

小样本数据下圆柱薄壳初始缺陷不确定性量化的极大熵方法

李建宇, 杨 坤, 王 博, 张丽丽

A MAXIMUM ENTROPY APPROACH FOR UNCERTAINTY QUANTIFICATION OF INITIAL GEOMETRIC IMPERFECTIONS OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS WITH LIMITED DATA

Li Jianyu, Yang Kun, Wang Bo, and Zhang Lili

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-556>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

随机参数系统不确定性量化的泛函观点与整体灵敏度分析

FUNCTIONAL PERSPECTIVE OF UNCERTAINTY QUANTIFICATION FOR STOCHASTIC PARAMETRIC SYSTEMS AND GLOBAL SENSITIVITY ANALYSIS

力学学报. 2021, 53(3): 837-854

含概率与区间混合不确定性的系统可靠性分析方法

A SYSTEM RELIABILITY ANALYSIS METHOD FOR STRUCTURES WITH PROBABILITY AND INTERVAL MIXED UNCERTAINTY

力学学报. 2017, 49(2): 456-466

后临界湍流区间内旋转薄壳结构振动演化与作用机制实测研究

EVOLUTION CHARACTERISTIC AND WORKING MECHANISM ANALYSIS OF ROTATING THIN-WALLED STRUCTURES IN POST-CRITICAL TURBULENT INTERVAL BASED ON FIELD MEASUREMENT

力学学报. 2019, 51(1): 111-123

风速不确定性对风力机气动力影响量化研究

QUANTITATION STUDY OF INFLUENCE OF WIND SPEED UNCERTAINTY ON AERODYNAMIC FORCES OF WIND TURBINE

力学学报. 2020, 52(1): 51-59

基于多变量小样本的渗流代理模型及产量预测方法

SEEPAGE PROXY MODEL AND PRODUCTION FORECAST METHOD BASED ON MULTIVARIATE AND SMALL SAMPLE

力学学报. 2021, 53(8): 2345-2354

基于最大熵方法的水下航行体结构动力响应概率建模

PROBABILISTIC MODELLING OF DYNAMIC RESPONSE OF UNDERWATER VEHICLE STRUCTURE VIA MAXIMUM ENTROPY METHOD

力学学报. 2018, 50(1): 114-123



关注微信公众号，获得更多资讯信息

小样本数据下圆柱薄壳初始缺陷不确定性量化的极大熵方法¹⁾

李建宇^{*,†,2)} 杨 坤^{*} 王 博[†] 张丽丽^{**}

^{*} (天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

[†] (大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁大连 116023)

^{**} (天津职业技术师范大学理学院, 天津 300222)

摘要 具有不确定性特征的初始缺陷被认为是导致薄壳结构实际临界载荷值与理论解不相符并呈现分散特征的主要原因. 对实际薄壳结构初始缺陷的建模至少需要考虑两个方面的不确定性量化, 一是对缺陷分布形式和幅值等固有随机性的量化, 二是对小样本量和不准确测量所导致缺陷统计量的不确定性的量化. 本文在利用随机场的 Karhunen-Loeve 展开法对薄壳初始几何缺陷建模的基础上, 提出一种基于极大熵原理的缺陷建模方法. 首先, 采用极大熵分布来估计 Karhunen-Loeve 随机变量的概率密度函数, 以适应不能使用高斯随机场进行缺陷随机场建模的情况. 随后, 通过将经典的等式约束极大熵模型扩展为区间约束极大熵模型, 实现对实际工程中仅能获得少量薄壳结构几何缺陷样本数据所导致的认知不确定性的量化. 最后, 将所提方法用于对国际缺陷数据库的 A-Shell 进行缺陷建模和临界载荷预测. 研究表明, 所提基于区间约束极大熵原理的随机场建模方法在能够有效表征实测数据高阶矩信息的同时, 还具备量化小样本数据导致的认知不确定性的能力, 并且高斯随机场模型和基于等式约束极大熵原理的随机场模型是本文所提建模方法的两种特殊情况.

关键词 圆柱薄壳, 初始几何缺陷, Karhunen-Loeve 展开, 极大熵原理, 小样本数据

中图分类号: O302 文献标识码: A doi: [10.6052/0459-1879-22-556](https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-556)

A MAXIMUM ENTROPY APPROACH FOR UNCERTAINTY QUANTIFICATION OF INITIAL GEOMETRIC IMPERFECTIONS OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS WITH LIMITED DATA¹⁾

Li Jianyu^{*,†,2)} Yang Kun^{*} Wang Bo[†] Zhang Lili^{**}

^{*} (College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

[†] (State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, Liaoning, China)

^{**} (School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

Abstract Initial imperfections with uncertainty characteristics are well-known recognized as the main reason why the actual critical load values of thin-shell structures do not match the theoretical solutions and exhibit dispersion characteristics. In order to model the initial imperfections of actual thin-shell structures more appropriately, several

2022-11-24 收稿, 2023-03-07 录用, 2023-03-08 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11772228), 工业装备结构分析国家重点实验室开放课题 (GZ21103) 和天津市教委科研计划 (2022ZD013) 资助项目.

2) 通讯作者: 李建宇, 副教授, 主要研究方向为计算力学. E-mail: lijianyu@tust.edu.cn

引用格式: 李建宇, 杨坤, 王博, 张丽丽. 小样本数据下圆柱薄壳初始缺陷不确定性量化的极大熵方法. 力学学报, 2023, 55(4): 1028-1038

Li Jianyu, Yang Kun, Wang Bo, Zhang Lili. A maximum entropy approach for uncertainty quantification of initial geometric imperfections of thin-walled cylindrical shells with limited data. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(4): 1028-1038

sources of uncertainty quantification should be handled carefully, such as the quantification of the inherent randomness in the form and magnitude of the imperfection distribution, and the quantification of the uncertainty in the statistics due to small sample size and inaccurate measurements in practice. In this paper, a novel modeling approach for initial geometric imperfections of thin-walled shells is proposed based on the principle of maximum entropy and the Karhunen-Loeve expansion method of random fields. Firstly, the maximum entropy approach is used to estimate the probability density function of the Karhunen-Loeve random variables, which is aimed to model the geometric imperfections as random fields without the assumption of Gaussian and homogeneity. Secondly, the quantification of the epistemic uncertainty caused by the availability of only a small size of data on geometric imperfections of thin-walled shells is achieved by extending the classical equationally constrained maximum entropy model to an interval constrained maximum entropy model. Finally, the proposed method is used for imperfection modeling and critical load prediction for A-Shell of the international imperfection databank. It is shown that the proposed random field modeling approach based on the interval constrained maximum entropy principle not only has the ability to quantify the epistemic uncertainty due to small size of data, but also effectively characterizes the higher order moment information of the measured data. Furthermore, it is shown that the Gaussian random field model and the random field model based on the equation constrained maximum entropy principle are the two special cases of the proposed modeling approach in this paper.

Key words thin-walled cylindrical shell, initial geometric imperfection, Karhunen-Loeve expansion, maximum entropy principle, limited data

引言

薄壳类结构在实际生产制造和运维过程中,不可避免地会产生各类缺陷.而根据薄壳结构稳定性的缺陷敏感性理论^[1-5],即使是很小的缺陷变化,也可能会导致薄壳结构临界屈曲载荷很大的改变.因此,仅通过对某种特定缺陷形式的分析并不能实现对实际薄壳结构承载能力的完整预测.目前被广泛使用的特征值屈曲模态法^[6]、单点窝陷法^[7]、最优多点窝陷法^[8]等,其基本出发点是从最不利缺陷的角度来估计薄壳结构极限承载能力的一个下限值.然而,由于所设定的最不利缺陷在实际应用中出现的可能性较低,导致其给出的设计往往偏保守^[9].另一方面,薄壳缺陷成因的复杂性和不确定性导致无法通过遍历所有缺陷形式来估算实际薄壳的极限承载能力.针对上述问题,一种可行且有意义的解决途径是采用概率统计的手段来研究实际薄壳结构极限承载力与初始缺陷之间的关系^[10-12].

从概率统计的角度研究工程薄壳结构的初始缺陷敏感性,其基本思路是将具有不确定性特征的薄壳初始缺陷表征为概率随机模型,然后通过随机分析方法将初始缺陷的不确定性传播至薄壳结构的临界载荷,并最终给出基于可靠度的极限承载能力预测结果^[13].其关键步骤包括薄壳结构初始缺陷样本数据的获取、初始缺陷随机统计模型的构建、含随机初始缺陷薄壳结构的随机稳定性分析.薄壳结构

初始缺陷样本数据的测量是获取薄壳结构初始缺陷统计特征的基础,具有重要意义和价值.国内外多个研究单位都开展了薄壳结构初始缺陷数据库建设方面的工作,例如由 Caltech、TU-Delft 等大学联合构建的国际缺陷数据库^[14]、德国航空航天中心 (DLR) 构建的复合材料薄壳筒缺陷数据^[15]、大连理工大学构建的圆柱壳缺陷数据^[16]等.然而,由于制造和试验成本的限制,能够获得的薄壳初始缺陷样本数据往往是有限的,例如国际缺陷数据库中 A-Shell 试验数据实际上只包含了 7 个实测样本数据.样本数据的有限性决定了薄壳结构初始缺陷随机统计模型的构建属于小样本问题所研究的范畴.在早期利用概率统计方法研究薄壳结构稳定性的工作中,如 Arbocz 等^[17]研究的双傅里叶级数随机模型, Schenk 等^[18]给出的高斯随机场模型, Criag 等^[19]研究的随机场 Karhunen-Loeve 模型等工作,虽然引入了随机变量或随机场来表征初始缺陷的不确定性,但均没有考虑样本数据不足对预测结果的影响.文献^[20]表明,基于实测缺陷数据的临界屈曲载荷估计值与样本量之间具有相关性.近期,关于有限样本条件下薄壁圆柱壳初始缺陷随机场模型的研究受到关注^[21-23],如文献^[23]提出将随机场模型中的相关长度等特征参数表征为模糊变量,从而构造模糊随机场模型来表征样本数据不足所导致的不确定性.该模型同时包含了概率和非概率两类变量,在不确定性传播分析中需要求解一个双层抽样问题.此外,已有的初始缺

陷随机场模型^[21-25]多引入了高斯性和平稳性等局限性很强的假设条件,但对于实际测量数据的统计检验可能并不支持这些假设^[26].因此,在建模过程中放松对初始缺陷随机场的假设条件,构建更符合实际的缺陷随机场模型,在理论和实用方面均有价值.

针对上述研究现状,本文从有限样本数据条件下随机场重构的角度^[27-29],提出一种基于区间约束极大熵原理的圆柱薄壳初始缺陷随机场建模方法.所提方法的特点在于,一是利用 Karhunen-Loeve 展开法和极大熵原理来构建随机场模型,从而避免了对初始缺陷随机场的平稳性和高斯性假设;二是通过在极大熵原理中引入依赖于样本量的区间约束,使得所构建的随机场模型能够考虑样本数据量不足所导致的认知不确定性;三是将初始缺陷的固有随机性和样本量不足导致的认知不确定性统一利用极大熵原理进行量化,从而避免了不确定性传播分析中对两类不确定性进行分层抽样的过程.

1 圆柱薄壳初始缺陷的随机场模型

实际应用中,轴压圆柱薄壳可能存在多种缺陷形式,如几何形貌偏差、材料属性和壁厚的空间随机性以及轴压载荷的偏心等^[3].其中几何缺陷被认为是轴压圆柱薄壳临界载荷最为敏感的缺陷形式,也是被研究最为广泛的缺陷形式.为此,下面以几何缺陷为例阐述缺陷的随机场建模方法.

圆柱薄壳结构的初始几何缺陷表现为实际形状与理想形状之间的形貌偏差,具体表现为圆柱壳壁的非直度、圆柱截面的非圆度、局部表面的凹陷等多种形式.将图 1 所示高 H , 半径 R , 壁厚 t 的圆柱薄壳沿其某一母线展开后,令 $z = (x, y)$ 为圆柱壳壁面各点坐标,其中 x 为环向坐标值 ($0 \leq x \leq 2\pi R$), y 为轴向坐标值 ($0 \leq y \leq H$).初始几何缺陷可以用圆柱

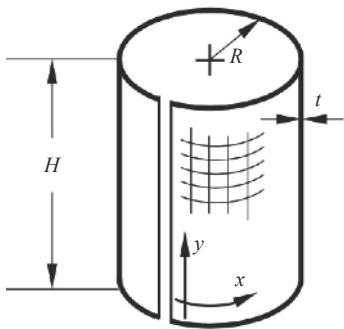


图 1 圆柱薄壳结构示意图

Fig. 1 Illustration of thin-walled cylindrical shell

实际半径与理想半径之间的偏差来表征,即

$$w(z) = \tilde{R}(z) - R \quad (1)$$

式中 $\tilde{R}(z)$ 表示圆柱表面坐标为 z 的点到截面圆心的距离.圆柱薄壳结构初始几何缺陷的形状、位置和幅值大小等特征均具有随机性,因此在数学上 $w(z)$ 是一个随机场.假设该偏差量为二阶连续随机场,即 $w(z, \omega) \in L^2(\Omega, F, P)$, 其中 $L^2(\Omega, F, P)$ 表示内积定义为二阶矩的范数有限的泛函空间, (Ω, F, P) 为概率三元组, $\omega \in \Omega$ 为样本, F 表示事件域, P 为概率测度.

首先,假设已经对 M 个圆柱薄壳的初始几何缺陷进行了独立观测,并令 $w_1, w_2, \dots, w_M$ 表示对圆柱薄壳径向缺陷 $w(z, \omega) = [w(z_1, \omega), w(z_2, \omega), \dots, w(z_N, \omega)]$ 的 M 次独立观测结果,其中 N 表示每个样本筒上的观测点数, $[z_1, z_2, \dots, z_N]$ 表示 N 个观测点的位置.基于观测数据,可获得观测点集上缺陷随机场的均值和协方差矩阵的统计结果,即

$$\bar{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_i \quad (2)$$

$$\bar{C}_w = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (w_i - \bar{\mu})^T (w_i - \bar{\mu}) \quad (3)$$

其中 $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^N$ 为缺陷随机场测量样本的统计均值, $\bar{C}_w \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为样本统计协方差矩阵.

其次,将统计协方差矩阵 $\bar{C}_w$ 作为再生核,并利用 Karhunen-Loeve 展开法表征缺陷随机场,得

$$w(\omega) = \bar{\mu} + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \xi^{(i)}(\omega) \phi_i \quad (4)$$

其中 $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ 和 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 分别是统计协方差矩阵 $\bar{C}_w$ 的特征值和特征向量,即满足

$$\bar{C}_w \phi_i = \lambda_i \phi_i \quad (5)$$

式 (4) 中的 $\xi^{(i)}(\omega) (i = 1, 2, \dots, N)$ 称为 Karhunen-Loeve 随机变量,针对圆柱薄壳几何缺陷的 M 次测量数据,它有 M 个实现样本,第 j 个样本为

$$\xi_j^{(i)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \langle w_j - \bar{\mu}, \phi_i \rangle_{l_2} \quad (6)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{l_2}$ 表示点积运算.通过对式 (4) 进行截断,可以得到缺陷随机场的降阶表征

$$w(\omega) \approx \bar{\mu} + \sum_{i=1}^q \sqrt{\lambda_i} \xi^{(i)}(\omega) \phi_i \quad (7)$$

其中截断项数 $q \leq N$, 并使得 $\sum_{i=1}^q \lambda_i / \sum_{i=1}^N \lambda_i$ 充分接近 1.随机向量 $\xi = [\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(q)}]$ 满足如下两个条件

$$E[\xi^{(m)}] = 0, E[\xi^{(m)} \xi^{(n)}] = \delta_{mn} (m, n = 1, 2, \dots, q) \quad (8)$$

其中 $E[\cdot]$ 表示取均值运算. 随机向量 ξ 的协方差矩阵为 $q \times q$ 单位矩阵, 即 $I_{q \times q}$. 满足式 (8) 的随机向量并不唯一, 例如正态分布或双峰分布的随机向量. 若初始缺陷随机场 $w(z, \omega)$ 是高斯随机场, 则随机向量 ξ 是一组均值为 0、方差为 1 的独立同分布高斯随机变量, 否则它仅是一组均值为零、协方差矩阵为单位矩阵的互不相关的随机变量, 其概率密度函数是未知的. 研究如何构建 Karhunen-Loeve 随机向量 ξ 的概率分布模型, 是对圆柱薄壳初始几何缺陷进行随机场建模的关键.

2 Karhunen-Loeve 随机变量概率分布的极大熵估计

针对圆柱薄壳初始几何缺陷的 M 次独立观测结果, 可由式 (6) 获得随机向量 ξ 的 M 个样本, 进而可以采用各类基于样本数据的概率密度函数估计方法对随机向量 ξ 进行统计建模, 例如核密度估计方法、混沌多项式展开估计方法、极大熵分布法等^[30]. 这里研究利用极大熵原理估计随机向量 ξ 的概率密度函数. 为了简化计算, 假设随机向量 ξ 的各分量之间是相互独立的, 即所估计的概率密度函数为随机向量 ξ 的边缘分布. 利用极大熵原理进行概率密度函数估计的基本思想是, 在利用已知信息对随机变量的概率密度函数进行推断时, 使得熵值取最大的概率密度函数是最合理的. 极大熵原理给出的概率分布被认为是已知信息下的最可几分布. 对于随机变量 $\xi^{(i)}, i = 1, 2, \dots, q$, 其概率密度函数 $p(\xi^{(i)})$ 的极大熵估计常表达为如下凸优化问题

$$\begin{aligned} \max H(p) &= -E[\ln(p(\xi^{(i)}))] \\ \text{s.t. } E[(\xi^{(i)})^r] &= \beta_r^{(i)}, r = 0, 1, \dots, k \end{aligned} \quad (9)$$

等式约束的右端项 $\beta_r^{(i)}$ 为随机变量 $\xi^{(i)}$ 的已知第 r 阶原点样本矩信息, 即

$$\beta_r^{(i)} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\xi_j^{(i)})^r \quad (10)$$

模型 (9) 中的约束是已知信息的表征, 约束的个数一般表征了已知信息的多少. 随着已知信息的增加, 约束的个数增多, 所估计的概率密度函数的熵值也越小, 表示其所度量的不确定性也越小. 例如, 在没有给定任何信息的条件下, 极大熵模型所估计的概率分布为均匀分布, 即认为样本空间中每个事件发生的可能性是相同的. 如果进一步给定了一阶矩

和二阶矩信息, 则极大熵模型所估计的概率分布为高斯分布. 如果 Karhunen-Loeve 随机变量 ξ 不具备高斯性, 利用极大熵模型估计其概率密度函数时, 需要给定三阶矩以上的信息.

进一步讨论模型 (9) 中约束的右端项. 从统计学的角度, 样本矩 $\beta_r^{(i)}$ 是依赖于样本数据的一个随机变量, 其分布特征与样本量相关. 若样本量足够大, 即大样本问题, 样本矩的分散性较低, 由其所估计的极大熵分布与总体分布的偏差较小. 若样本量很少, 即小样本问题 (样本量小于 30), 样本矩的分散性大, 且与总体矩的偏差大, 导致由其所估计的极大熵分布与真实分布偏差较大, 而且对样本数据非常敏感. 为了降低小样本条件下统计矩的不确定性对概率分布估计结果的影响, 本文采用样本数据的区间类统计量替代样本矩, 研究基于区间约束极大熵原理的概率分布估计方法, 即

$$\begin{aligned} \max H(p) &:= -E[\ln(p(\xi^{(i)}))] \\ \text{s.t. } \left\{ \begin{aligned} E[(\xi^{(i)})^0] &= 1 \\ E[(\xi^{(i)})^1] &= 0 \\ E[(\xi^{(i)})^2] &= 1 \\ E[(\xi^{(i)})^r] &\in [L_r, U_r], r = 3, 4, \dots, k \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $[L_r, U_r]$ 表示第 r 阶原点矩的区间估计. 相较于模型 (9) 中的等式约束, 区间约束下所估计的概率分布的熵值会增大, 即其所度量的不确定性也越大. 考虑如下两种特殊情况.

(1) 如果区间约束足够大以至于成为无效约束, 则优化模型 (11) 退化到只包含一阶矩和二阶矩信息, 其所估计的概率分布为正态分布 $\xi^{(i)} \sim N(0, 1)$, 最大熵值为 $\lg(\sqrt{2\pi e})$, 如文献 [19]. 由此所构建的缺陷随机场模型 (式 (7)) 既包含了缺陷的固有随机属性, 又包含了信息缺失导致的最大认知不确定性.

(2) 如果区间约束足够小以至于成为等式约束, 则优化模型 (11) 所估计的概率分布同时满足 $1 \sim r$ 阶样本矩信息, 如文献 [26], 熵值达到最小. 该模型虽然精确满足了样本矩信息, 但所构建的缺陷随机场模型没有包含样本有限所导致的认知不确定性, 其所估计的概率分布存在过拟合的问题, 与总体分布的偏差较大.

小样本数据的特点是数据中既包含了关于总体的有效信息, 也存在由于数据有限导致的认知不确定性. 将高阶矩信息以区间约束的形式引入到极大

熵模型中,一方面达到了利用样本数据中所包含高阶矩信息的目的,另一方面又通过区间约束缓解了有限样本数据导致的过拟合问题,并将样本有限所导致认知不确定性引入到所构建的随机模型中。

如何确定区间约束的上下限是必须要考虑的问题。可以遵循的一个原则是,区间的大小依赖于样本数据的数量,即随着样本量的增加,该区间的大小应趋近于零。实际应用中可以按照下式确定区间的上下限

$$\left. \begin{aligned} L_r &= \beta_r^{(i)} - \frac{\delta}{\sqrt{M}} \\ U_r &= \beta_r^{(i)} + \frac{\delta}{\sqrt{M}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 $\delta > 0$ 为设定的控制参数,可以采用交叉验证^[31]等手段确定具体的取值。

下面以一个简单的例子说明区间约束极大熵分布的特征。假设样本总体的概率分布已知,如式(13)。从总体中随机抽样生成样本数据,针对不同样本量的样本数据利用极大熵原理估计其概率分布,其中控制参数 $\delta = 6$

$$p(\xi) = 0.238 1e^{-1.114 1\xi + 0.743 7\xi^2 + 0.661 3\xi^3 - 0.434 9\xi^4} \quad (13)$$

图2所示为所估计概率分布的熵值,可以看出

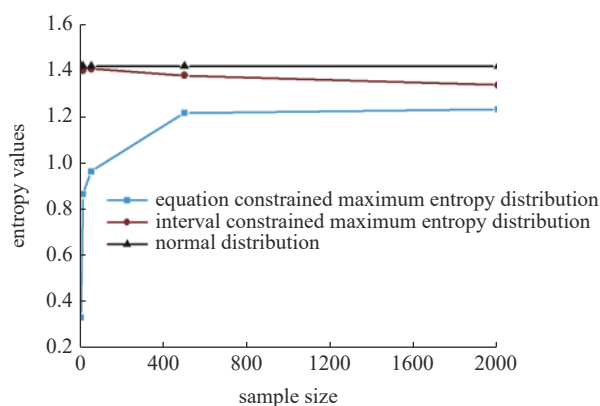


图2 区间约束极大熵分布与等式约束极大熵分布的熵值比较

Fig. 2 Comparison of entropy values between interval constrained maximum entropy distribution and equation constrained maximum entropy distribution

区间约束极大熵分布的熵值总是大于等式约束极大熵分布,但又总是小于正态分布的熵值,这说明区间约束极大熵分布所度量的不确定性要比等式约束的大,同时它也包含了较正态分布更多的信息。当样本量很小时(如5个样本),区间约束变为无效约束,模型退化为正态分布;随着样本量的增加,区间约束不断缩小,熵值减小,表示样本数据所提供的信息在增多,不确定性在减小。进一步考察极大熵分布的熵值

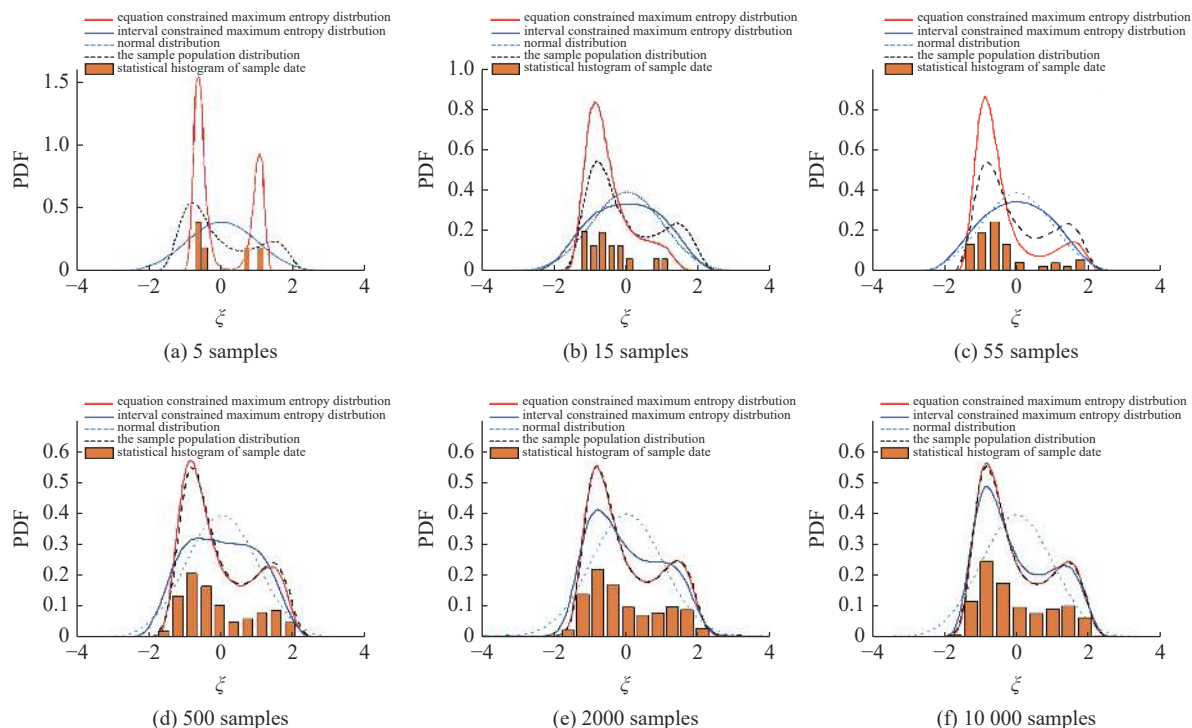


图3 不同样本量条件下区间约束极大熵分布与等式约束极大熵分布的比较

Fig. 3 Comparison of the interval constrained maximum entropy distribution and equation constrained maximum entropy distribution estimated from sample data with different size

随着样本量的变化情况可知, 区间约束极大熵分布的熵值对样本量的敏感性要小于等式约束极大熵分布, 这说明区间约束极大熵模型对于小样本问题的概率分布估计具有较高的鲁棒性。

图 3 展示了不同样本量下所估计概率密度函数的图像。由图可见, 等式约束极大熵原理所估计的概率密度函数对于样本数据非常敏感, 特别是对小样本量问题, 给出的概率密度函数与样本的总体分布有较大偏差。而区间约束极大熵原理所估计的概率密度函数对于样本数据的敏感性要小很多, 对于小样本量问题, 由于区间约束较大, 包含了信息不足导致的认知不确定性, 其所给出的概率密度函数接近正态分布。区间约束极大熵分布的主要优势体现在对小样本问题的估计, 而等式约束极大熵分布在大样本问题中性能更佳。

3 含缺陷薄壳结构的随机屈曲分析

建立了圆柱薄壳初始几何缺陷的随机场模型后, 就可以在薄壳结构稳定性分析模型的基础上进行随机屈曲载荷分析, 从而获得屈曲载荷的统计信息或概率分布。可用于随机屈曲载荷分析的方法包括蒙特卡洛法 (Monte Carlo, MC)、矩方法和混沌多项式展开法等。其中蒙特卡洛法虽然存在计算成本

高的不足, 但是由于其在应用中几乎没有限制条件, 而且算法极其简便, 成为实际应用中最被广泛使用的一种随机分析方法。蒙特卡洛法的一般过程是, 抽取一定量的样本, 随后计算样本点上的响应函数值, 并对响应函数的随机特性进行统计估计。基于该思路, 本文构建了如图 4 所示缺陷圆柱薄壳的随机屈曲载荷分析流程。

鉴于圆柱薄壳初始几何缺陷的随机场模型中的 KL 随机向量的概率分布为非标准分布, 其抽样方法可采用马尔科夫链蒙特卡洛方法 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC)^[30]。MCMC 抽样的主要思想是, 构造具有特定状态转移概率的马尔科夫链, 使其抽样点的平稳状态符合目标分布。MCMC 抽样法中的关键步骤是如何由当前状态产生新的状态。根据产生新状态的方式, MCMC 抽样又具体可以分为 Metropolis-Hasting 抽样、Gibbs 抽样、独立抽样和随机游走抽样等。本文采用 Metropolis-Hastings 法进行抽样, 其细节参见文献 [30]。

对样本缺陷薄壳进行屈曲分析进而获得其临界载荷的方法目前已经比较成熟, 例如弧长法、显式动力学方法等^[32]。显式动力学方法将结构的屈曲行为视为动力学中的“模式跳跃 (model jumping)”, 通过求解一个动力学问题来模拟结构的后屈曲行为。在冲击速度很低的情况下 (准静态), 显式动力学方

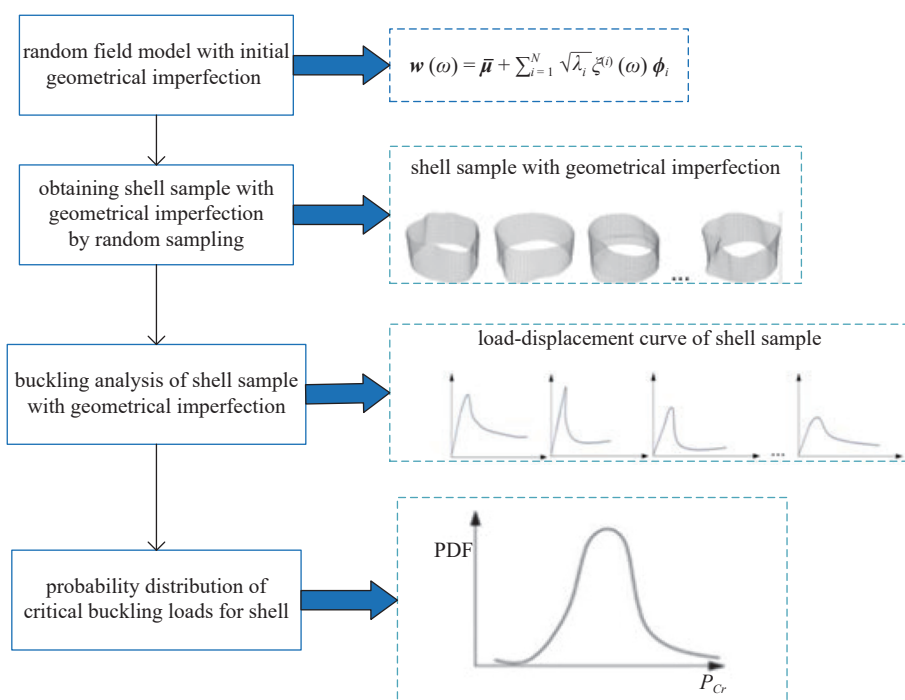


图 4 缺陷轴压圆柱薄壳结构随机屈曲分析流程图

Fig. 4 Flow chart of stochastic buckling analysis for axial compressive thin-walled cylindrical shell with geometrical imperfection

法能够给出后屈曲行为的近似解. 本文采用显式动力学方法进行轴压圆柱薄壳屈曲分析.

4 基于可靠度的折减因子估计

在薄壳结构稳定性研究中, 常使用折减因子 (knockdown factor, KDF) 来度量薄壳结构临界载荷的缺陷敏感性. 在对含缺陷轴压圆柱薄壳结构随机屈曲分析的基础上, 定义基于可靠度的折减因子, 具体过程如下所述.

令 P_{c0} 和 P_{cr} 分别表示理想圆柱薄壳和含缺陷圆柱薄壳的临界载荷, 定义归一化因子为 α_c , 即

$$\alpha_c = \frac{P_{cr}}{P_{c0}} \tag{14}$$

将圆柱薄壳初始缺陷表征为随机场模型后, 含缺陷圆柱薄壳的屈曲载荷实为一个随机变量, 因而式 (14) 定义了一个随机变量, 记为 A_C , 其概率分布函数为

$$F_{A_C}(\alpha_c) = \text{Prob}(A_C \leq \alpha_c) = \int_{-\infty}^{\alpha_c} p_{A_C}(x) dx \tag{15}$$

其中 $p_{A_C}(x)$ 为随机变量 A_C 的概率密度函数. 在随机屈曲分析的基础上, 对含缺陷圆柱薄壳屈曲载荷的样本进行统计估计, 可得 $p_{A_C}(x)$. 基于式 (15), 定义可靠度 $R(\alpha_0)$

$$R(\alpha_0) = \text{Prob}(A_C \geq \alpha_0) = 1 - F_{A_C}(\alpha_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\alpha_0} p_{A_C}(x) dx \tag{16}$$

其中 α_0 为可靠度标准, 例如取 $\alpha_0 = 0.99$. 基于式 (16), 可给出基于可靠度的 KDF 估算方法, 即将可靠度为 $R(\alpha_0)$ 的 α_0 的估计值定义为薄壳结构临界载荷的 KDF 值.

5 数值算例

为了验证本文所提方法对实际问题的有效性, 具体针对国际缺陷数据库^[14]中的 A-shell 问题进行缺陷不确定性建模. 如图 5 所示, 两端简支、轴向压缩作用下的圆柱薄壳结构, 表 1 给出了模型参数, 其尺寸和材料属性分别取样本筒的平均值. 采用显式动力学方法进行压曲分析, 单元类型选为 S4R 壳单元, 经计算结果的网格尺寸相关性分析, 确定网格尺寸为 4 mm, 即环向布置 160 个节点, 轴向布置 52 个节点. 缺陷数据库^[14]给出了 7 个薄壁圆筒壳的傅里

叶级数形式的样本缺陷数据, 图 6 绘制出了 7 个样本缺陷形式.

$$w(x,y) = t \sum_{i=0}^N A_{i0} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) + t \sum_{k=0}^N \sum_{l=1}^N \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cdot \left[A_{kl} \cos\left(\frac{ly}{R}\right) + B_{kl} \sin\left(\frac{ly}{R}\right) \right] \tag{17}$$

将这 7 个 A-shell 样本筒视为对同一批次生产的薄壁圆筒壳的 7 次独立观测, 按照式 (3) 计算其样本协方差矩阵, 并图形化显示为图 7. 由图可见, 协方差矩阵的数值不仅取决于两个节点的相对距离, 而且与节点的位置有关, 这表明初始几何缺陷不具备平稳随机场的特征.

以样本缺陷的协方差矩阵为再生核, 按照式 (4) 建立初始缺陷随机场的 Karhunen-Loeve 模型. 通过计算, 前 6 阶特征值的累计方差贡献率达到 99%. 对 Karhunen-Loeve 展开进行截取, 得到 A-Shell 的初始几何缺陷随机场模型为

$$w(\omega) \approx \bar{\mu} + \sum_{i=1}^6 \sqrt{\lambda_i} \xi^{(i)}(\omega) \phi_i \tag{18}$$

利用式 (6) 求得随机向量 ξ 的样本, 并利用极大熵方法估计其概率密度函数, 图 8 是所估计概率密度函数的图像. 作为比较, 图中同时绘制了正态分布、等式约束极大熵分布和样本数据统计直方图. 由图可见, 等式约束极大熵分布与样本数据拟合度

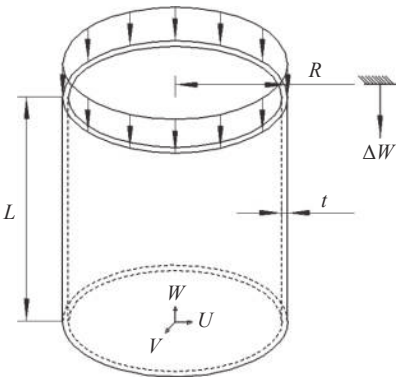


图 5 轴向压缩圆筒壳示意图
Fig. 5 Illustration of the axially compressed cylinder shell

表 1 模型参数

Table 1 Model parameters					
Radius	Height	Thickness	Young's modulus	Poisson's	Density
R/mm	H/mm	t/mm	E/MPa	ratio ν	$\rho/(\text{mg}\cdot\text{mm}^{-3})$
101.60	202.29	0.116 0	104 410	0.3	2

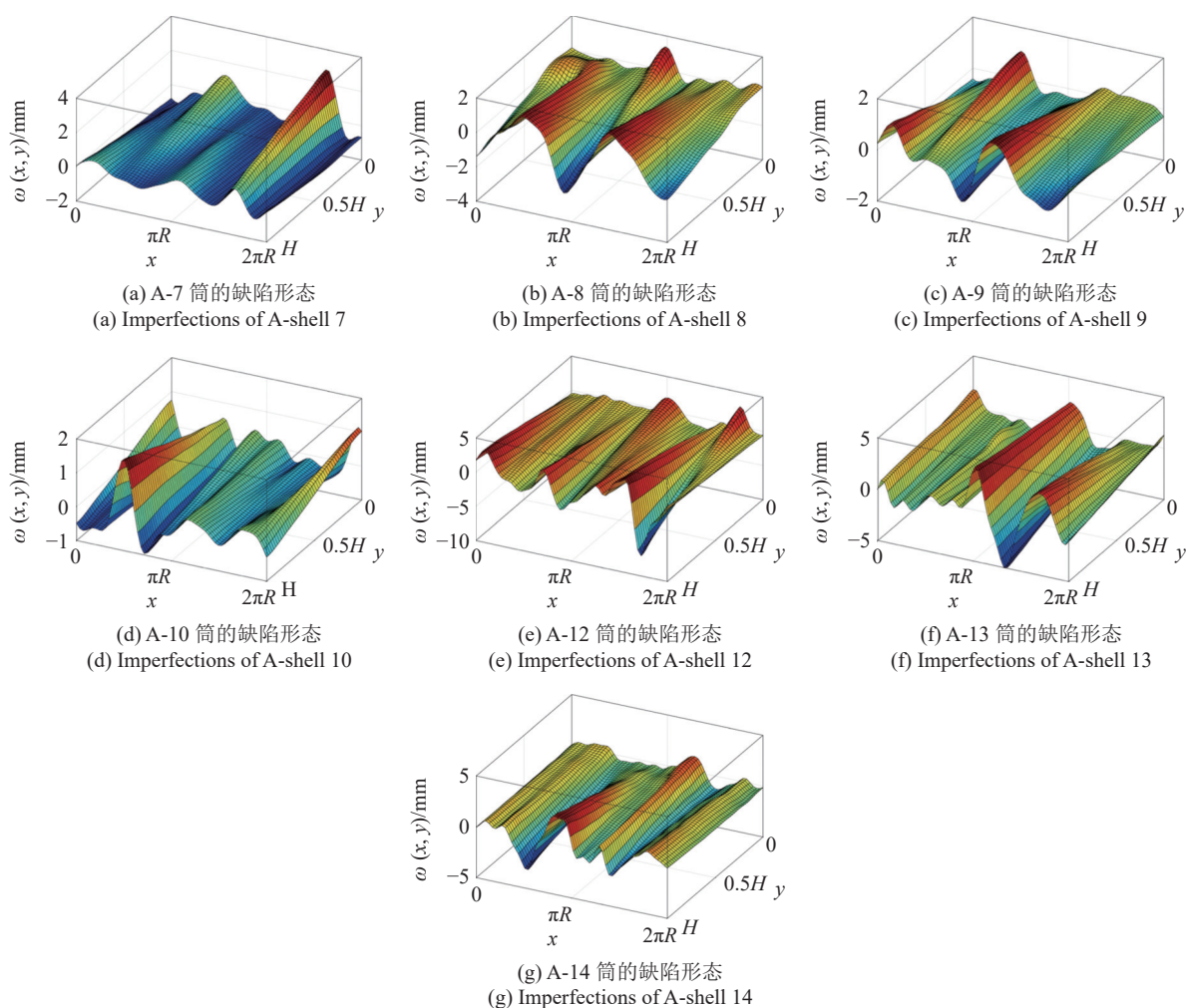


图 6 A-shell 样本缺陷示意图

Fig. 6 Initial geometrical imperfections of A-shell

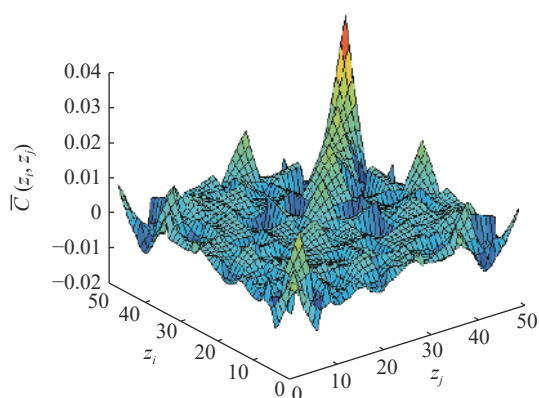


图 7 缺陷随机场的样本统计协方差矩阵

Fig. 7 Covariance matrix of imperfection random field

更高,但对于本算例这类小样本问题,它实际上是一个过拟合的结果. 正态分布只表征了样本数据的均值和方差特征,没有体现出样本数据中的高阶矩信息. 相比较而言,区间约束极大熵分布在涵盖样本本

据高阶矩信息的同时,对样本数据量变化的敏感性降低,具有更好的泛化能力.

采用 MCMC 抽样法对 Karhunen-Loeve 随机变量 $\xi^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 进行抽样,并按式 (18) 生成样本缺陷圆柱薄壳. 对每个样本壳采用显式动力学方法进行屈曲分析,获取薄壁圆柱壳的屈曲载荷,其中显示动力学分析的冲击速度设为 2 mm/s. 图 9 给出了无缺陷筒和有缺陷筒的轴压力与轴压位移曲线,图中的最大压力为薄壁圆柱筒的极限承载压力值,记为 P_{cr} ,与经典线性屈曲载荷 P_{c0} 进行比较,得到无量纲因子 α_c ,即

$$\alpha_c = \frac{P_{cr}}{P_{c0}} = \frac{P_{cr} \sqrt{3(1-\nu^2)}}{2\pi E t^2} \quad (19)$$

其中 E 为杨氏模量, ν 为泊松比, t 为壳的壁厚.

对每种模型各进行 100 次抽样模拟,表 2 列出 Karhunen-Loeve 随机变量 $\xi^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 分别为

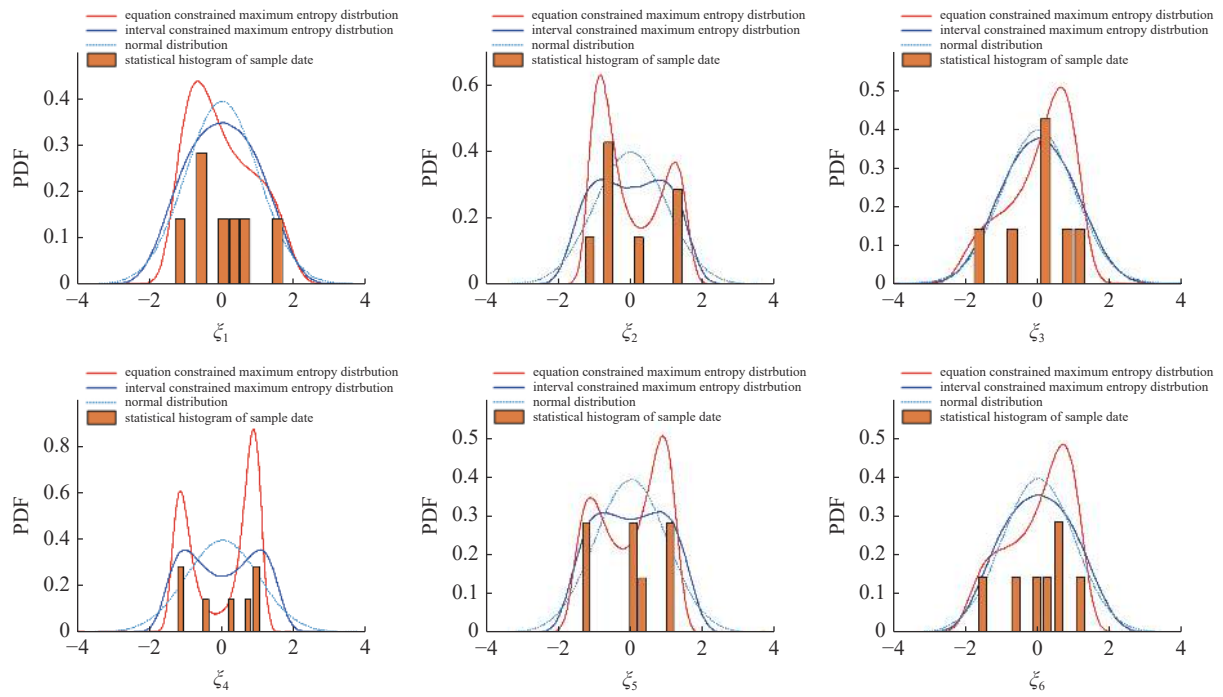


图 8 Karhunen-Loeve 随机变量 $\zeta^0(i=1,2,3,4,5,6)$ 的概率密度函数估计结果

Fig. 8 PDF estimation of Karhunen-Loeve random variables $\zeta^0(i=1,2,3,4,5,6)$

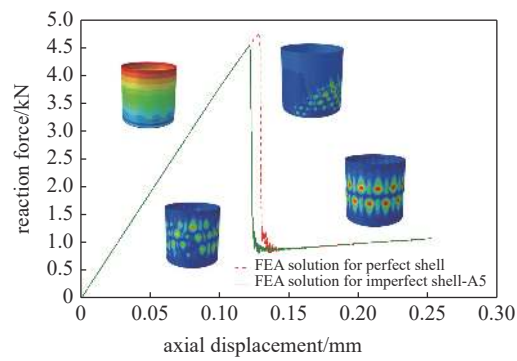


图 9 轴压薄壁圆柱筒的轴压力与轴压位移曲线

Fig. 9 Reaction force-displacement curve of axial compressive thin-walled cylindrical shell

正态分布、等式约束极大熵分布和区间约束极大熵分布时无量纲因子 α_c 的均值和变异系数. 通过比较可见, 正态分布的 KL 随机变量所得的 α_c 具有最大的变异系数值, 等式约束极大熵分布所得的 α_c 的变异系数最小, 而区间约束极大熵分布所得的 α_c 的变异系数居于两者之间.

图 10 展示了三种模型所预测屈曲载荷的频数图像. 由图尾部数据可见, 高斯随机场模型所估计的屈曲载荷具有更大的分散性, 表明其所蕴含的不确定性更大, 而等式约束极大熵模型所估计的屈曲载荷的分散性最小, 表明它所蕴含的不确定性最大.

表 3 给出了利用三种模型所预测的 KDF 值. 在

表 2 含缺陷薄壁圆柱壳轴压极限载荷无量纲因子 α_c 的统计均值和变异系数

Table 2 Mean and coefficient of variation of the cylindrical shell limit load			
Random field model	Number of samples	Mean	Coefficient of variation
Gaussian random field	100	0.904 1	0.0169
equation constrained maximum entropy random field	100	0.901 7	0.0145
interval constrained maximum entropy random field	100	0.901 7	0.0153
test sample	7	0.8973	0.0175

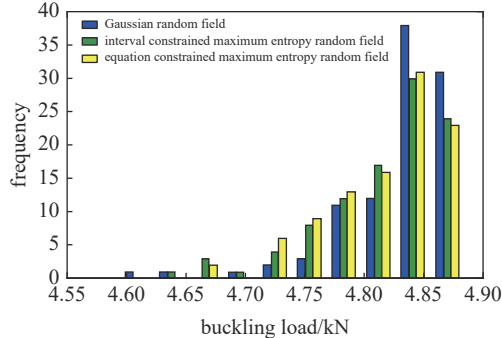


图 10 屈曲载荷频数图

Fig. 10 Statistical frequency of the buckling loads

相同的可靠度条件下, 高斯随机场所预测 KDF 值最小, 区间约束极大熵模型所预测的 KDF 值居中, 等式约束极大熵模型所预测的 KDF 值最大. 相比较而

表 3 结构临界载荷 KDF 估计值

Reliability	0.999	0.99	0.95
Gaussian random field	0.856 9	0.864 7	0.880 3
interval constrained maximum entropy random field	0.864 7	0.869 8	0.883 5
equation constrained maximum entropy random field	0.870 7	0.875 6	0.887 2

言, 高斯随机场模型给出的结果偏保守, 等式约束极大熵模型给出的结果偏危险, 而区间约束极大熵模型给出的结果处于两者之间。

6 结论

本文研究了圆柱薄壳几何缺陷敏感性分析的不确定性量化模型, 主要工作包括三个方面: 一是利用随机场的 Karhunen-Loeve 分解方法构建了表征几何缺陷随机属性的随机场模型; 二是针对几何缺陷不符合高斯随机场特征的情况, 提出利用极大熵原理估计随机场模型中 KL 随机变量的概率分布; 三是针对实测缺陷数据的有限性, 特别是小样本问题, 提出一种区间约束极大熵方法, 给出能够同时考虑认知不确定性和固有随机性的几何缺陷随机场建模方法。

算例验证与分析结果表明, 将薄壁圆柱壳几何缺陷表征为随机场模型来研究缺陷敏感性是可行的, 但随机场模型的概率分布对于缺陷敏感性的评估具有明显影响。本文所提出的区间约束极大熵方法, 一方面能够避免在建模过程中引入与实际不相符的假设, 例如随机场的高斯性、平稳性、各态历经性等假设, 另一方面还能够考虑数据有限导致的认知不确定性。对于小样本问题, 本文所提区间约束极大熵方法具有更好的鲁棒性, 对数据的敏感性更低, 且文献中所提的 KL 随机变量的正态分布模型^[19]和等式约束极大熵分布模型^[26]是本文所提模型的两个特例。

除初始几何缺陷之外, 影响圆柱薄壳结构临界载荷的因素还包括材料属性、壁厚、载荷等缺陷。其中材料属性和壁厚可以通过直接测量的手段获得缺陷信息, 因而本文的缺陷建模方法亦可用于这两类缺陷的建模。载荷的缺陷信息一般无法直接进行测量, 但可以通过模型校正的手段对其进行建模。研究构建可同时量化这些因素不确定性的概率统计模型, 是值得进一步研究的工作。

参 考 文 献

1 Wagner HNR, Hühne C, Elishakoff I. Probabilistic and deterministic lower-bound design benchmarks for cylindrical shells under axial compression. *Thin-Walled Structures*, 2020, 146: 179-200

2 王俊奎, 仝立勇. 关于圆筒壳稳定性中的初始缺陷. *力学进展*, 1988, 18(2): 215-221 (Wang Junkui, Tong Liyong. On initial imperfections in stability of circular cylindrical shells. *Advances in Mechanics*, 1988, 18(2): 215-221 (in Chinese))

3 陈志平, 焦鹏, 马赫等. 基于初始缺陷敏感性的轴压薄壁圆柱壳屈曲分析研究进展. *机械工程学报*, 2021, 57(22): 114-129 (Chen Zhiping, Jiao Peng, Ma He, et al. Advances in buckling analysis of axial compression loaded thin-walled cylindrical shells based on initial imperfection sensitivity. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(22): 114-129 (in Chinese))

4 乔丕忠, 王艳丽, 陆林军. 圆柱壳稳定性问题的研究进展. *力学季刊*, 2018, 39(2): 223-236 (Qiao Pizhong, Wang Yanli, Lu Linjun. Advances in stability study of cylindrical shells. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2018, 39(2): 223-236 (in Chinese))

5 王博, 郝鹏, 田阔. 加筋薄壳结构分析与优化设计研究进展. *计算力学学报*, 2019, 36(1): 1-12 (Wang Bo, Hao Peng, Tian Kuo. Recent advances in structural analysis and optimization of stiffened shells. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, 36(1): 1-12 (in Chinese))

6 Anonymous. Eurocode 3: Design of steel structures. European Committee for Standardisation, ENV, 1993-1-6

7 Hühne C, Rolfe R, Breitbach E, et al. Robust design of composite cylindrical shells under axial compression-simulation and validation. *Thin-Walled Structure*, 2008, 46: 947-962

8 Wang B, Hao P, Li G, et al. Determination of realistic worst imperfection for cylindrical shells using surrogate model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48: 777-794

9 Arbocz J, Starnes Jr J. Future directions and challenges in shell stability analysis. *Thin-Walled Structure*, 2002, 40: 729-754

10 Bolotin V, Akademii Nauk SSSR. Statistical methods in the non-linear theory of elastic shells. *Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk*, 1958, 3: 33-41 (in Russian) (English Translation: NASA TTF-85, 1962: 1-16)

11 Budiansky B, Hutchinson JW. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*, 1966, 4(9): 1505-1510

12 Zhang DL, Chen ZP, Li Y, et al. Lower-bound axial buckling load prediction for isotropic cylindrical shells using probabilistic random perturbation load approach. *Thin-Walled Structures*, 2020, 155: 106925

13 Elishakoff I. Resolution of the 20th Century Conundrum in Elastic Stability. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014

14 Arbocz J, Abramovich H. The initial imperfection databank at the Delft University of Technology, Part 1. Technical Report LR-290, Department of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, 1979

15 Benedikt K, Raimund R, Christian H, et al. Probabilistic design of axially compressed composite cylinders with geometric and loading imperfections. *International Journal Of Structural Stability And Dynamics*, 2010, 10: 623-644

16 Wang B, Du KF, Hao P, et al. Experimental validation of cylindrical shells under axial compression for improved knockdown factors. *In-*

- International Journal of Solids and Structures*, 2019, 164: 37-51
- 17 Arbocz J, Hol JMAM. Collapse of axially compressed cylindrical shells with random imperfections. *Thin-walled Structure*, 1995, 23: 131-158
- 18 Schenk CA, Schuëller GI. Buckling analysis of cylindrical shells with random geometrical imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 1119-1132
- 19 Craig KJ, Roux WJ. On the investigation of shell buckling due to random geometrical imperfections implemented using Karhunen-Loève expansions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 73: 1715-1726
- 20 Benedikt K, Milena M, Raimund R. Sample size dependent probabilistic design of axially compressed cylindrical shells. *Thin-Walled Structure*, 2014, 74: 222-231
- 21 Yang H, Feng SJ, Hao P, et al. Uncertainty quantification for initial geometric imperfections of cylindrical shells: A novel bi-stage random field parameter estimation method. *Aerospace Science and Technology*, 2022, 124: 107554
- 22 Gray A, Wimbush A, De Angelis M, et al. From inference to design: A comprehensive framework for uncertainty quantification in engineering with limited information. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 165: 108210
- 23 Fina M, Weber P, Wagner W. Polymorphic uncertainty modeling for the simulation of geometric imperfections in probabilistic design of cylindrical shells. *Structural Safety*, 2020, 82: 101894
- 24 Feng SJ, Duan YH, Yao CY, et al. A Gaussian process-driven worst realistic imperfection method for cylindrical shells by limited data. *Thin-Walled Structure*, 2022, 181: 110130
- 25 李建宇, 魏凯杰. 考虑周长约束的圆柱薄壳初始几何缺陷随机场建模方法. *计算力学学报*, 2020, 37: 722-728 (Li Jianyu, Wei Kaijie. Modeling initial geometrical imperfections of thin cylindrical shells by random field with perimeter constraints. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, 37: 722-728 (in Chinese))
- 26 李建宇, 余昌忠, 张丽丽. 薄壁圆筒壳初始几何缺陷不确定性量化的极大熵方法. *计算力学学报*, 2022, 39: 443-449 (Li Jianyu, She Changzhong, Zhang Lili. A maximum entropy approach for uncertainty quantification of initial geometric imperfections of thin-walled cylindrical shell. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2022, 39: 443-449 (in Chinese))
- 27 Ghanem RG, Doostan A. On the construction and analysis of stochastic models: Characterization and propagation of the errors associated with limited data. *Journal of Computational Physics*, 2006, 217(1): 63-81
- 28 Zhang RJ, Dai HZh. Stochastic analysis of structures under limited observations using kernel density estimation and arbitrary polynomial chaos expansion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Part A*, 2023, 403: 115689
- 29 李仲民. 基于不完整概率信息的随机场重构方法. [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021 (Li Zhongmin. The recovery of random fields based on incomplete probabilistic information. [Master Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021 (in Chinese))
- 30 Soize C. Uncertainty Quantification: An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering. Springer, 2017
- 31 Murphy KP. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. The MIT Press, 2012
- 32 Mihara, Y, Kobayashi T, Fujii F, et al. Postbuckling analyses of elastic cylindrical shells under axial compression. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*, 2011, 77: 582-589