基于自适应泡泡法的薄壳结构拓扑优化设计

张华麟，杨　东，史之君，蔡守宇

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF THIN SHELL STRUCTURES BASED ON ADAPTIVE BUBBLE METHOD

Zhang Hualin, Yang Dong, Shi Zhijun, and Cai Shouyu

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-562

固体力学

基于自适应泡泡法的薄壳结构拓扑优化设计1)

张华麟 * 杨 东 † 史之君 ** 蔡守宇 *, 2)

* (郑州大学力学与安全工程学院, 郑州 450001)

† (一汽解放汽车有限公司, 长春 130011)

** (西安交通大学航天航空学院, 西安 710049)

摘要 为有效解决薄壳结构拓扑优化设计难题, 并满足其对分析模型精度和优化结果质量的高要求, 结合等几何壳体分析方法提出一种基于自适应泡泡法的新型拓扑优化设计框架. 等几何分析技术在薄壳分析方面具有天然的优势: 一方面可为薄壳结构建立起精确的 NURBS 分析模型, 避免了模型转换操作及误差; 另一方面还可保证待分析物理场的高阶连续性, 无需设置转角自由度等. 为了在给定壳面上实现结构的拓扑演化, 借助 NURBS 曲面 (即等几何分析中的薄壳中面) 的映射关系, 仅需在规则的二维参数区域内改变结构拓扑即可. 鉴于此, 采用自适应泡泡法在壳面参数区域内开展拓扑优化, 该方法包含孔洞建模、孔洞引入和固定网格分析 3 个模块, 其在当前工作中分别基于闭合 B 样条、拓扑导数理论和有限胞元法实现. 其中, 闭合 B 样条兼具参数和隐式两种表达形式, 参数形式便于在 CAD 系统中直接生成精确的结构模型; 隐式形式不仅便于开展孔洞的融合/分离操作, 还能与有限胞元法有机结合以替代繁琐的修剪曲面分析方法. 理论分析和数值算例表明, 所提优化设计框架将复杂的薄壳结构拓扑优化问题转化为简单的二维结构拓扑优化问题, 在保证足够分析精度的基础上使用相对很少的设计变量就可得到具有清晰光滑边界且便于导入到 CAD 系统的优化结果.

关键词 拓扑优化, 薄壳结构, 自适应泡泡法, 等几何分析, 闭合 B 样条

中图分类号: O343.2 **文献标识码**: A doi: 10.6052/0459-1879-22-562

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF THIN SHELL STRUCTURES BASED ON ADAPTIVE BUBBLE METHOD1)

Zhang Hualin * Yang Dong † Shi Zhijun ** Cai Shouyu *, 2)

* (*School of Mechanics and Safety Engineering*, *Zhengzhou University*, *Zhengzhou* 450001, *China*)

† (*FAW Jiefang Automobile Co.*, *Ltd.*, *Changchun* 130011, *China*)

** (*School of Aerospace Engineering*, *Xi'an Jiaotong University*, *Xi'an* 710049, *China*)

Abstract Combined with the isogeometric shell analysis (IGA) method, a new optimization design framework based on the adaptive bubble method (ABM) is proposed in this work, in order to effectively solve the topology optimization design problem of thin shell structures, and meet the high standards for the accuracy of analysis models as well as the quality of optimization results. The IGA technique has its natural advantages in thin shell analysis: on one hand, precise analysis models for thin shell structures are established with IGA, and model transformation operations and the resulting

2022–11–28 收稿, 2023–04–03 录用, 2023–04–04 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11702254), 河南省科技攻关 (212102210068) 和国家重点研发计划 (2017YFB1102800) 资助项目.

2) 通讯作者: 蔡守宇, 副教授, 主要研究方向为结构拓扑优化设计. E-mail: caishouyu@zzu.edu.cn

引用格式: 张华麟, 杨东, 史之君, 蔡守宇. 基于自适应泡泡法的薄壳结构拓扑优化设计. 力学学报, 2023, 55(5): 1165-1173

Zhang Hualin, Yang Dong, Shi Zhijun, Cai Shouyu. Topology optimization of thin shell structures based on adaptive bubble method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(5): 1165-1173

errors could therefore be avoided; on the other hand, the high-order continuity of physical fields to be solved can be guaranteed without setting the rotational degrees of freedom. Thanks to the mapping relationship related to the NURBS surface (i.e., the middle surface of thin shell), the structural topology evolution of a given shell surface can be achieved easily in the 2D regular parametric domain. In view of this, the ABM is adopted to carry out topology optimization in the parametric domain, and it contains three modules: the modeling of holes with closed B-splines (CBS), the insertion of holes via the topological derivative theory, and the fixed-grid analysis based on the finite cell method (FCM). It should be noted that holes are expressed in both parametric and implicit forms with CBS. The parametric form makes it convenient to import the structural model into the CAD system exactly. The implicit form not only facilitates the merging and separating operations of holes, but also can be well combined with the FCM which is far more convenient than trimming surface analysis (TSA). Theoretical analysis and numerical examples indicate that the proposed design framework could convert the complicated thin shell structural topology optimization problem into the simple one in the 2D domain, and optimized results with clear and smooth boundaries can be obtained with relatively few design variables.

Key words topology optimization, thin shell, adaptive bubble method, isogeometric analysis, closed B-splines

引 言

薄壳结构在自然界中随处可见, 如起到保护作用的贝壳、鸡蛋壳和花生壳等. 由于其具有比强度/刚度高、空间承载性能好等优点, 现已广泛应用于航空、航天、航海、机械、交通和建筑等工程实际装备和产品中. 在航空航天工业快速发展、装备制造业同质化竞争加剧以及大力推进资源节约集约利用的今天, 自重小、跨度大、用料少和形式多的薄壳结构成为当前优化技术的重要设计对象[1-5].

作为材料节省效果最为显著的致力于充分挖掘材料性能的优化技术, 拓扑优化自 20 世纪 80 年代 Bendsøe 等[6] 提出基于均匀化理论的实现方法以来, 进入了快速发展时期并形成了各具特色的方法[7-10]. 多类拓扑优化方法已在壳结构轻量化设计等方面得到应用[11-22], 其中变密度法由于物理概念清晰简洁且已集成到各大商用 CAE 软件, 而在壳结构拓扑优化设计中被普遍采用[4, 11-15]. 然而, 相关优化工作大都使用传统有限元分析方法对壳结构进行力学响应计算, 结构分析模型 (CAE 模型) 与几何模型 (CAD 模型) 由于采用了不同的描述方式而存在不一致性: 前者由有限个离散的单元构成且常使用 Lagrange, Serendipity 或 Hermite 等插值函数; 后者一般由连续解析的样条语言 (如 NURBS) 描述. 鉴于壳结构 (尤其是薄壳结构) 的分析结果对模型误差异常敏感, 在基于有限元分析方法的优化设计中不仅要采用十分精细的单元划分, 还要进行繁琐的模型转换操作.

等几何分析 (isogeometric analysis, IGA) 方法实现了 CAD 与 CAE 模型的统一[23], 然而其常用的张量积形式的 NURBS 模型具有极大的拓扑局限性, 难以描述拓扑优化中必然出现的多孔结构. 为克服 IGA 的不足并实现等几何拓扑优化设计, Seo 等[24] 结合裁剪曲面分析 (trimmed surface analysis, TSA) 技术对被引入多个孔洞的拓扑复杂壳结构进行高精度的力学响应分析. Kang 等[25] 进一步开展了基于 TSA 的壳结构拓扑优化设计. Zhang 等[26-27] 将移动可变形孔洞 (moving morphable void, MMV) 方法与 TSA 技术相结合, 解决了孔洞边界变形异常 (如 Zigzag 边界和自相交现象) 等多个问题, 形成了具有较好数值稳定性的壳结构拓扑优化方法.

前述基于 TSA 的等几何拓扑优化方法在壳结构设计方面的技术优势除了设计变量少、分析精度高以及优化结果质量好之外, 还包括: 在简单二维参数区域内即可实现对复杂壳体的拓扑优化设计; 无需设置转角自由度就能保证待分析物理场的高阶连续性; 使用单个 NURBS 面片即可构建拓扑复杂的结构模型; 避免了模型转换操作及由之带来的模型误差. 但是, 此类方法存在以下问题.

(1) TSA 的两个核心步骤较为繁琐, 不利于动辄需要迭代几百甚至上千步的拓扑优化设计的开展. 首先是基于传统 B 样条修剪曲线[24-25] 或凸多边形 B 样条曲线[26-27] 的裁剪单元识别步骤, 远难于基于隐式曲线的判别过程; 其次是关于裁剪单元的积分运算步骤, 需要对含曲线边界的三角形细分单元使用复杂的 NURBS 增强积分策略.

(2) 以传统或凸多边形 B 样条曲线为边界的孔

洞在融合与分离时, 需要为新的孔洞构建 B 样条曲线边界, 这种复杂操作在拓扑优化中会反复进行.

为解决上述两个问题, 并保留基于 TSA 的等几何拓扑优化方法的众多技术优势, 本工作在利用 IGA 进行薄壳结构分析的基础上, 采用自适应泡泡法 (adaptive bubble method, ABM)[28] 在壳面的二维参数区域内开展拓扑优化. ABM 的孔洞建模模块使用兼具参数和隐式两种表达形式的闭合 B 样条 (closed B-splines, CBS)[29]. 参数形式使优化结果能够方便精确地转换成 CAD 模型; 隐式形式不仅便于裁剪单元的识别以及孔洞的融合与分离操作, 还能配合 ABM 的固定网格分析模块——有限胞元法 (finite cell method, FCM)[30] 对裁剪单元进行高效率、高精度的自适应数值积分. 此外, 得益于 ABM 的孔洞引入模块, 当前设计框架不存在初始布局依赖性问题.

1　薄壳结构拓扑优化设计框架

1.1　等几何壳体分析技术

1.1.1　薄壳结构建模

IGA 通常采用 NURBS 曲面对薄壳结构进行精确建模[23]. NURBS 是一种非常优秀的建模方式, 国际标准化组织在 1991 年正式颁布的工业产品数据交换标准中, 将之定义为自由型曲线曲面的唯一数学描述方法. NURBS 曲面的表达式为

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)\boldsymbol{P}_{i,j} \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{P}_{i,j}$ 为曲面控制点, $R_{i,j}(\xi,\eta)$ 为定义如下的二维 NURBS 基函数

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}},\ 0\leqslant\xi,\eta\leqslant 1 \tag{2}$$

式中, $w_{i,j}$ 为权因子, (ξ,η) 表示参数域坐标, 参数域由两个一维节点向量 $\boldsymbol{\varXi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_{n+p+1}\}$ 和 $\boldsymbol{H}=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_{m+q+1}\}$ 组成, $N_{i,p}(\xi)$ 和 $N_{j,q}(\eta)$ 分别为定义在 $\boldsymbol{\varXi}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 上的 p 次和 q 次 B 样条基函数, 它们的个数分别为 n 和 m, 且可由 Cox-deBoor 递推公式计算得到[31].

由于三维物理域内的 NURBS 曲面是由其二维矩形参数域自然映射而成, 则对于带孔薄壳结构, 一种建模思想如图 1 所示. 首先构建出表达薄壳中面的 NURBS 模型, 进而利用 NURBS 曲面的映射关系, 在二维参数域中开孔即可实现三维物理域中的薄壳结构开孔. 在此基础上, 通过调节参数域中的孔洞形状即可改变带孔薄壳曲面上的孔洞边界, 而且孔洞边界在变化过程中始终位于薄壳曲面上. 如果进一步改变参数域中的孔洞数量, 则实现了薄壳结构的拓扑变化. 基于该思想, 本文将复杂的三维薄壳结构拓扑优化问题转化为简单的二维参数域内拓扑优化问题.

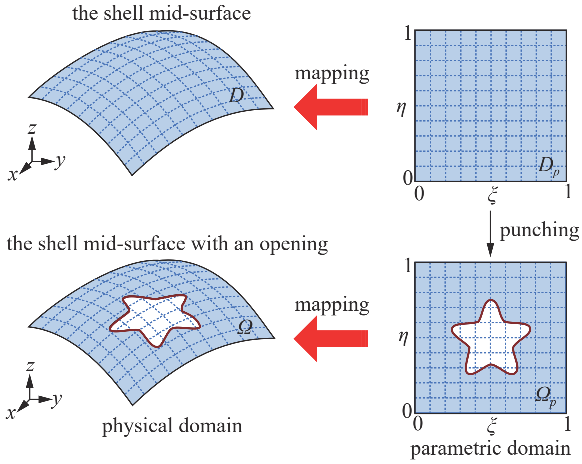


图 1　带孔薄壳结构建模示意图

Fig. 1　Schematic diagram of modeling an opening thin shell

1.1.2　薄壳结构分析

本文采用 Kirchhoff-Love 壳的 IGA 理论[32] 对薄壳结构进行力学响应分析, 薄壳变形由中面的变形描述. 中面上的点位移可定义为

$$\boldsymbol{u}(\theta^1,\theta^2)=\boldsymbol{x}(\theta^1,\theta^2)-\bar{\boldsymbol{x}}(\theta^1,\theta^2) \tag{3}$$

式中, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 分别是中面上任意点在参考构型和实际构型的位置向量, θ^1 和 θ^2 是曲线坐标. 由于忽略了横向剪切应变, 薄壳的格林–拉格朗日应变张量可表示为

$$E_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+\theta^3\kappa_{\alpha\beta} \tag{4}$$

式中, α 和 β 从 1 和 2 中取值, θ^3 为厚度方向上的坐标, 常数部分 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 表示薄膜应变, 线性部分 $\kappa_{\alpha\beta}$ 表示弯曲应变[33].

对薄壳结构的总势能求变分可得

$$\delta\varPi=\delta W_{\rm int}+\delta W_{\rm ext}=0 \tag{5}$$

$$\delta W_{\rm int}=\int_\Omega(\boldsymbol{n}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{m}:\delta\boldsymbol{\kappa})\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega\left(t\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\rm T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{t^3}{12}\delta\boldsymbol{\kappa}^{\rm T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\kappa}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{6}$$

$$\delta W_{\mathrm{ext}} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{f}_q \cdot \delta \boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{f}_N \cdot \delta \boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Gamma \tag{7}$$

式中, W_{int} 和 W_{ext} 分别为内力功和外力功, $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 分别为薄膜内力张量和弯曲内力张量, $\boldsymbol{C}$ 是材料的本构张量, t 是薄壳厚度, $\boldsymbol{f}_q$ 为单位面积的均布载荷, $\boldsymbol{f}_N$ 为单位长度的轴向力, $\boldsymbol{u}$ 是式 (3) 定义的薄壳中面上的点位移, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 是与式 (4) 中 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和 $\kappa_{\alpha\beta}$ 分别相对应的薄膜应变张量和弯曲应变张量.

利用式 (2) 定义的 NURBS 基函数对薄壳结构的位移场进行离散, 并简化排序规则, 将 $R_{i,j}$ 记为 R_I, 则任意点的近似位移可表示为

$$\boldsymbol{u}^h = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{I=1}^{np} R_I(\xi, \eta) \boldsymbol{u}_I \tag{8}$$

式中, $\boldsymbol{u}_I$ ($I = 1, 2, \cdots, np$) 是控制点的位移, np 是控制点的个数. 该点的薄膜应变和弯曲应变分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \sum_{I=1}^{np} \boldsymbol{M}_I(\xi, \eta) \boldsymbol{u}_I, \quad \boldsymbol{\kappa}^h = \sum_{I=1}^{np} \boldsymbol{B}_I(\xi, \eta) \boldsymbol{u}_I \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{M}_I$ 和 $\boldsymbol{B}_I$ 分别为与第 I 个控制点相对应的薄膜应变矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和弯曲应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的分块子矩阵. 将式 (8) 和式 (9) 代入式 (5) ~ 式 (7) 得到平衡方程

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F} \tag{10}$$

其中, 薄壳结构刚度矩阵和载荷向量为

$$\boldsymbol{K} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{M} t + \frac{t^3}{12} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{11}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Omega} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_q \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_N \mathrm{d}\Gamma \tag{12}$$

式中, $\boldsymbol{D}$ 是材料的弹性矩阵, $\boldsymbol{R}$ 是由 NURBS 基函数 R_I 组建而成的形函数矩阵.

1.2 自适应泡泡法

在薄壳曲面参数域内开展拓扑优化的自适应泡泡法包含 3 个模块: 孔洞建模、孔洞引入和固定网格分析, 下面将逐一进行介绍.

1.2.1 基于 CBS 的孔洞模型构建

作为光滑变形隐式曲线 (smoothly deformable implicit curves, SDIC)[28] 的简化形式, CBS 在参数域中的隐式表达式为

$$\xi^2 + \eta^2 = R(\theta)^2 \tag{13}$$

其参数形式为

$$\left.\begin{aligned} \xi &= R(\theta)\cos\theta \\ \eta &= R(\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中, $R(\theta)$ 为半轴长函数, θ 为定义如下的极角

$$\theta = \arctan\frac{\eta}{\xi} + H(-\xi)\pi \tag{15}$$

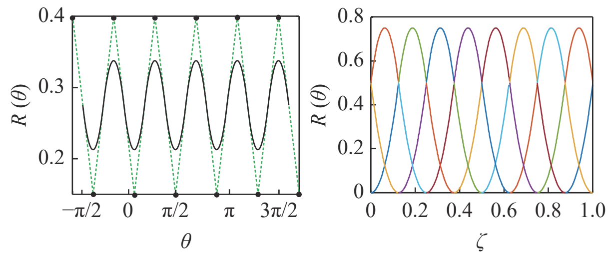
其中, $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数, 可见 θ 的值域为 $[-\pi/2, 3\pi/2)$. 为使 $R(\theta)$ 能够随 θ 的改变而自由光滑地变化, 借助 B 样条基函数 $N_{k,r}(\zeta)$ 将其定义为

$$R(\theta) = \sum_{k=1}^{nb} N_{k,r}(\zeta) p_k = \sum_{k=1}^{nb} N_{k,r}\left(\frac{\theta + \pi/2}{2\pi}\right) p_k \tag{16}$$

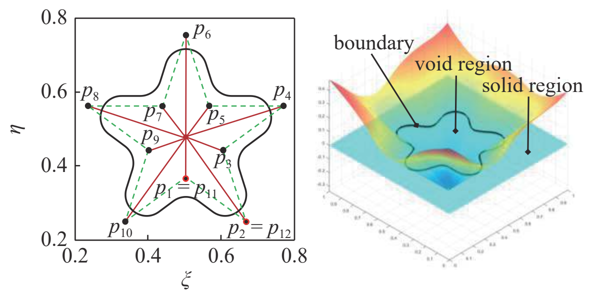
式中, nb 和 r 分别是 B 样条基函数的个数和次数, p_k 是控制参数, ζ 的取值范围为 $[0, 1)$. 本工作使用节点均匀分布的 unclamped 类型 B 样条曲线表示 $R(\theta)$, 见图 2(a), 这样每个控制参数 p_k 的作用可看作是等价的. 为形成图 2(b) 所示的 CBS, 需使前 r 个和后 r 个控制点相重合, 也即 $p_\lambda = p_{nb-r+\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \cdots, r$). 采用该方式构建的 CBS 的光滑性处处相同.

在拓扑优化中孔洞是被逐步引入的, 根据式 (13), 可将第 i 个引入的孔洞用隐函数表示如下

$$\varphi_i = \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2} - R_i(\theta_i) \tag{17}$$



(a) unclamped 类型的 B 样条曲线 (半轴长函数)及其基函数
(a) B-spline curve (radius function) and its basis functions defined on an unclamped knot vector



(b) 闭合 B 样条 (CBS) 曲线及其隐式模型
(b) Closed B-spline (CBS) curve and its implicit model

图 2 基于 CBS 的孔洞表示方式

Fig. 2 CBS-based hole representation

式中, $(\xi_i, \eta_i)^{\mathrm{T}}$ 为该孔洞的插入点坐标. 参见图 1, 若将参数域中 D_p 的隐函数记为 Φ_{Dp}, 则 Ω_p 的隐函数为

$$\Phi_{\Omega p} = \min\left\{\Phi_{Dp}, \{\varphi_i\}_{i=1}^{num}\right\} \tag{18}$$

式中, num 表示孔的数量, 其值在优化迭代中会动态增加. $\Phi_{\Omega p}$ 满足

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{\Omega p}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega_p \\ \Phi_{\Omega p}(\boldsymbol{\xi}) > 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega_p \backslash \partial\Omega_p \\ \Phi_{\Omega p}(\boldsymbol{\xi}) < 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in D_p \backslash \Omega_p \end{array}\right\} \tag{19}$$

式中, $\boldsymbol{\xi}$ 表示参数域中的任意点, 根据隐函数 $\Phi_{\Omega p}$ 可直接判断出点 $\boldsymbol{\xi}$ 是否位于区域 Ω_p 内.

1.2.2　基于拓扑导数的孔洞自适应引入

拓扑导数反映无限小单一区域的扰动 (引入孔洞、夹杂和裂纹等) 对给定函数的影响. 当前优化工作的目标函数为薄壳结构柔顺度

$$\begin{aligned} C = & \int_{\Omega} (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\Omega = \\ & \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{m}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{u}))|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{20}$$

式中, $\boldsymbol{J}$ 为反映薄壳中面参数域与物理域之间映射关系的雅可比矩阵, 其余参数定义同前. 参考文献 [34-35], 若不考虑体积力等设计相关性载荷, 则上式表达的柔顺度的拓扑导数为

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right) = & \lim_{r_t \to 0} \frac{C\left(\Omega_p \backslash B(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}, r_t)\right) - C(\Omega_p)}{\pi r_t^2} = \\ & \frac{4|\boldsymbol{J}|}{1+v}\left[\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right)\right] + \\ & \frac{4|\boldsymbol{J}|}{1+v}\left[\boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right) : \boldsymbol{\kappa}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right)\right] - \\ & \frac{1-3v}{1-v^2}|\boldsymbol{J}|\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right)\right]\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right)\right] - \\ & \frac{1-3v}{1-v^2}|\boldsymbol{J}|\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{m}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right)\right]\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\kappa}\left(\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\xi}_{\Omega p}\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{21}$$

式中, $B(\xi_{\Omega p}, r_t)$ 表示区域 Ω_p 内以任意点 $\xi_{\Omega p}$ 为圆心且以 r_t 为半径的圆孔, v 为材料泊松比. 由于孔洞的引入会削弱结构刚度, 也即导致柔顺度的增加, 因此拓扑导数 D_{T} 是非负的. 若某点处 D_{T} 值很小或接近于零, 则表示在该点引入孔洞对结构柔顺度的影响可忽略不计, 因而可优先在此处插入孔洞.

参照文献 [28] 的早期研究, 为保证拓扑优化过程的稳健性, 设置拓扑导数阈值 $\overline{D_{\mathrm{T}}}$ 以限制每步优化迭代的开孔数量; 为使设计变量尽量被充分利用, 对已插入的孔洞设置影响区域 I_i 以避免在其附近引入新孔. 图 3 展示了单步优化迭代的孔洞引入过程, 首先对 Ω_p 内采样点的 D_{T} 值从小到大进行排序, 并将 D_{T} 小于 $\overline{D_{\mathrm{T}}}$ 的采样点作为潜在插入点 (图中标序号的点), 进而结合影响区域逐步引入孔洞.

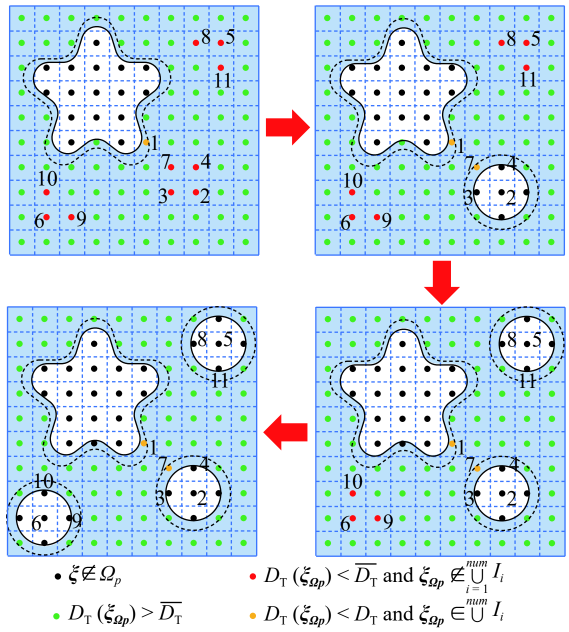


图 3　孔洞自适应引入机制示意图

Fig. 3　Adaptive introduction mechanism of holes

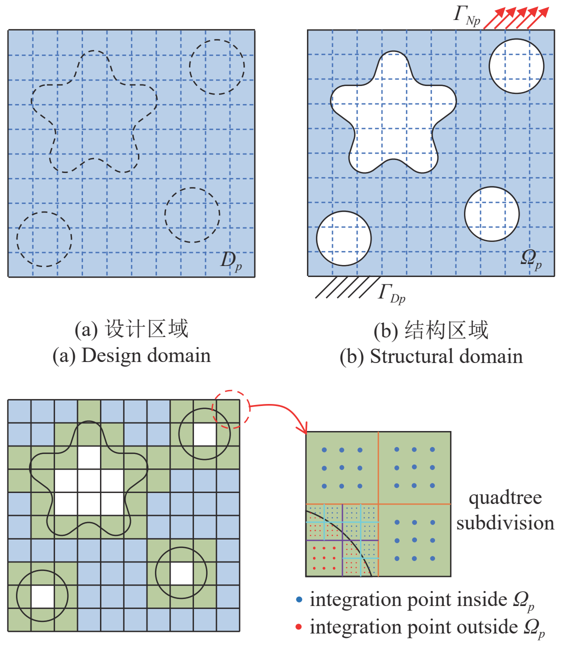
1.2.3　有限胞元固定网格分析方法

FCM 本质上一种是采用高阶形函数插值逼近待求物理场的虚拟区域法[30], 其结合式 (18) 定义的隐函数 $\Phi_{\Omega p}$ 开展力学响应分析的方式见图 4. 参数域中的 Ω_p 由规则设计区域 D_p 开孔而得, 则根据 FCM 的思想, 可将 D_p 作为计算域并用矩形胞元离散, 进而结合 $\Phi_{\Omega p}$ 将胞元快速区分为虚拟胞元、物理胞元和边界胞元, 以分类进行计算. 其中, 对于被 $\partial\Omega_p$ 切割的边界胞元需采用四叉树自适应积分策略, 如图 4(c) 所示, 值得一提的是基于 $\Phi_{\Omega p}$ 的四叉树细化操作十分简便. 由式 (11) 和式 (12) 得到 FCM 的刚度矩阵和载荷向量如下

$$\boldsymbol{K} = \int_{D_p} \left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}t + \frac{t^3}{12}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\right) H\left(\Phi_{\Omega p}\right)|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{22}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_{D_p} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_q H\left(\Phi_{\Omega p}\right)|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_{\Gamma_{Np}} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_N|\boldsymbol{J}_\Gamma|\mathrm{d}\Gamma_p \tag{23}$$

其中, $\boldsymbol{J}_\Gamma$ 为反映参数域中 Ω_p 边界 $\partial\Omega_p$ 和物理域中薄



(a) 设计区域
(a) Design domain

(b) 结构区域
(b) Structural domain

(c) 胞元类型辨别和四叉树细化
(c) Cell classification and quadtree refinement

图 4 有限胞元方法示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the finite cell method

壳结构边界$\partial\Omega$之间映射关系的雅可比矩阵. 由式 (19) 可知, 当点ξ位于Ω_p内部时$H(\Phi_{\Omega p}(\xi))$为 1, 反之则$H(\Phi_{\Omega p}(\xi))$为 0.

2 优化问题数学模型及灵敏度分析

2.1 数学模型

本文旨在利用有限量材料实现薄壳结构的刚度最大化 (柔顺度最小化) 设计, 这种典型拓扑优化问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
&\text{find} \quad \left\{\xi_i, \eta_i, \{p_{i,k}\}_{k=1}^{nb-r}\right\}_{i=1}^{num} \\
&\min \quad C = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} \\
&\text{s.t.} \quad \boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F} \\
&V = \int_{D_p} H\left(\Phi_{\Omega p}\right)|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \leqslant V_{\lim}, \\
&\quad p_{i,k} > 0, \quad i = 1,2,\cdots,num, \quad k = 1,2,\cdots,nb-r
\end{aligned} \tag{24}$$

式中, V为薄壳结构体积, $V_{\lim}$为体积上限, 其余参数定义同前, 每个孔洞有$nb-r+2$个设计变量, 现将变量统一记为

$$\boldsymbol{v} = \{v_s\}_{s=1}^{num\times(nb-r+2)} = \left\{\xi_i, \eta_i, \{p_{i,k}\}_{k=1}^{nb-r}\right\}_{i=1}^{num} \tag{25}$$

2.2 灵敏度分析

薄壳结构柔顺度C对设计变量v_s的灵敏度为

$$\frac{\partial C}{\partial v_s} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v_s}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial v_s} \tag{26}$$

若$\boldsymbol{F}$是设计无关载荷, 即上式右端第一项为 0, 则结合平衡方程$\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{F}$可得

$$\frac{\partial C}{\partial v_s} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial v_s} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\left(-\boldsymbol{K}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial v_s}\boldsymbol{U}\right) = -\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial v_s}\boldsymbol{U} \tag{27}$$

为使推导过程更加通用, 将结构刚度和体积函数统一表达为

$$G = \int_{D_p} gH(\Phi_{\Omega p})|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{28}$$

当$g = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB}t^3/12 + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DM}t$时$\boldsymbol{G}$表示刚度矩阵; 当$g = 1$时$G$表示体积. G的灵敏度推导如下

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial v_s} &= \int_{D_p} g\frac{\partial H\left(\Phi_{\Omega p}\right)}{\partial v_s}|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&\int_{D_p} g\frac{\mathrm{d}H\left(\Phi_{\Omega p}\right)}{\mathrm{d}\Phi_{\Omega p}}\frac{\partial \Phi_{\Omega p}}{\partial v_s}|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&\int_{D_p} g\frac{\partial \Phi_{\Omega p}}{\partial v_s}\frac{|\boldsymbol{J}|}{\|\nabla\Phi_{\Omega p}\|}\left(\frac{\mathrm{d}H\left(\Phi_{\Omega p}\right)}{\mathrm{d}\Phi_{\Omega p}}\|\nabla\Phi_{\Omega p}\|\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&\int_{D_p} g\frac{\partial \Phi_{\Omega p}}{\partial v_s}\frac{|\boldsymbol{J}|}{\|\nabla\Phi_{\Omega p}\|}\hat{\delta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \\
&\int_{\partial\Omega_p} g\frac{\partial \Phi_{\Omega p}}{\partial v_s}\frac{|\boldsymbol{J}|}{\|\nabla\Phi_{\Omega p}\|}\mathrm{d}\Gamma_p
\end{aligned} \tag{29}$$

式中, $\hat{\delta}$为 Heaviside 函数的法向导数, 称为 Dirac delta 函数, 它能将区域积分转换为边界积分[36], 关于$\partial\Phi_{\Omega p}/\partial v_s$和$\nabla\Phi_{\Omega p}$的计算方式见文献 [28].

3 典型算例

现使用新型设计框架对典型薄壳结构 (壳中面为球面的一部分) 进行拓扑优化设计, 并研究壳面曲率对优化结果拓扑构型的影响. 材料的弹性模量和泊松比分别取 2.0×10^{11} Pa 和 0.3, 每个 CBS 孔洞使用 22 个设计变量, 体积上限$V_{\lim}$设为初始体积的 40%, 优化算法采用移动渐近线优化算法 (method of moving asymptotes, MMA)[37].

薄壳结构几何模型和边界条件如图 5 所示, 壳面顶点受 40 kN 的集中载荷, 4 个角点被固定, 顶点相对角点的高度为 1.2 m, 壳厚为 0.05 m. 对于此对

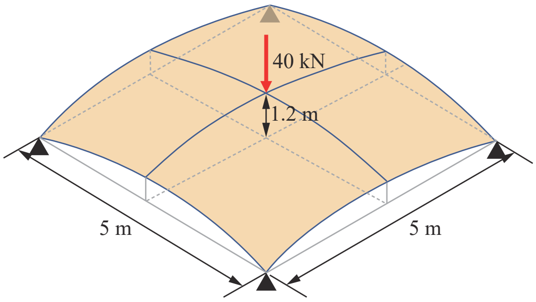


图 5　受集中垂直载荷的薄壳结构

Fig. 5　Thin shell subjected to a vertical load

称问题, 本文仅将薄壳结构的 1/4 作为优化对象.

对壳面的参数域 (即图 4 中的设计区域或计算域 D_p) 采用 32 × 32 的有限胞元网格划分, 网格中点即为计算拓扑导数的采样点, 拓扑导数阈值 $\overline{D_T}$ 和影响区域 I_i 分别设为 3% 和 0.25. 图 6(a) 展示了 ABM 在参数域的实施过程, 图 6(b) 为由参数域映射到物理域的壳面拓扑演化过程, 优化过程中共引入 10 个孔洞, 开孔位置合理且孔洞融合/分离自然, 设计变量共 220 个. 图 7 给出了设计结果的位移云图. 目标函数和约束函数的迭代收敛曲线如图 8 所示,

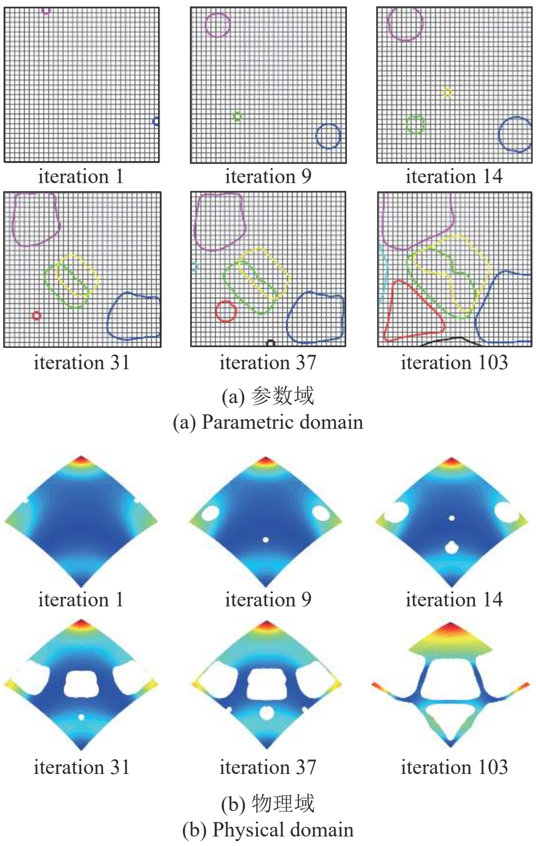


图 6　薄壳结构拓扑优化过程

Fig. 6　Topological evolution of the thin shell

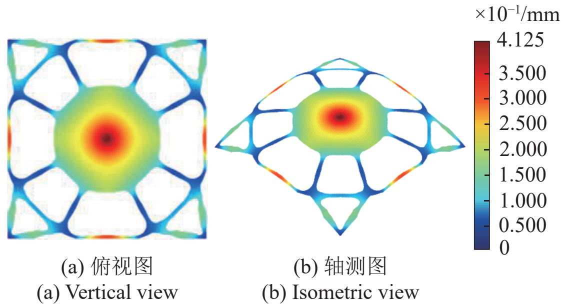


图 7　设计结果的位移云图

Fig. 7　Displacement contours of the design result

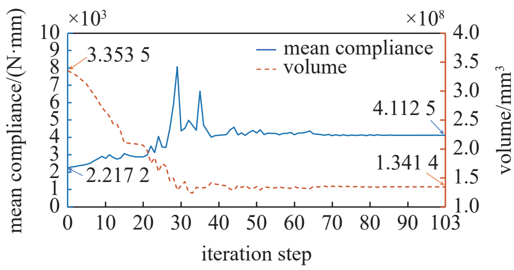


图 8　柔顺度及体积的收敛曲线

Fig. 8　The convergent curves for compliance and volume

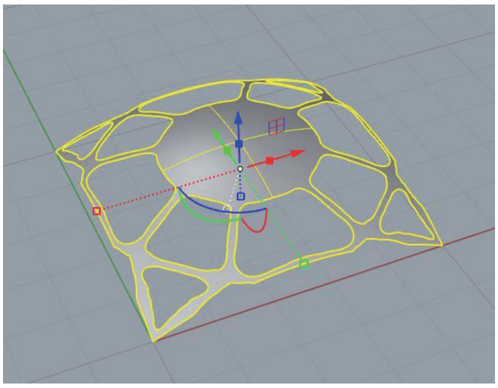
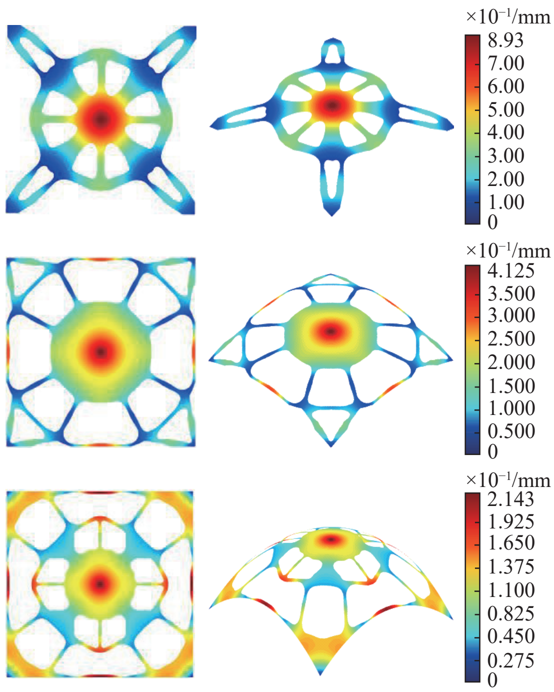


图 9　优化结果的 CAD 模型

Fig. 9　CAD model of the optimized result

优化结果的体积严格满足约束. 图 9 为优化结果的 CAD 模型, 其可借助 CBS 参数形式 (14) 和 NURBS 的映射操作在 CAD 系统中生成.

由于薄壳结构的刚度对壳面曲率的变化非常敏感, 因而不同曲率下的最优拓扑构型可能不同. 为验证这一猜想, 并反映薄壳曲面曲率对拓扑优化结果的影响, 下面将图 5 壳面的控制点高度坐标值分别缩小 2 倍和扩大 2 倍, 并采用本文所提设计框架开展拓扑优化设计. 最终优化结果如图 10 所示, 薄壳结构的曲面曲率自上而下依次增大, 设计结果的拓扑构型有着较大的差异.



(a) 俯视图　　　　(b) 轴测图
(a) Vertical view　　(b) Isometric view

图 10　不同壳面曲率下的拓扑优化结果对比图 (由上至下曲率逐步增大)

Fig. 10　Comparison of topology optimization design results for different shell curvatures (the curvature gradually increases from top to bottom)

4　结 论

本文提出了一种新型的薄壳结构拓扑优化设计框架, 该框架采用 IGA 保证了薄壳结构分析模型的精确性, 并能将三维空间中的薄壳结构优化问题转化到简单二维参数域中进行求解; 采用 ABM 不仅便于在被孔洞修剪的参数域上开展孔洞融合/分离操作和高精度的固定网格分析计算, 还可消除优化结果的初始布局依赖性. 数值算例表明, 所提设计框架使用少量变量就能得到具有清晰光滑边界且便于导入到 CAD 系统的优化结果. 进一步的研究将在图 10 测试结果的基础上, 通过把壳面控制点增添为设计变量, 开展薄壳结构的曲面形状和拓扑构型的协同优化设计, 从而尽可能提升其力学性能.

参 考 文 献

1 张卫红, 周涵, 李韶英等. 航天高性能薄壁构件的材料–结构一体化设计. 航空学报, 2022, 出版中 (Zhang Weihong, Zhou Han, Li Shaoying, et al. Material-structure integrated design for high-performance aerospace thin-walled component. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, in press (in Chinese))

2 杨利鑫, 何东泽, 陈强等. 高温环境下大尺度薄壁结构的电性能优化设计. 宇航学报, 2021, 42(9): 1099-1107 (Yang Lixin, He Dongze, Chen Qiang, et al. Electrical performance optimization design of large-scale thin-wall structures in thermal environment. *Journal of Astronautics*, 2021, 42(9): 1099-1107 (in Chinese))

3 王博, 周子童, 周演等. 薄壁结构多层级并发加筋拓扑优化研究. 计算力学学报, 2021, 38(4): 487-497 (Wang Bo, Zhou Zitong, Zhou Yan, et al. Concurrent topology optimization hierarchical stiffened thin-walled structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, 38(4): 487-497 (in Chinese))

4 Träff EA, Sigmund O, Aage N. Topology optimization of ultra high resolution shell structures. *Thin-Walled Structures*, 2021, 160: 107349

5 Jiang BS, Zhang JY, Ohsaki M. Shape optimization of free-form shell structures combining static and dynamic behaviors. *Structures*, 2021, 29: 1791-1807

6 Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224

7 Bendsøe MP, Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer Verlag, 2003: 9-24

8 Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 1993, 49(5): 885-896

9 隋允康, 叶红玲. 连续体结构拓扑优化的 ICM 方法. 北京: 科学出版社, 2013 (Sui Yunkang, Ye Hongling. ICM Method for Topology Optimization of Continuum Structures. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))

10 Wang MY, Wang XM, Guo DM. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(1-2): 227-246

11 Maute K, Ramm E. Adaptive topology optimization of shell structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1997, 35: 1767-1773

12 Ansola R, Canales J, Tarrago JA, et al. On simultaneous shape and material layout optimization of shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24(3): 175-184

13 粟华, 陈伟俊, 龚春林等. 环向肋增稳的薄壁圆筒结构定向拓扑优化方法. 宇航学报, 2022, 43(3): 374-382 (Su Hua, Chen Weijun, Gong Chunlin, et al. Oriented topology optimization of thin-walled structure with circumferential rib enhancement of stability. *Journal of Astronautics*, 2022, 43(3): 374-382 (in Chinese))

14 Hassani B, Tavakkoli SM, Ghasemnejad H. Simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48: 221-233

15 牟佳信, 邢彬, 郭梅等. 考虑热、弹、流耦合的航空发动机齿轮箱壳体拓扑优化分析. 机械传动, 2022, 46(2): 127-134 (Mu Jiaxin, Xing Bin, Guo Mei, et al. Topology optimization analysis of aero-engine gearbox housing considering the coupling of thermal elastohydrodynamic lubrication. *Journal of Mechanical Transmission*, 2022, 46(2): 127-134 (in Chinese))

16 朱润, 隋允康. 基于 ICM 方法的多工况位移约束下板壳结构拓扑优化设计. 固体力学学报, 2012, 33(1): 81-90 (Zhu Run, Sui Yunkang. Topological optimization design of plate-shell structure under multi-condition displacement constraints based on ICM method. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2012, 33(1): 81-90 (in Chinese))

17 Huo WD, Liu C, Du ZL, et al. Topology optimization on complex surfaces based on the moving morphable component method and computational conformal mapping. *Journal of Applied Mechanics*, 2022, 89(5): 051008
18 Xu XQ, Gu XD, Chen SK. Shape and topology optimization of conformal thermal control structures on free-form surfaces: A dimension reduction level set method (DR-LSM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 398: 115183
19 Ho-Nguyen-Tan T, Kim HG. An efficient method for shape and topology optimization of shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65: 119
20 Ho-Nguyen-Tan T, Kim HG. Level set-based topology optimization for compliance and stress minimization of shell structures using trimmed quadrilateral shell meshes. *Computers and Structures*, 2022, 259: 106695
21 Meng XC, Xiong YL, Xie YM, et al. Shape-thickness-topology coupled optimization of free-form shells. *Automation in Construction*, 2022, 142: 104476
22 Jiang XD, Zhang WS, Liu C, et al. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 113: 613-639
23 Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39-41): 4135-4195
24 Seo YD, Kim HJ, Youn SK. Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(49-52): 3270-3296
25 Kang P, Youn SK. Isogeometric topology optimization of shell structures using trimmed NURBS surfaces. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2016, 120: 18-40
26 Zhang WS, Li DD, Kang P, et al. Explicit topology optimization using IGA-based moving morphable void (MMV) approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 360: 112685
27 Zhang WS, Jiang S, Liu C, et al. Stress-related topology optimization of shell structures using IGA/TSA-based moving morphable void (MMV) approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 366: 113036
28 蔡守宇, 张卫红, 高彤等. 基于固定网格和拓扑导数的结构拓扑优化自适应泡泡法. 力学学报, 2019, 51(4): 1235-1244 (Cai Shouyu, Zhang Weihong, Gao Tong, et al. Adaptive bubble method using fixed mesh and topological derivative for structural topology optimization. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(4): 1235-1244 (in Chinese))
29 Zhang WH, Zhao LY, Gao T, et al. Topology optimization with closed B-splines and Boolean operations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 315: 652-670
30 Parvizian J, Düster A, Rank E. Finite cell method. *Computational Mechanics*, 2007, 41(1): 121-133
31 Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. 2nd Edition. New York: Springer Verleg, 1997: 117-139
32 Kiendl J, Bletzinger KU, Linhard J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(49-52): 3902-3914
33 Cirak F, Ortiz M, Schröder P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(12): 2039-2072
34 Nvotny AA, Sokolowski J. Topological Derivatives in Shape Optimization. Heidelberg: Springer-Verlag, 2013
35 Sokolowski J, Zochowski A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, 37(4): 1251-1272
36 Cai SY, Zhang WH, Zhu JH, et al. Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: A B-spline finite cell method combined with level set function. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 278(15): 361-387
37 Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373