同网格尺寸下接触碰撞结果
Fig. 2 Simulation results of normal contact under different mesh sizes

同最小网格尺寸下的接触碰撞响应结果, 包含小球位移、速度以及相应的法向接触碰撞力随时间的变化规律。观察可知: 随着接触碰撞局部区域最小网格尺寸的减小, 各响应计算结果逐渐趋于收敛。为平衡计算效率与模拟仿真精度, 后续接触区域最小网格尺寸皆设定为 0.25 mm。

1.2 有限元模型仿真精度验证

为进一步检验有限元接触碰撞模型的计算精度, 首先将弹性球-弹性基底接触碰撞数值仿真结果与 Hertz 接触碰撞力模型理论解进行对比。观察图 3 可知: 二者吻合度极高, 从而验证了所建数值仿真模型对于弹性接触碰撞过程模拟的有效性。此外, 加载和卸载阶段曲线完全重合, 说明本文所采用的模型尺寸能有效避免应力波对接触碰撞过程能量损失的影响。选取加载阶段任意时刻, 最大压缩时刻以及卸载阶段任意时刻绘制相应的应力云图, 结果如图 4(a) 所示。由图可知, 球体应力分布几乎与基底应力分布对称, 且应力形状符合 Hertz 理论的椭圆分布规律。

为进一步检验所建模型对于弹塑性接触碰撞过程的模拟精度, 开展了弹性球-弹塑性基底接触碰撞模拟, 接触力-压入量 (F_N - δ) 关系曲线也展示在图 3 中, 力与接触深度所围曲线面积代表接触碰撞过程中的能量损失。对应的应力云图结果如图 4(b) 所示, 观察可知: 随着加载阶段的进行, 基底内塑性区域逐渐扩张, 直至某一时刻冲破接触表面。图 4(c) 为整个接触碰撞过程中的等效塑性应变云图。观察可知: 卸载阶段基底内塑性应变不再发生变化, 表明卸载阶段近似为纯弹性过程, 这也与现有研究结论一致^[28-30]。

图 5 为接触碰撞过程能量变化曲线, 由图可知: 整个接触碰撞过程中总能量保持不变, 且沙漏能仅

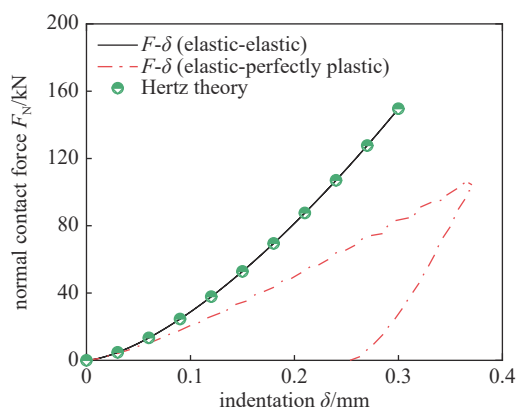
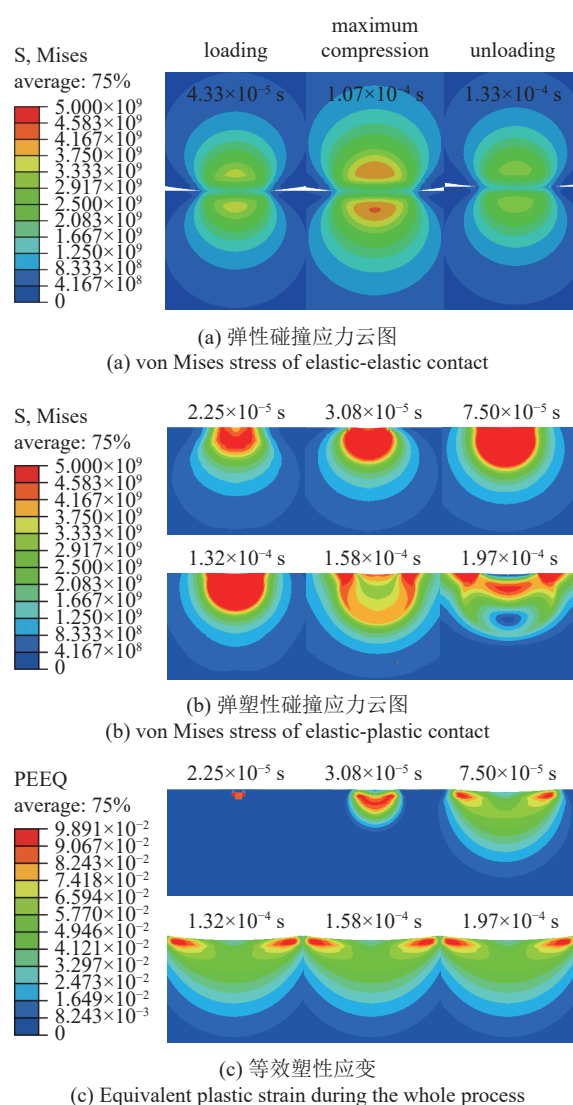


图 3 接触碰撞力与压入量关系曲线

Fig. 3 Contact force vs. indentation



(c) 等效塑性应变
(c) Equivalent plastic strain during the whole process

图 4 不同时刻下仿真结果对比

Fig. 4 Result comparisons at different stages

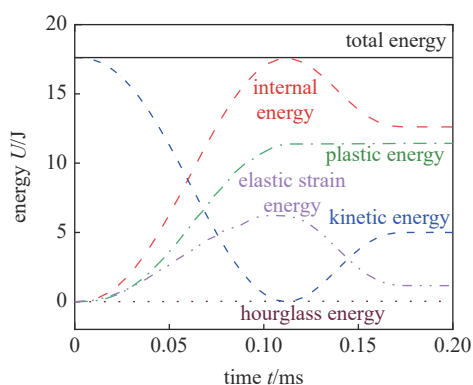


图 5 接触碰撞过程能量变化

Fig. 5 Energy changes during the whole process

为总能量的 0.0693%。总能量损失 (包含塑性损失、因基底塑性变形滞留在其内的部分弹性应变能损失以及沙漏能) 合计约为 12.61 J。如上所述, 图 3 中弹

塑性曲线所围滞回环面积即代表接触碰撞过程的能量损失, 利用数值积分易得其大小为 12.63 J. 两者误差仅为 0.16%, 进一步验证了所建数值仿真模型对于弹塑性接触碰撞过程模拟的有效性. 鉴于此, 下一小节将采用上述所建有限元模型进行多工况接触碰撞数值模拟研究.

2 无量纲恢复系数模型建立

通过总结现有多种恢复系数理论模型^[19-22,31-32], 法向恢复系数公式可表示为

$$e = f(E_1, E_2, u_1, u_2, \sigma_y, \rho, v_{nc}) \tag{2}$$

式中, E_1 与 E_2 分别代表小球和基底的弹性模量, u_1 和 u_2 分别为小球和基底的泊松比, σ_y 代表基底的屈服强度, ρ 为小球密度, v_{nc} 为小球与基底间的初始法向碰撞速度.

进一步地, 可利用式 (3) 中的折合弹性模量 E^* 对式 (2) 进行简化

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-u_1^2}{E_1} + \frac{1-u_2^2}{E_2} \tag{3}$$

因此, 式 (2) 可表达为

$$e = f(E^*, \sigma_y, \rho, v_{nc}) \tag{4}$$

根据量纲分析, 建立如下无量纲参数 k_1 与 k_2

$$k_1 = \frac{E^*}{\rho v_{nc}^2} \tag{5}$$

$$k_2 = \frac{\sigma_y}{E^*} \tag{6}$$

假设恢复系数可表示为 k_1 与 k_2 的函数

$$e = f(k_1, k_2) \tag{7}$$

那么, 接触碰撞恢复系数模型的建立也即转变为未知函数映射 $f(\cdot)$ 的识别与建立. 具体过程如下: 首先, 建立恢复系数 e 与无量纲化参量 k_1 之间的函数关系. 在此基础上, 进一步探索恢复系数与无量纲化参量 k_2 的关系.

2.1 恢复系数与 k_1 和 k_2 的关系

本小节针对多工况小球-基底接触碰撞过程开展数值模拟研究, 其中小球与基底的弹性模量设置为 210 GPa, 泊松比为 0.3, 基底密度设置为 7850 kg/m³, 其余材料参数见表 2 所示. 每种模拟工况下初始碰撞速度变化范围为 0.1 m/s ~ 70 m/s. 精确捕捉小球碰撞开始和结束时刻速度, 基于式 (8) 牛顿恢复系数模型^[12-13,32-33], 获取相应恢复系数数值

$$e = -\frac{v_r}{v_{nc}} \tag{8}$$

其中, v_r 为碰撞结束时刻小球回弹速度, 可通过球体的回弹动能获取^[16]. 结合数值计算结果, 进一步绘制恢复系数与无量纲参量 k_1 之间的函数关系, 如图 6 所示.

图 6 展示了表 2 所示各种工况下的恢复系数 e 计算结果与无量纲化参量 k_1 之间的对数函数关系. 观察可知, 不同屈服应力下的结果几乎呈现平行的线性关系. 据此采用线性函数对其进行拟合, 结果如式 (9) 所示

$$e = a + 0.056 \ln k_1 \tag{9}$$

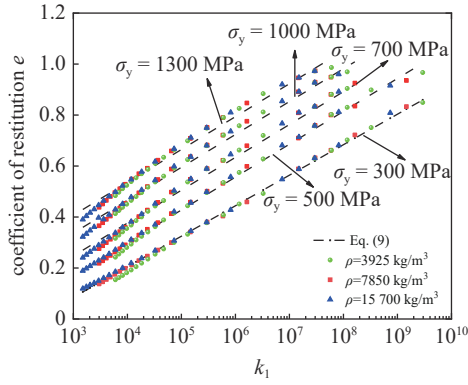
其中, a 为各曲线的纵截距. 进一步, 将式 (9) 拟合结果也反映在图 6 中, 观察可知, 各工况下的拟合效果良好.

为进一步检验式 (9) 的拟合误差, 现将有限元数值仿真结果与式 (9) 的预测结果进行对比, 结果如图 7 所示. x 轴为基于有限元数值仿真结果计算所得

表 2 恢复系数模型仿真参数

Table 2 Simulation parameters for the establishment of the restitution coefficient model

Case no.	Sphere	Substrate	Case no.	Sphere	Substrate	Case no.	Sphere	Substrate
	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	σ_y/MPa		$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	σ_y/MPa		$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	σ_y/MPa
1	3925	300	6	7850	300	11	15 700	300
2	3925	500	7	7850	500	12	15 700	500
3	3925	700	8	7850	700	13	15 700	700
4	3925	1000	9	7850	1000	14	15 700	1000
5	3925	1300	10	7850	1300	15	15 700	1300

图 6 恢复系数与无量纲化参量 k_1 关系曲线Fig. 6 Relations between restitution coefficient and k_1

的恢复系数值, y 轴数据为式 (9) 对应拟合结果. 观察易知, 恢复系数拟合模型的预测误差始终保持在 5% 误差区间范围内, 进一步验证了式 (9) 拟合模型的有效性.

由上可知, a 为式 (9) 拟合模型对应各屈服强度下的 y 轴截距, 因此, a 与材料的屈服强度紧密相关. 鉴于无量纲化参量 k_2 表征材料的屈服特性, 故假设 a 与 k_2 存在如下函数关系

$$a = h(k_2) \quad (10)$$

图 8 给出了二者之间的关系图, 对其进行函数拟合, 可得

$$a = 1.16 + 0.253 \ln k_2 \quad (11)$$

结合式 (9) ~ 式 (11), 小球与基底间的恢复系数模型可进一步表示为

$$e = \begin{cases} 1, & v_{nc} < v_y \\ 1.16 + 0.253 \ln \left(\frac{\sigma_y}{E^*} \right) + 0.056 \ln \left(\frac{E^*}{\rho v_{nc}^2} \right), & v_{nc} \geq v_y \end{cases} \quad (12)$$

其中, v_y 表示屈服速度. 上式表明: 若初始碰撞速度

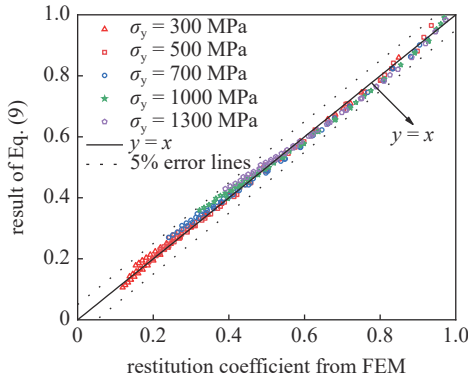
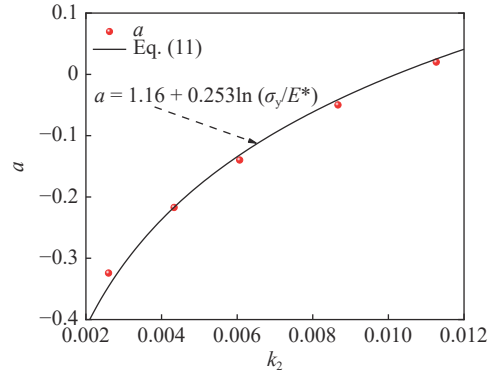


图 7 式 (9) 的拟合误差检验

Fig. 7 Fitting error of Eq. (9)

图 8 参数 a 与 k_2 间的函数关系Fig. 8 Relation between the parameter a and k_2

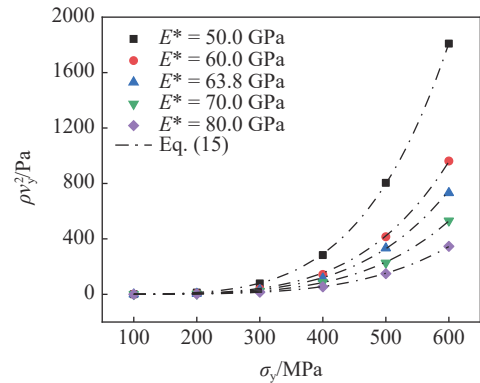
小于屈服速度, 碰撞处于弹性阶段, 恢复系数取值为 1. 否则碰撞进入塑性阶段, 此时恢复系数可表示为无量纲参数 k_1 与 k_2 的函数关系式. 为进一步完善此模型, 需明确屈服速度与材料参数之间的函数关系.

2.2 屈服速度与材料属性关系

参考现有文献 [19-20,34] 可知, 小球与基底碰撞时的屈服速度 v_y 与小球密度 ρ 、折合弹性模量 E^* , 以及基底屈服强度 σ_y 存在如下函数关系

$$v_y = g(\rho, E^*, \sigma_y) \quad (13)$$

设置小球密度为 3925 kg/m³ 和 7850 kg/m³, 折合弹性模量 E^* 为 50 GPa, 60 GPa, 63.8 GPa, 70 GPa, 80 GPa, 基底屈服强度为 100 MPa, 200 MPa, 300 MPa, 400 MPa, 500 MPa, 600 MPa, 结合式 (12) 恢复系数屈服阶段的表达式, 反向推算可获得每种工况下对应的屈服速度. Johnson^[18] 指出, 无量纲参数 $\rho v_y^2 / \sigma_y$ 可以衡量金属撞击的严重程度, 据此绘制不同弹性模量下 ρv_y^2 与 σ_y 的关系图, 结果如图 9 所示.

图 9 ρv_y^2 与 σ_y 间的关系曲线Fig. 9 Relation between ρv_y^2 and σ_y

鉴于图 9 中两个物理量间的量值差别过大, 引入标准化参量 $\bar{\sigma}_y$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0} \quad (14)$$

式中, σ_0 为屈服强度 σ_y 的标准化参量, 取值为 100 MPa. 进一步拟合 ρv_y^2 与 $\bar{\sigma}_y$ 之间的关系, 可得

$$\rho v_y^2 = b \bar{\sigma}_y^{4.5} \quad (15)$$

将式 (15) 拟合曲线也绘制于图 9 中, 观察可知, 拟合效果良好. 其中, 参数 b 与折合弹性模量 E^* 的关系如图 10 所示.

同理, b 与折合弹性模量 E^* 量值差别过大, 引入标准化参量 $\bar{E}^*$ 定义

$$\bar{E}^* = \frac{E^*}{E_0} \quad (16)$$

式中, E_0 为折合弹性模量 E^* 的标准化参量, 量值为 100 GPa. 进一步拟合 b 与 $\bar{E}^*$ 之间的关系, 可得

$$b = c (\bar{E}^*)^{-3.5} \quad (17)$$

其中, $c = 0.05 \text{ Pa}$, 将式 (17) 的结果绘制于图 10 中, 可见拟合效果良好. 结合式 (13) ~ 式 (17), 屈服速度与材料参数之间的关系可进一步表示为

$$v_y = \left(\frac{15.81 \sigma_y^{4.5}}{\rho E^{*3.5}} \right)^{0.5} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (12), 即可建立新型无量纲恢复系数模型

$$e = \begin{cases} 1, & v_{nc} < v_y \\ 1.16 + 0.253 \ln \left(\frac{\sigma_y}{E^*} \right) + 0.056 \ln \left(\frac{E^*}{\rho v_{nc}^2} \right), & v_{nc} \geq v_y \end{cases} \quad (19)$$

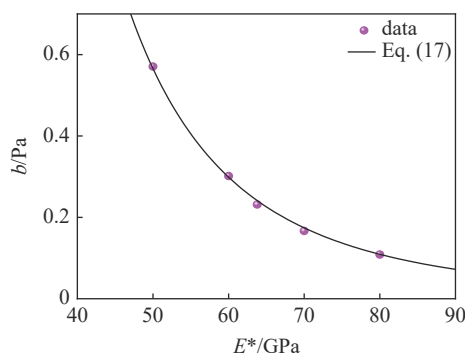


图 10 参数 b 与折合弹性模量 E^* 关系

Fig. 10 Relation between the parameter b and E^*

$$\text{其中, } v_y = \left(\frac{15.81 \sigma_y^{4.5}}{\rho E^{*3.5}} \right)^{0.5}.$$

3 恢复系数模型与试验及有限元结果对比

为进一步检验所建恢复系数模型的有效性, 本小节分别以氧化铝小球与铝材基底、氧化铝小球与钢材基底的接触碰撞过程为例, 对比式 (19) 模型以及几种常见的恢复系数模型 (Thornton 模型^[19]、Wu 模型^[20]、J-G1 模型和 J-G2 模型^[22]) 的预测结果, 并以文献 [35] 的试验结果作为基准, 检验上述几种模型的有效性. 鉴于试验数据仅提供较低初始碰撞速度下的对比, 高速下的结果则以有限元数值模拟作为参考, 具体材料参数见表 3, 详细对比结果如图 11 和图 12 所示.

观察图 11 和图 12 可知: 无论针对哪种碰撞过程, 本文所建恢复系数模型的预测结果皆能很好地与试验数据吻合, 且对于高速下的接触碰撞过程, 本文模型结果也能与有限元结果达到较好的一致性. 相比而言, Thornton 模型预测结果总是较试验与有限元结果偏低, 这也与现有文献结论一致^[22]. 而 Wu 模型在低速时恢复系数预测值过高, 并且会出现

表 3 试验材料属性

Table 3 Material properties of experiments

Body	Materials	E/GPa	u	σ_y/GPa	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
sphere	aluminum oxide	370 ^a	0.22 ^a	—	3958.226 ^b
substrate	aluminum	68 ^a	0.33 ^a	0.38 ^a	—
	steel	200 ^a	0.29 ^a	1.03 ^a	—

Notes: ^a from Ref. [22], ^b from Matweb.com

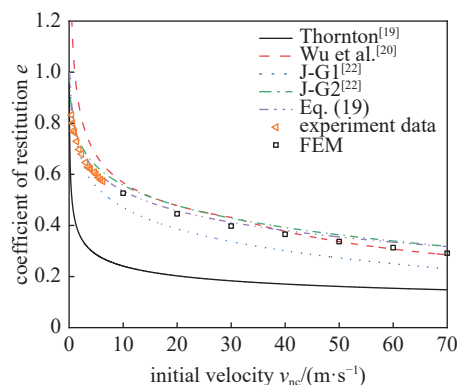


图 11 氧化铝小球与铝材基底接触碰撞过程恢复系数结果对比

Fig. 11 Comparisons of the restitution coefficient between the alumina sphere and aluminum substrate

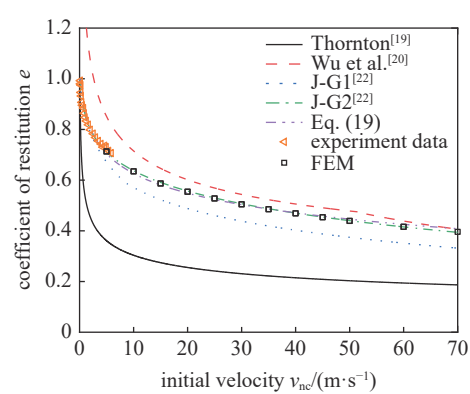


图 12 氧化铝小球与钢材基底接触碰撞过程恢复系数结果对比
Fig. 12 Comparisons of the restitution coefficient between the alumina sphere and steel substrate

大于 1 的情况,这显然与恢复系数的定义矛盾^[22].无论对于哪种材料碰撞,J-G1 模型预测结果在高速时皆偏低.针对氧化铝小球与钢材基底的接触碰撞过程,J-G2 模型可提供良好的恢复系数预测结果.然而,对于氧化铝小球与铝材基底的接触碰撞过程,通过与高速有限元数值模拟结果对比可知,J-G2 模型预测结果偏高.

综上可得,无论对于低速还是高速碰撞过程,本文所建立的无量纲恢复系数模型皆具备良好的预测效果.为进一步检验所建恢复系数模型的泛化性能,本小节开展了多种材料组合在不同初始碰撞速度下的仿真研究,具体材料参数如表 4 所示.

图 13 为不同初始碰撞速度下,本文所建恢复系数模型预测结果与有限元仿真模拟结果的对比.观察易知,无论哪种材料组合,式 (19) 模型皆能提供各初始碰撞速度下良好的恢复系数预测结果,进一步

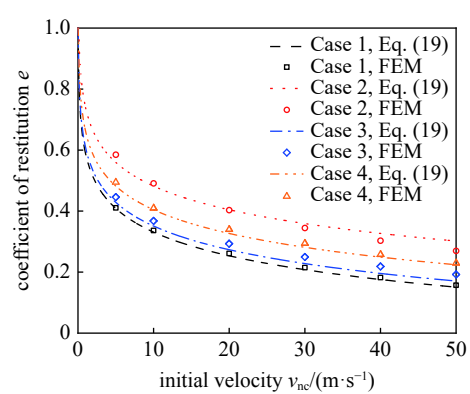


图 13 恢复系数模型泛化性能检验
Fig. 13 Generalization ability of Eq. (19)

验证了本文所建模型的有效性. Case 3 和 Case 4 的结果对比,有助于我们了解球体密度对恢复系数的影响:同一初始碰撞速度下,随着小球密度的增大,系统初始动能增加,碰撞过程造成的能量损失增大,恢复系数减小,符合物理规律.

4 结论

(1) 本文针对弹性球-弹塑性基底法向接触碰撞过程开展研究,利用数值模拟手段建立了考虑不同材料参数与初始碰撞速度的接触碰撞仿真模型,并从网格尺寸与接触碰撞能量变化角度验证了所建仿真模型的精度和有效性.

(2) 通过引入无量纲参数,结合数值拟合方法,挖掘了恢复系数与材料参数以及初始碰撞速度间的函数关系;基于数值仿真结果与 Johnson 塑性理论,反向推算获得了屈服速度与材料属性的映射关系,最终建立了新型的无量纲恢复系数模型.

(3) 与现有多种模型、试验以及数值仿真结果的对比表明,本文所建立的无量纲恢复系数模型不仅预测精度高,而且泛化性能好.

表 4 泛化性能验证材料参数

Table 4 Material parameters for the verification of the generalization ability of the new model

	Body	E/GPa	ν	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	σ_y/MPa
Case 1	sphere	200	0.2	15 000	—
	substrate	70	0.2	7850	200
Case 2	sphere	70	0.3	7000	—
	substrate	150	0.3	7850	300
Case 3	sphere	150	0.4	7000	—
	substrate	200	0.4	7850	300
Case 4	sphere	150	0.4	2700	—
	substrate	200	0.4	7850	300

参 考 文 献

1 曹登庆,白坤朝,丁虎等.大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展.力学学报,2019,51(1):1-13 (Cao Dengqing, Bai Kunchao, Ding Hu, et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(1): 1-13 (in Chinese))

2 王乙坤,王琳,倪樵等.具有刚性间隙约束输流管的碰撞振动.力学学报,2020,52(5):1498-1508 (Wang Yikun, Wang Lin, Ni Qiao, et al. Vibro-impact dynamics of pipe conveying fluid subjected to rigid clearance constraint. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(5): 1498-1508 (in Chinese))

3 宁志远,白争锋,蒋鑫等.磨损与动力学耦合的行星传动齿轮动力学研究.力学学报,2022,54(4):1125-1135 (Ning Zhiyuan, Bai

- Zhengfeng, Jiang Xin, et al. Study on dynamics of planetary transmission gear considering wear and dynamics coupling. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(4): 1125-1135 (in Chinese))
- 4 Hertz H. Über die berührung fester elastische körper. *Journal für die reine und Angewandte Mathematik*, 1882, 92: 156-171
 - 5 Zhang J, Liang X, Zhang ZH, et al. A continuous contact force model for impact analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 168: 108739
 - 6 郭祥, 靳艳飞, 田强. 随机空间柔性多体系统动力学分析. *力学学报*, 2020, 52(6): 1730-1742 (Guo Xiang, Jin Yanfei, Tian Qiang. Dynamics analysis of stochastic spatial flexible multibody system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(6): 1730-1742 (in Chinese))
 - 7 Wang H, Yin XC, Deng QM, et al. Experimental and theoretical analyses of elastic-plastic repeated impacts by considering wave effects. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2017, 65: 212-222
 - 8 Hunt KH, Crossley FRE. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42(2): 1-6
 - 9 Lankarani HM, Nikravesh PE. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5(2): 193-207
 - 10 Flores P, Machado M, Silva MT, et al. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2011, 25(3): 357-375
 - 11 王旭鹏, 张艳, 吉晓民等. 一种基于变恢复系数的接触碰撞力模型. *振动与冲击*, 2019, 38(5): 198-202 (Wang Xupeng, Zhang Yan, Ji Xiaomin, et al. A contact-impact force model based on variable recovery coefficient. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(5): 198-202 (in Chinese))
 - 12 姚文莉, 岳嵘. 有争议的碰撞恢复系数研究进展. *振动与冲击*, 2015, 34(19): 43-48 (Yao Wenli, Yue Rong. Advance in controversial restitution coefficient study for impact problems. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(19): 43-48 (in Chinese))
 - 13 王庚祥, 马道林, 刘洋等. 多体系统碰撞动力学中接触力模型的研究进展. *力学学报*, 2022, 54(11): 1-28 (Wang Gengxiang, Ma Daolin, Liu Yang, et al. Research progress of contact force models in the collision mechanics of multibody system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(11): 1-28 (in Chinese))
 - 14 蹇朋波, 尹晓春, 沈煜年等. 碰撞激发弹塑性波传播的动态子结构方法. *力学学报*, 2012, 44(1): 184-188 (Qian Pengbo, Yin Xiaochun, Shen Yunian, et al. Dynamic substructure method for elastic-plastic wave propagation induced by impact. *Journal of Applied Mechanics*, 2012, 44(1): 184-188 (in Chinese))
 - 15 Patil D, Higgs CF. A coefficient of restitution model for sphere-plate elastoplastic impact with flexural vibrations. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(3): 1817-1832
 - 16 Wu CY. Finite element analysis of particle impact problems. [PhD Thesis]. The University of Aston in Birmingham, 2001
 - 17 Hutchings IM. Energy absorbed by elastic waves during plastic impact. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1979, 12(11): 1819-1824
 - 18 Johnson KL. Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
 - 19 Thornton C. Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 383-386
 - 20 Wu CY, Li LY, Thornton C. Rebound behaviour of spheres for plastic impacts. *International Journal of Impact Engineering*, 2003, 28(9): 929-946
 - 21 葛藤, 贾智宏, 周克栋. 钢球和刚性平面弹塑性正碰撞恢复系数研究. *工程力学*, 2008, 6: 209-213 (Ge Teng, Jia Zhihong, Zhou Kedong. Research on elastoplastic normal impact of steel. *Engineering Mechanics*, 2008, 6: 209-213 (in Chinese))
 - 22 Jackson RL, Green I, Marghitu DB. Predicting the coefficient of restitution of impacting elastic-perfectly plastic spheres. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60(3): 217-229
 - 23 Etsion I, Kligerman Y, Kadin Y. Unloading of an elastic-plastic loaded spherical contact. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(13): 3716-3729
 - 24 Jackson RL, Green I. A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat. *Journal of Tribology*, 2005, 127(2): 343-354
 - 25 郭振, 陈渭, 耿煜等. 恒定外力作用下的碰撞过程恢复系数模型研究. *振动与冲击*, 2021, 40(12): 62-69 (Guo Zhen, Chen Wei, Geng Yu, et al. A study on the coefficient of a restitution model considering constant external forces during impact. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(12): 62-69 (in Chinese))
 - 26 袁晗, 王小军, 张宏剑等. 重复使用火箭着陆结构稳定性分析. *力学学报*, 2020, 52(4): 1007-1023 (Yuan Han, Wang Xiaojun, Zhang Hongjian, et al. Stability analysis of reusable launch vehicle landing structure. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(4): 1007-1023 (in Chinese))
 - 27 马佳, 董帅, 唐雪松等. 以提升创新能力为目标的基础力学实践教学初探. *力学与实践*, 2022, 44(3): 706-711 (Ma Jia, Dong Shuai, Tang Xuesong, et al. Preliminary research of practice teaching for fundamental mechanics targeted at the improvement of innovation ability. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(3): 706-711 (in Chinese))
 - 28 彭光健, 张泰华. 表面残余应力的仪器化压入检测方法研究进展. *力学学报*, 2022, 54(8): 2287-2303 (Peng Guangjian, Zhang Taihua. Progress in instrumented indentation methods for determination of surface residual stress. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(8): 2287-2303 (in Chinese))
 - 29 宋明泽. 金属铍纳米压入行为 (性能). [硕士论文]. 宁夏: 宁夏大学, 2022 (Song Mingze. Nanoidentation behaviors (properties) of metal beryllium. [Master Thesis]. Ningxia: Ningxia University, 2022 (in Chinese))
 - 30 Ma DL, Liu CS. Contact law and coefficient of restitution in elastoplastic spheres. *Journal of Applied Mechanics*, 2015, 82(12): 121006
 - 31 Chang WR, Ling FF. Normal impact model of rough surfaces. *Journal of Tribology*, 1992, 114(3): 439-447
 - 32 Weir G, Tallon S. The coefficient of restitution for normal incident, low velocity particle impacts. *Chemical Engineering Science*, 2005, 60(13): 3637-3647
 - 33 蒋志明, 刘强, 陈人河等. 安庆铜矿主溜井非贮矿段矿石流冲击磨损规律相似模型试验. *长沙理工大学学报 (自然科学版)*, 2020, 17(3): 22-29 (Jiang Zhiming, Liu Qiang, Chen Renhe, et al. Similar model test on flow impact wear law in the non-storage section of main ore-pass in Anqing copper mine. *Journal of Changsha University of Science and Technology (Natural Science)*, 2020, 17(3): 22-29 (in Chinese))
 - 34 Peng Q, Jin Y, Liu X, et al. Effect of plasticity on the coefficient of restitution of an elastoplastic sphere impacting an elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, 222-223: 111036
 - 35 Kharaz AH, Gorham DA. A study of the restitution coefficient in elastic-plastic impact. *Philosophical Magazine Letters*, 2000, 80(8): 549-559