力学学报
Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics
EI、Scopus 收录
中文核心期刊

基于非线性分析的加肋板肋条位置无网格优化

彭林欣，李知闲，项嘉诚，覃　霞

THE OPTIMIZATION OF RIBS POSITION BASED ON STIFFENED PLATES MESHLESS MODEL WITH NONLINEARITY

Peng Linxin, Li Zhixian, Xiang Jiacheng, and Qin Xia

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-433

第 54 卷 第 12 期 力 学 学 报 Vol. 54, No. 12
2022 年 12 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Dec., 2022

无网格粒子类方法专题

基于非线性分析的加肋板肋条位置无网格优化[1)]

彭林欣 [*,†] 李知闲 [*] 项嘉诚 [*] 覃 霞 [*,2)]

[*] (广西大学土木建筑工程学院, 南宁 530004)

[†] (广西大学广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 南宁 530004)

摘要 在加肋板无网格模型中, 肋条的位置对各种工况下加肋板受力性能的影响至关重要. 文章基于一阶剪切变形和移动最小二乘法理论提出一种考虑非线性影响的加肋板无网格模型, 并利用遗传算法优化肋条位置. 首先, 采用离散节点分别对平板和肋条进行离散, 得到加肋板的无网格离散模型; 其次, 通过冯·卡门大挠度理论得到非矩形板几何非线性问题的弯曲控制方程; 再次, 通过哈密顿原理得到加肋非矩形板自由振动问题的控制方程; 最后引入遗传算法, 以肋条的位置为设计变量、非矩形加肋板中心点挠度最小或自振频率最大为目标函数, 对肋条位置进行优化. 在考虑了几何非线性影响的肋条位置优化过程中, 肋条位置改变时只需重新计算位移转换矩阵, 避免了网格重构. 本文以全局荷载下单肋条菱形板为例与理论解进行对比, 进行有效性验证. 再以板的中点挠度最小和自振频率最大为优化目标, 对局部荷载作用下不同形状、不同肋条布置方式的加肋板进行优化, 分析方法的收敛性及稳定性.

关键词 无网格法, 加肋非矩形板, 一阶剪切变形理论, 遗传算法, 肋条位置优化

中图分类号: TU339 **文献标识码**: A doi: 10.6052/0459-1879-22-433

THE OPTIMIZATION OF RIBS POSITION BASED ON STIFFENED PLATES MESHLESS MODEL WITH NONLINEARITY[1)]

Peng Linxin [*,†] Li Zhixian [*] Xiang Jiacheng [*] Qin Xia [*,2)]

[*] (*School of Civil Engineering and Architecture*, *Guangxi University*, *Nanning* 530004, *China*)

[†] (*Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education*, *Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Engineering Safety*, *Guangxi University*, *Nanning* 530004, *China*)

Abstract In the stiffened plate's meshless model, the ribs' position is critical to the mechanical performance of the stiffened plate under various working conditions. Based on the first-order shear deformation theory and the moving-least square approximation, a meshless model of the stiffened non-rectangular plate considering nonlinearity is proposed and the position of the ribs is optimized based on the genetic algorithm. Firstly, the meshless model of the stiffened plate is obtained by discretizing the plate and ribs with discrete nodes. Secondly, the bending governing equation for the geometrically nonlinear problem of the stiffened non-rectangular plate is derived from the Von Karman large deflection theory. Then, the governing equation for the free vibration problem of the stiffened non-rectangular plate is derived from the Hamilton principle. Finally, the genetic algorithm is introduced with the position of the ribs as the design variable and the minimal deflection or the maximal natural frequency of the center point of the non-rectangular stiffened plate as the objective function to optimize the position of ribs. In the process of ribs' position optimization considering the influence

2022–09–17 收稿, 2022–11–16 录用, 2022–11–19 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (12162004), 国家重点研发计划 (2019YFC1511103) 和广西重点研发计划 (桂科 AB22036007) 资助项目.

2) 覃霞, 博士, 主要研究方向: 无网格方法. E-mail: sarah0901@yeah.net

引用格式: 彭林欣, 李知闲, 项嘉诚, 覃霞. 基于非线性分析的加肋板肋条位置无网格优化. 力学学报, 2022, 54(12): 3366-3382

Peng Linxin, Li Zhixian, Xiang Jiacheng, Qin Xia. The optimization of ribs position based on stiffened plates meshless model with nonlinearity. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(12): 3366-3382

of geometric nonlinearity, only the displacement transformation matrix needs to be recalculated when the ribs' position changed, and the mesh reconstruction is totally avoided.In this paper, first taking the single-rib rhombus plate under global load as an example, the comparison with the theoretical results is carried out and the validity of the method is verified. Then, taking the minimum center point deflection and the maximum natural frequency of the stiffened plate as the optimization objective, the stiffened plates with different shapes and different rib' arrangements under local load were optimized, and then the convergence and stability of the proposed method were studied.

Key words　meshless method, ribbed non-rectangular plate, first-order shear deformation theory, genetic algorithm, rib position optimization

引言

建筑物筏形基础、混凝土刚性路面板、机场跑道、钢箱梁等板壳结构在不均匀载荷的长期影响下, 结构易发生倾斜、变形、开裂等问题. 筏形基础等结构本质上就是加肋板, 如果在设计阶段通过优化肋条布置来调整结构的局部刚度, 有针对性地适应载荷的局部不均匀性, 可达到控制结构不均匀变形、改善结构力学性能等目的.

近年来各种优化理论已被普遍应用到结构工程中[1-14], 如 Yi 等[1] 基于有限变形弹塑性壳体结构, 对球面曲壳进行了无网格法结构优化设计; 彭细荣等[2] 考虑了连续体在破损-安全下的结构拓扑优化问题, 避免结构过于高效而缺少适当的冗余结构, 因此对局部破坏过于敏感; 陈炉云等[3] 采用遗传算法对对称型复合材料板结构进行了结构−声辐射铺层的几何优化分析; 李林远等[4] 对矩形加肋板的肋条布置进行了无网格法优化, 结合混合遗传算法, 使横向载荷的作用下的加肋板中心点挠度最小; 王选等[7] 针对体积和应力约束下的最小柔顺性问题提出了一种改进的双向渐进结构优化方法.

基于单元的优化分析方法在每一次肋条位置改变时都需要重新划分单元, 从而增加了优化的计算量. 而无网格法[15] 不需要划分单元, 而是在一系列离散点上进行计算, 是基于点的近似, 摆脱了单元的限制. 近年来无网格法在国内外学者的研究探索下得到进一步发展[15-29]. 彭林欣[21] 提出一种求解矩形加肋板线性弯曲问题的移动最小二乘无网格法; 杨柳和彭建设[24] 采用常微分方程解法分析了平行四边形板的弯曲问题; 方电新等[26] 根据变分原理, 采用罚函数法满足本征边界条件, 得到平板弯曲计算的无网格法控制方程, 分析求解了平板的弯曲问题; 曾军才等[27] 应用改进傅里叶级数方法, 建立了正交各向异性矩形薄板的弯曲振动模型, 并求出控制方程在各种边界条件下的解析解; Zhou 等[28] 使用移动最小二乘法研究分析菱形板的自由振动, 解决了菱形板钝角处的应力奇异性导致收敛速度慢的问题.

由以上分析可知, 目前多数无网格方法研究都集中在平板的拓扑优化分析, 而基于几何非线性的加肋非矩形板肋条位置优化问题鲜见相关文献. 为此, 本文基于一阶剪切变形理论[29] 和移动最小二乘法[15], 提出加肋非矩形板无网格模型, 并结合遗传算法根据实际需要优化加肋非矩形板的肋条位置, 调整加肋板的局部刚度, 以减小不均匀变形并增加其自振频率. 以肋条在非矩形板上的位置为设计变量, 依次以加肋非矩形板的最大频率、控制点的最小挠度为目标函数, 对肋条的布置进行优化. 文末以不同参数、载荷布置形式的加肋圆板和加肋平行四边形板的肋条最佳布置位置进行分析求解, 研究结果表明, 该方法能有效地分析考虑了几何非线性影响的非矩形加肋板优化问题, 且在肋条位置改变时, 不需要重新划分网格, 极大地降低了计算量, 具有一定的工程实用价值.

1　加肋非矩形板的无网格模型

1.1　近似场函数

本文将加肋非矩形板视为非矩形平板与肋条的组合结构, 并用梁模型来模拟肋条. 分别采用一系列的点来离散非矩形平板和肋条 (记平板的离散节点数为 n_p, 肋条的离散节点数为 n_s), 同时采用不同的坐标系分别建立圆形平板 (x, y, z) 和梁 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的无网格模型, 如图 1 所示. 本文忽略肋条的扭转刚度和平面外刚度, 并且假定肋条与平板的材料属性相同, 其中 R, h_p, h_s 和 t_s 分别为圆板平板半径、板厚、肋条高和肋条宽, 如图 2 所示. 圆形平板和肋条为均质材料, 弹性模量和泊松比分别记为 E 和 μ.

为方便后续推导, 假设平板上每个节点的自由度 (DOF) 为 $(u_p, v_p, w_p, \varphi_{px}, \varphi_{py})$, u_p, v_p 和 w_p 分别是沿 x, y 和 z 方向的平动位移. φ_{px} 和 φ_{py} 分别是绕 y 和 x 轴的旋转角度. 基于一阶剪切变形理论 (FSDT), φ_{px}, φ_{py} 与 w_p 相互独立. 另外, $[u_{0pI}, v_{0pI}, w_{pI}, \varphi_{pxI}, \varphi_{pyI}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varDelta}_{pI}$ 为平板离散节点 I 参数, u_{0pI}, v_{0pI} 和 w_{pI} 分别为离散节点 I 在中面上沿 x, y 和 z 方向的平动位移.

对于肋条, 假设其 DOF 为 (u_s, w_s, φ_s), u_s 和 w_s 分别为沿着 $\bar{x}$ 和 $\bar{z}$ 的平动位移, φ_s 为绕 $\bar{y}$ 旋转的角度, 并且与 w_s 独立. 另外, $[u_{0sI}, w_{sI}, \varphi_{sI}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varDelta}_{sI}$ 肋条离散节点 I 的参数. u_{0sI} 为肋条离散节点 I 在中面上沿 $\bar{x}$ 的平动位移.

根据一阶剪切变形理论[29] 和移动最小二乘法[15], 可以得到非矩形平板的位移场为

$$
\left.\begin{aligned}
&u_p(x,y,z)=u_{0p}(x,y)-z\varphi_{px}(x,y)=\\
&\qquad\sum_{I=1}^{n_p}N_I(x,y)u_{0pI}-z\sum_{I=1}^{n_p}N_I(x,y)\varphi_{pyI}\\
&v_p(x,y,z)=v_{0p}(x,y)-z\varphi_{py}(x,y)=\\
&\qquad\sum_{I=1}^{n_p}N_I(x,y)v_{0pI}-z\sum_{I=1}^{n_p}N_I(x,y)\varphi_{pxI}\\
&w_p(x,y,z)=w_p(x,y)=\sum_{I=1}^{n_p}N_I(x,y)w_{pI}
\end{aligned}\right\}\tag{1}
$$

将式 (1) 写成矩阵形式, 有

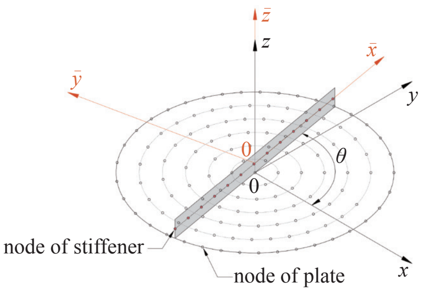


图 1　加肋圆板的无网格模型

Fig. 1　The meshless model of the circular stiffened plate

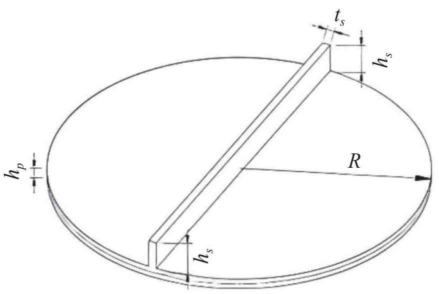


图 2　加肋圆板

Fig. 2　The circular stiffened plate

$$
\boldsymbol{U}_p=\left\{u_p,\ v_p,\ w_p\right\}^{\mathrm{T}}=\sum_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{H}_I\boldsymbol{\varDelta}_{pI}\tag{2}
$$

式中

$$
\boldsymbol{H}_I=\begin{bmatrix}
N_I(x,y) & 0 & 0 & -zN_I(x,y) & 0\\
0 & N_I(x,y) & 0 & 0 & -zN_I(x,y)\\
0 & 0 & N_I(x,y) & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

肋条的位移场为

$$
\left.\begin{aligned}
&u_s(\bar{x},\bar{z})=u_{0s}(\bar{x})-\bar{z}\varphi_s(\bar{x})=\\
&\qquad\sum_{I=1}^{n_s}\varPhi_I(\bar{x})u_{0sI}(\bar{x})-\bar{z}\sum_{I=1}^{n_s}\varPhi_I(\bar{x})\varphi_{sI}\\
&w_s(\bar{x})=\sum_{I=1}^{m}\varPhi_I(\bar{x})w_{sI}
\end{aligned}\right\}\tag{3}
$$

将式 (3) 写成矩阵形式, 有

$$
\boldsymbol{U}_s=\{u_s,\ w_s\}^{\mathrm{T}}=\sum_{I=1}^{n_s}\boldsymbol{H}_{sI}\boldsymbol{\varDelta}_s\tag{4}
$$

式中

$$
\boldsymbol{H}_{sI}=\begin{bmatrix}
\varPhi_I(\bar{x}) & 0 & -z\varPhi_I(\bar{x})\\
0 & \varPhi_I(\bar{x}) & 0
\end{bmatrix}
$$

权函数选 3 次样条函数, 非矩形平板的基函数取为: $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=[1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2]$, $m=6$; 肋条基函数取为: $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=[1,\ x,\ x^2]$, $m=3$; 另外, 如图 3 所示, 节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的影响域半径定义为

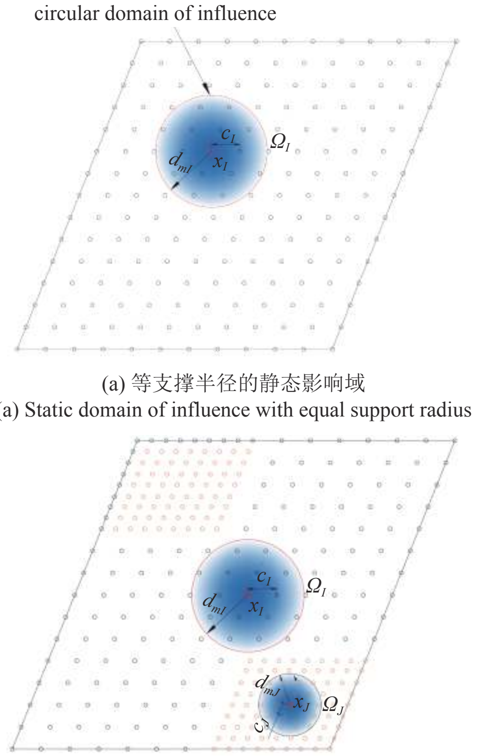
$$
d_{mI}=scale\cdot c_I\tag{5}
$$

式中, $scale$ 为影响域系数; c_I 为影响域基数, 取节点 $\boldsymbol{x}_I$ 与距其最近节点的间距.

菱形板相对于圆板存在边界处的角度变换问题, 使用变支撑半径的动态影响域能够更好对边界进行处理, 因此本文针对加肋菱形板所出现的应力集中现象, 选择变支撑半径的动态影响域, 而对于加肋圆板, 则采用等支撑半径的静态影响域.

由于式 (1) 和式 (3) 中的形函数不满足克罗内克条件, 各节点未知量是节点参数而非节点真实位移, 所以板与肋条的位移协调不能像有限元那样通过节点未知量直接施加, 而需另寻途径. 本文通过肋条和平板上两点连线和接触面的交点建立肋条节点和平板节点的位移协调条件, 从而将肋条和平板的刚度矩阵进行叠加. 如图 4 所示, 肋条上任一点 S, 必定在平板上存在对应点 P (P 点不一定是平板上的离散节点), 使得 P 和 C 两点连线垂直于 xy 面, C 点为 P 和 S 两点连线与板面的交点,同心肋条时三点重合.

为方便说明, 将平板 $(x\ ,y,\ z)$ 坐标下的位移 $(u_p$,



(a) 等支撑半径的静态影响域
(a) Static domain of influence with equal support radius

(b) 变支撑半径的动态影响域
(b) Dynamic domain of influence with variable support radius

图 3　圆形影响域

Fig. 3　Circular domain of influence

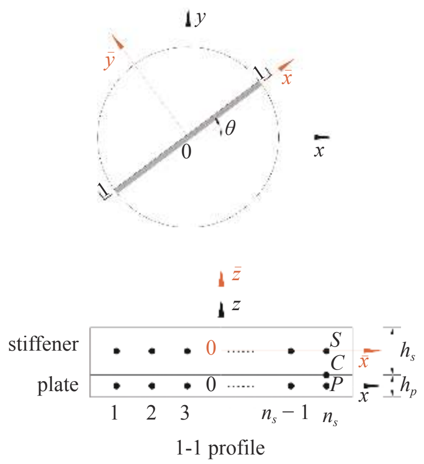


图 4　位移协调示意图

Fig. 4　Indication of displacement coordination

v_p, w_p, φ_{px}, φ_{py}) 转成 ($\bar{x}$,$\bar{y}$,$\bar{z}$) 坐标下的 ($\bar{u}_p$,$\bar{v}_p$,$\bar{w}_p$,$\bar{\varphi}_{px}$,$\bar{\varphi}_{py}$), 即

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{v}_p \\ \bar{w}_p \\ \bar{\varphi}_{px} \\ \bar{\varphi}_{py} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \\ \varphi_{px} \\ \varphi_{py} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

在 C 点有以下的位移协调关系

$$\bar{u}_p\big|_C = u_s|_C \tag{7}$$

$$\bar{w}_p\big|_C = w_s|_C \tag{8}$$

$$\bar{\varphi}_{px}\big|_C = \varphi_s|_C 9 \tag{9}$$

对于肋条上的每个离散节点 (离散节点数为 n_s 个), 都可以在板上找到一个点与之对应. 于是, 式 (7)、式 (8) 和式 (9) 分别有 n_s 个关系, 并基于 FSDT 有

$$u_{0s}(\bar{x}_i) - (-\frac{h_s}{2})\varphi_s(\bar{x}_i) = \bar{u}_{0p}(x_i, y_i) - \frac{h_p}{2}\bar{\varphi}_{py}(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n_s \tag{10}$$

$$\bar{w}_s(\bar{x}_i) = \bar{w}_p(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n_s \tag{11}$$

$$\varphi_s(\bar{x}_i) = \bar{\varphi}_{py}(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n_s \tag{12}$$

将式 (12) 代入式 (10), 可得

$$u_{0s}(\bar{x}_i) = \bar{u}_{0p}(x_i, y_i) - \frac{(h_p + h_s)}{2}\varphi_{p\bar{y}}(x_i, y_i) = \bar{u}_{0p}(x_i, y_i) - es\bar{\varphi}_{py}(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n_s \tag{13}$$

式中, es 为肋条与板中心点间的距离, 对于同心肋条, $es = 0$. 将式 (11)、式 (12) 和式 (13) 写成矩阵形式, 有

$$\begin{Bmatrix} u_{0s}(\bar{x}_i) \\ w_s(\bar{x}_i) \\ \varphi_s(\bar{x}_i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -es & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0p}(x_i, y_i) \\ v_{0p}(x_i, y_i) \\ \omega_p(x_i, y_i) \\ \varphi_{py}(x_i, y_i) \\ \varphi_{py}(x_i, y_i) \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n_s \tag{14}$$

将式 (6) 代如式 (14), 有

$$\begin{Bmatrix} u_{0si} \\ w_{si} \\ \varphi_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & -es*\cos\theta & -es*\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{0pi} \\ v_{0pi} \\ w_{pi} \\ \varphi_{pyi} \\ \varphi_{pxi} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n_s \tag{15}$$

由移动最小二乘法可以知

$$\begin{Bmatrix} u_{0si}\\ w_{si}\\ \varphi_{si}\end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{m}\begin{bmatrix} N_{sj}(\bar{x}_i) & 0 & 0\\ 0 & N_{sj}(\bar{x}_i) & 0 \\ 0 & 0 & N_{sj}(\bar{x}_i)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{0sj}\\ w_{sj}\\ \varphi_{sj}\end{Bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n_s \tag{16}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{0pi}\\ v_{0pi}\\ w_{pi}\end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_p}\begin{bmatrix} N_j(x_i,y_i) & 0 & 0\\ 0 & N_j(x_i,y_i) & 0 \\ 0 & 0 & N_j(x_i,y_i)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{0pj}\\ v_{0pj}\\ w_{pj}\end{Bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n_p$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{pyi}\\ \varphi_{pxi}\end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_p}\begin{bmatrix} N_j(x_i,y_i) & 0 \\ 0 & N_j(x_i,y_i)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_{pyj}\\ \varphi_{pxj}\end{Bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n_p \tag{17}$$

式 (17) 的 n_p 为非矩形平板的离散节点数, 将式 (16) 和式 (17) 代入式 (15), 并写成矩阵形式, 可以得到

$$\boldsymbol{T}_p\boldsymbol{\varDelta}_p = \boldsymbol{T}_s\boldsymbol{\varDelta}_s \tag{18}$$

式中, $\boldsymbol{T}_s$ 为 $3n_s\times 3n_s$ 的矩阵, $\boldsymbol{T}_p$ 为 $3n_s\times 5n_p$ 的矩阵

$$\boldsymbol{T}_p=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1(x_1,y_1) & \boldsymbol{H}_2(x_1,y_1) & \cdots & \boldsymbol{H}_{n_p}(x_1,y_1)\\ \boldsymbol{H}_1(x_2,y_2) & \boldsymbol{H}_2(x_2,y_2) & \cdots & \boldsymbol{H}_{n_p}(x_2,y_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{H}_1(x_{n_s},y_{n_s}) & \boldsymbol{H}_2(x_{n_s},y_{n_s}) & \cdots & \boldsymbol{H}_{n_p}(x_{n_s},y_{n_s})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_s=\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1(\bar{x}_1) & \boldsymbol{R}_2(\bar{x}_1) & \cdots & \boldsymbol{R}_{n_s}(\bar{x}_1)\\ \boldsymbol{R}_1(\bar{x}_2) & \boldsymbol{R}_2(\bar{x}_2) & \cdots & \boldsymbol{R}_{n_s}(\bar{x}_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{R}_1(\bar{x}_{n_s}) & \boldsymbol{R}_2(\bar{x}_{n_s}) & \cdots & \boldsymbol{R}_{n_s}(\bar{x}_{n_s})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varDelta}_p=\left[u_{0p1}\ v_{0p1}\ w_{p1}\ \varphi_{px1}\ \varphi_{py1}\ \ldots\ u_{0pn_p}\ v_{0pn_p}\ w_{pn_p}\ \varphi_{pxn_p}\ \varphi_{pyn_p}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\varDelta}_s=\left[u_{0s1}\ w_{s1}\ \varphi_{s1}\ u_{0s2}\ w_{s2}\ \varphi_{s2}\ \ldots\ u_{0sn_s}\ w_{s1n_s}\ \varphi_{s1n_s}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_j(x_i,y_i)=\begin{bmatrix} N_j(x_i,y_i)\cos\alpha & N_j(x_i,y_i)\sin\theta & 0 & -esN_j(x_i,y_i)\cos\theta & -esN_j(x_i,y_i)\sin\theta\\ 0 & 0 & N_j(x_i,y_i) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & N_j(x_i,y_i)\cos\theta & N_j(x_i,y_i)\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_j(\bar{x}_i)=\begin{bmatrix} N_{sj}(\bar{x}_i) & 0 & 0\\ 0 & N_{sj}(\bar{x}_i) & 0\\ 0 & 0 & N_{sj}(\bar{x}_i)\end{bmatrix}$$

由式 (18) 可导出

$$\boldsymbol{\varDelta}_s=\boldsymbol{T}_{sp}\boldsymbol{\varDelta}_p \tag{19}$$

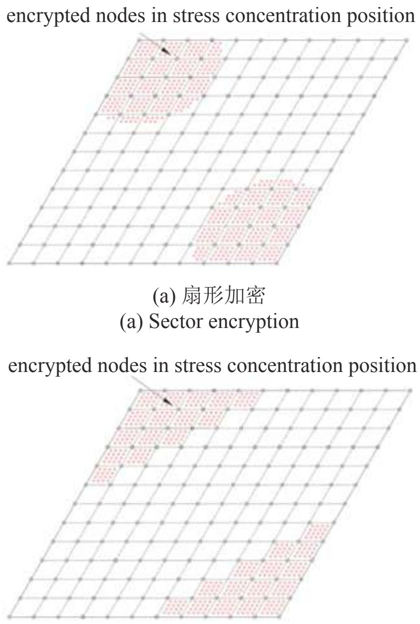
式中

$$\boldsymbol{T}_{sp}=\boldsymbol{T}_s^{-1}\boldsymbol{T}_p \tag{20}$$

矩阵 $\boldsymbol{T}_{sp}$ 即为节点参数转换矩阵, 其与 $\boldsymbol{T}_s$ 及 $\boldsymbol{T}_p$ 有关. 若肋条改变位置时, 则肋条节点对应板上的点 (x_i, y_i) 发生变化, 需要重新计算 $N_j(x_i, y_i)$ 及 $\boldsymbol{T}_p$, 但在肋条上的点的坐标 $\bar{x}_i$ 不会发生变化, 所以不需重新计算 $R_j(\bar{x}_i)$ 及 $\boldsymbol{T}_s$. 通过矩阵 $\boldsymbol{T}_{sp}$ 可以成功地将肋条添加到平板上, 从而得到加肋非矩形板 (复合结构) 的无网格模型. 该无网格模型可以任意改变肋条位置, 而不需要重新布置平板的节点, 避免网格重构.

1.2 应力集中处的处理

如 5 所示, 在钝角处 (变形及应力梯度太大) 作扇形或规则网格形加密布置离散节点, 以保证计算精度. 带有加密区的非矩形板, 其离散节点的影响域采用动态影响域, 而所有肋条均采用静态影响域, 以获得更精确的计算结果. 对于动态影响域, 本文通过固定影响域内离散节点数的方法确定其支撑半径. 后续算例中, 以控制影响域内离散节点数为 20 个为准.



(a) 扇形加密
(a) Sector encryption

(b) 网格加密
(b) Mesh encryption

图 5 离散节点加密

Fig. 5 The encryption of discrete nodes

2 加肋非矩形板的几何非线性列式

2.1 非矩形板应变和应力

非矩形板的位移场如式 (1), 根据冯·卡门大挠度理论, 可以得到非矩形板的应变如下

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-z\varepsilon_x^1\\ -z\varepsilon_y^1\\ -z\gamma_{xy}^1\\ \gamma_{xz}^1\\ \gamma_{yz}^1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^L\\ \varepsilon_y^L\\ \gamma_{xy}^L\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\tag{21}$$

式中 $\{\varepsilon_x^0,\varepsilon_y^0,\gamma_{xy}^0\}$, $\{-z\varepsilon_x^1,-z\varepsilon_y^1,-z\gamma_{xy}^1\}$ 和 $\{\varepsilon_x^L,\varepsilon_y^L,\gamma_{xy}^L\}$ 分别是中平面应变矢量、旋转角引起的应变矢量和应变的非线性分量. 为方便推导, 将式 (21) 改写成式 (22)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -z\varepsilon_x^1\\ -z\varepsilon_y^1\\ -z\gamma_{xy}^1\\ \gamma_{xz}^1\\ \gamma_{yz}^1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^L\\ \varepsilon_y^L\\ \gamma_{xy}^L\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\tag{22}$$

式中

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_{0p}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_{0p}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_{0p}}{\partial y}+\dfrac{\partial v_{0p}}{\partial x}\end{Bmatrix}=\sum_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{B}_{pI}^e\boldsymbol{\varDelta}_{pI}\tag{23}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^1\\ \varepsilon_y^1\\ \gamma_{xy}^1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \varphi_{px}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \varphi_{py}}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \varphi_{px}}{\partial y}+\dfrac{\partial \varphi_{py}}{\partial x}\end{Bmatrix}=\sum_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{B}_{pI}^b\boldsymbol{\varDelta}_{pI}\tag{24}$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}^1\\ \gamma_{yz}^1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_p}{\partial x}-\varphi_{px}\\ \dfrac{\partial w_p}{\partial y}-\varphi_{py}\end{Bmatrix}=\sum_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{B}_{pI}^s\boldsymbol{\varDelta}_{pI}\tag{25}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}I}^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}N_{I,x}&0&0&0&0\\ 0&N_{I,y}&0&0&0\\ N_{I,y}&N_{I,x}&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}I}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}0&0&0&N_{I,x}&0\\ 0&0&0&0&N_{I,y}\\ 0&0&0&N_{I,y}&N_{I,x}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}I}^{\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}0&0&N_{I,x}&-N_I&0\\ 0&0&N_{I,y}&0&-N_I\end{bmatrix}$$

应变的非线性分量为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^L\\ \varepsilon_y^L\\ \gamma_{xy}^L\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac12\left(\dfrac{\partial w_p}{\partial x}\right)^2\\ \dfrac12\left(\dfrac{\partial w_p}{\partial y}\right)^2\\ \dfrac{\partial w_p}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial w_p}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac12\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_p}{\partial x}&0\\ 0&\dfrac{\partial w_p}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w_p}{\partial y}&\dfrac{\partial w_p}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_p}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w_p}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac12\boldsymbol{C}\sum_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{G}_I\boldsymbol{\varDelta}_{pI}\tag{26}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_p}{\partial x}&0&\dfrac{\partial w_p}{\partial y}\\ 0&\dfrac{\partial w_p}{\partial y}&\dfrac{\partial w_p}{\partial x}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{G}_I=\begin{bmatrix}0&0&N_{I,x}&0&0\\ 0&0&N_{I,y}&0&0\end{bmatrix}$$

将式 (23)、式 (25) 和式 (26) 代入式 (22), 可以得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\varDelta}_p\tag{27}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_L\\ &\boldsymbol{B}_0=[\boldsymbol{B}_{01}\ \boldsymbol{B}_{02}\ \ldots\ \boldsymbol{B}_{0n}]\\ &\boldsymbol{B}_L=[\boldsymbol{B}_{L1}\ \boldsymbol{B}_{L2}\ \ldots\ \boldsymbol{B}_{Ln}]\\ &\boldsymbol{B}_{0I}=\left[\boldsymbol{B}_{pI}^e\ -z\boldsymbol{B}_{pI}^b\ \boldsymbol{B}_{pI}^s\right]^{\mathrm{T}}\\ &\boldsymbol{B}_L=[\boldsymbol{C}\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_I\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

从而非矩形板的应力可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_p=\begin{Bmatrix}\sigma_x^0\\ \sigma_y^0\\ \tau_{xy}^0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \sigma_x^1\\ \sigma_y^1\\ \tau_{xy}^1\\ \tau_{xz}^1\\ \tau_{yz}^1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\sigma_x^L\\ \sigma_y^L\\ \tau_{xy}^L\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_p\tag{29}$$

式中

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}^{\mathrm{b}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\ \mu&1&0\\ 0&0&\dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{b}}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1&\mu&0&0&0\\ \mu&1&0&0&0\\ 0&0&\dfrac{1-\mu}{2}&0&0\\ 0&0&0&\dfrac{1-\mu}{2}&0\\ 0&0&0&0&\dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}$$

2.2 肋条的应变和应力

肋条的位移场如式 (3), 根据冯·卡门大挠度理论, 可以得到肋条的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s=\left\{\begin{matrix}\varepsilon_{\bar{x}}\\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\varepsilon^0_{\bar{x}}\\ 0\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}-\bar{z}\varepsilon^1_{\bar{x}}\\ \gamma^1_{\bar{x}\bar{z}}\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\varepsilon^L_{\bar{x}}\\ 0\end{matrix}\right\} \tag{30}$$

为方便说明, 将式 (30) 写成

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s=\left\{\begin{matrix}\varepsilon^0_{\bar{x}}\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}0\\ -\bar{z}\varepsilon^1_{\bar{x}}\\ \gamma^1_{\bar{x}\bar{z}}\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\varepsilon^L_{\bar{x}}\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\} \tag{31}$$

式中 $\varepsilon^0_{\bar{x}}$, $\{-\bar{z}\varepsilon^1_{\bar{x}}, -\bar{z}\gamma^1_{\bar{x}\bar{z}}\}$ 和 $\varepsilon^L_{\bar{x}}$ 分别是中性轴上的应力、旋转角引起的应变矢量和应变的非线性分量.

面内应变、弯曲应变和剪切应变分别为

$$\varepsilon^0_{\bar{x}}=\frac{\mathrm{d}u_{0s}}{\mathrm{d}\bar{x}}=\sum_{I=1}^{n_s}\boldsymbol{B}^{\mathrm{e}}_{sI}\boldsymbol{\varDelta}_{sI} \tag{32}$$

$$\varepsilon^1_{\bar{x}}=\frac{\mathrm{d}\varphi_s}{\mathrm{d}\bar{x}}=\sum_{I=1}^{n_s}\boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}_{sI}\boldsymbol{\varDelta}_{sI} \tag{33}$$

$$\gamma^1_{\bar{x}\bar{z}}=\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}\bar{x}}-\varphi_s=\sum_{I=1}^{n_s}\boldsymbol{B}^{\mathrm{s}}_{sI}\boldsymbol{\varDelta}_{sI} \tag{34}$$

式中

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{e}}_{sI}=[\varPhi_{I,\bar{x}}\ 0\ 0],\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{b}}_{sI}=[0\ 0\ \varPhi_{I,\bar{x}}],\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{s}}_{sI}=[0\ \varPhi_{I,\bar{x}}-\varPhi_I].$$

应变的非线性分量 $\varepsilon^L_{\bar{x}}$ 可以写成

$$\varepsilon^L_{\bar{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_s\sum_{I=1}^{n_s}\boldsymbol{G}_{sI}\boldsymbol{\varDelta}_{sI} \tag{35}$$

式中

$$C_s=\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}\bar{x}}, \boldsymbol{G}_{sI}=[0\ \Phi_{I,\bar{x}}\ 0]$$

将式 (32) ~ 式 (35) 代入式 (31) 可以得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s=\bar{\boldsymbol{B}}_s\boldsymbol{\varDelta}_s \tag{36}$$

式中

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\boldsymbol{B}}_s=\boldsymbol{B}_{0s}+\boldsymbol{B}_{Ls}\\ \boldsymbol{B}_{0s}=\left[\begin{matrix}\boldsymbol{B}_{0s1} & \boldsymbol{B}_{0s2} & \ldots & \boldsymbol{B}_{0sn}\end{matrix}\right]\\ \boldsymbol{B}_{Ls}=\left[\begin{matrix}\boldsymbol{B}_{Ls1} & \boldsymbol{B}_{Ls2} & \ldots & \boldsymbol{B}_{Lsn}\end{matrix}\right]\\ \boldsymbol{B}_{0sI}=\left[\begin{matrix}\boldsymbol{B}^e_{sI} & -z\boldsymbol{B}^b_{sI} & \boldsymbol{B}^s_{sI}\end{matrix}\right]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{B}_{LsI}=C_s\boldsymbol{G}_{sI}\end{array}\right\} \tag{37}$$

从而亦可以得到肋条的应力分量为

$$\boldsymbol{\sigma}_s=\left\{\begin{matrix}\sigma^0_{\bar{x}}\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}0\\ \sigma^1_{\bar{x}}\\ \tau^1_{\bar{x}\bar{z}}\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\sigma^L_{\bar{x}}\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\}=\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{\varepsilon}_s \tag{38}$$

式中

$$\boldsymbol{D}_s=\begin{bmatrix}E & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{E}{2(1+\mu)}\end{bmatrix}$$

2.3 非线性问题的平衡微分方程

根据以上推导的非矩形板和肋条的应力、应变, 以及外力的虚功, 可以导出非线性问题的平衡微分方程

$$\int\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v+\int\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_s\mathrm{d}v-\delta\boldsymbol{\varDelta}_p^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F}=0 \tag{39}$$

式中, $\boldsymbol{F}$ 为载荷向量 (例如, 当加肋圆板受面外均布力 $q(x,y)$ 和集中力 P 的作用时, 见图 6. 如下

$$\boldsymbol{F}_I=\left[\begin{matrix}0 & 0 & \iint q(x,y)N_I(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+N_I(x_0,y_0)P & 0 & 0\end{matrix}\right]^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

将式 (19)、式 (27) 和式 (36) 一同代入式 (39), 可以得到

$$\int\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v+\int\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_s^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_s\mathrm{d}v-\boldsymbol{F}=0 \tag{41}$$

假设 $\boldsymbol{\varPsi}$ 为内力与外力的矢量和, 则有

$$\boldsymbol{\varPsi}=\int\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v+\int\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_s^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_s\mathrm{d}v-\boldsymbol{F} \tag{42}$$

从而可以导出

$$\delta\boldsymbol{\varPsi}=\int\delta\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v+\int\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v+\int\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\delta\bar{\boldsymbol{B}}_s^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_s\mathrm{d}v+\int\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_s^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}_s\mathrm{d}v \tag{43}$$

将式 (19)、式 (28)、式 (29)、式 (37) 和式 (38)

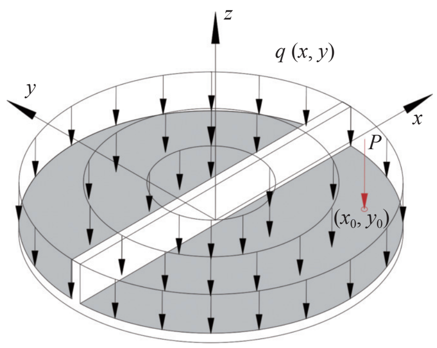


图 6 受面外均布力和集中力 P 作用的加肋圆板

Fig. 6 A circular stiffened plate subject to an out-plane force and concentrated force P

代入式 (43), 可以得到

$$\delta\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{K}_\sigma\cdot\delta\boldsymbol{\Delta}_p + \bar{\boldsymbol{K}}\cdot\delta\boldsymbol{\Delta}_p + \boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\sigma s}\boldsymbol{T}_{sp}\cdot\delta\boldsymbol{\Delta}_p + \boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_s\boldsymbol{T}_{sp}\cdot\delta\boldsymbol{\Delta}_p \tag{44}$$

式 (44) 可以写成

$$\delta\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{K}_T\delta\boldsymbol{\Delta}_p \tag{45}$$

式中

$$\boldsymbol{K}_T = \boldsymbol{K}_\sigma + \bar{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\sigma s}\boldsymbol{T}_{sp} + \boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_s\boldsymbol{T}_{sp}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}} = \int(\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0)\mathrm{d}v$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_s = \int(\boldsymbol{B}_{0s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{0s} + \boldsymbol{B}_{0s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{Ls} + \boldsymbol{B}_{Ls}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{Ls} + \boldsymbol{B}_{Ls}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{0s})\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{K}_\sigma = \int\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{G}\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{K}_{\sigma s} = \int\boldsymbol{G}_s{}^{\mathrm{T}}S_s\boldsymbol{G}_s\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}$$

$S_s = A_s\sigma_{\bar{x}}$, A_s 为肋条横截面面积.

从式 (42) 可以得到

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{K}_s\boldsymbol{\Delta}_p - \boldsymbol{F} \tag{46}$$

式中

$$\boldsymbol{K}_s = \boldsymbol{K}_{sp} + \boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ss}\boldsymbol{T}_{sp}$$

$$\boldsymbol{K}_{sp} = \int(\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_L + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_0)\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{K}_{ss} = \int(\boldsymbol{B}_{0s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{0s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{0s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{Ls} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{Ls}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{Ls} + \boldsymbol{B}_{Ls}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_s\boldsymbol{B}_{0s})\mathrm{d}v$$

使用高斯积分计算上述刚度矩阵. 最后, 引入完全变换方法[31-32] 来处理本质边界条件, 方程式 (45) 和式 (46) 分别被转化为如下方程. 本文研究考虑了固支边界 ($u_p = 0, v_p = 0, w_p = 0, \varphi_{px} = 0, \varphi_{py} = 0$) 和铰支边界 ($w_p = 0, \varphi_{px} = 0, \varphi_{py} = 0$)

$$\delta\bar{\boldsymbol{\Psi}} = \bar{\boldsymbol{K}}_T\delta\bar{\boldsymbol{\Delta}}_p \tag{47}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}} = \bar{\boldsymbol{K}}_s\bar{\boldsymbol{\Delta}}_p - \bar{\boldsymbol{F}} \tag{48}$$

本文采用 Newton-Raphson 方法[33] 来求解非线性方程.

3　加肋非矩形板的自由振动列式

3.1　平板动能

基于一阶剪切变形理论[29] 及移动最小二乘法[15], 非矩形板以时间、空间为变量的位移场为式

$$\boldsymbol{U}_p = \begin{Bmatrix}u_p(x,y,z)\\ v_p(x,y,z)\\ w_p(x,y,z)\end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_p}\begin{bmatrix}N_I(x,y) & 0 & 0 & -zN_I(x,y) & 0\\ 0 & N_I(x,y) & 0 & 0 & -zN_I(x,y)\\ 0 & 0 & N_I(x,y) & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{0pI}(t)\\ v_{0pI}(t)\\ w_{pI}(t)\\ \varphi_{pxI}(t)\\ \varphi_{pyI}(t)\end{bmatrix} \tag{49}$$

则其速度 $\boldsymbol{V}_p$ 为位移 $\boldsymbol{U}_p$ 对时间 t 求导, 即

$$\boldsymbol{V}_p = \frac{\partial\boldsymbol{U}_p}{\partial t}=\dot{\boldsymbol{U}}_p \tag{50}$$

将式 (49) 代入式 (50), 可以得到

$$\boldsymbol{V}_p = \sum_{I=1}^{n_p}N_I\dot{\boldsymbol{\Delta}}_{pI} \tag{51}$$

式中

$$\boldsymbol{N}_I=\begin{bmatrix}N_I(x,y) & 0 & 0 & -zN_I(x,y) & 0\\ 0 & N_I(x,y) & 0 & 0 & -zN_I(x,y)\\ 0 & 0 & N_I(x,y) & 0 & 0\end{bmatrix}$$

速度 $\boldsymbol{V}_p$ 沿 xyz 的分量分别为 $\boldsymbol{V}_p=\{V_{px}, V_{py}, V_{pz}\}^{\mathrm{T}}$, 分别对应 u_p, v_p 和 w_p. 现假设非矩形板的密度为 ρ, 则其微元体的动能为

$$\mathrm{d}T_p = \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}_p{}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{52}$$

在整个非矩形板内进行积分, 可以得到整块平板的动能为

$$T_p = \frac{1}{2}\iiint_\Omega\rho\boldsymbol{V}_p{}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{53}$$

将式 (51) 代入式 (53), 得平板的动能为

$$T_p = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_p\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p \tag{54}$$

$$\left[\boldsymbol{M}_p\right]_{IJ} = \iiint_\Omega\rho\boldsymbol{N}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_J\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{55}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p$ 表示平板位移向量 $\boldsymbol{\Delta}_p$ 对时间求导的结果, 矩阵 $\boldsymbol{M}_p$ 为平板的质量矩阵.

3.2　肋条动能

肋条以时间、空间为变量的位移场为式

$$\boldsymbol{U}_s=\left\{\begin{array}{c} u_s \\ w_s \end{array}\right\}=\sum_{I=1}^{n_s}\left[\begin{array}{ccc} \Phi_I(\bar{x}) & 0 & -z\Phi_I(\bar{x}) \\ 0 & \Phi_I(\bar{x}) & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{0sI}(t) \\ w_{sI}(t) \\ \varphi_{sI}(t) \end{array}\right] \tag{56}$$

则其速度 $\boldsymbol{V}_s$ 为位移 $\boldsymbol{U}_s$ 对时间 t 求导, 即

$$\boldsymbol{V}_s=\frac{\partial \boldsymbol{U}_s}{\partial t}=\dot{\boldsymbol{U}}_s \tag{57}$$

将式 (56) 代入式 (57), 可以得到

$$\boldsymbol{V}_s=\sum_{I=1}^{n_s}\boldsymbol{\Phi}_I\dot{\boldsymbol{\Delta}}_s \tag{58}$$

式中

$$\boldsymbol{\Phi}_I=\left[\begin{array}{ccc} \Phi_I(\bar{x}) & 0 & -z\Phi_I(\bar{x}) \\ 0 & \Phi_I(\bar{x}) & 0 \end{array}\right]$$

速度 $\boldsymbol{V}_s$ 沿 $\bar{x},\bar{z}$ 的分量分别为 $\boldsymbol{V}_s=\left\{V_{p\bar{x}},V_{p\bar{z}}\right\}^{\mathrm{T}}$, 分别对应 u_s 和 w_s, 现假设肋条的密度与非矩形板的密度相同, 则其微元体的动能为

$$\mathrm{d}T_s=\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}_s{}^2\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{z} \tag{59}$$

在整个肋条内进行积分, 可以得到整个肋条的动能为

$$T_s=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{V}_s{}^2\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{z} \tag{60}$$

将式 (59) 代入式 (60), 得肋条的动能为

$$T_s=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_s\dot{\boldsymbol{\Delta}}_s \tag{61}$$

$$[\boldsymbol{M}_s]_{IJ}=\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{\Phi}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_J w_s\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{z} \tag{62}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\Delta}}_s$ 表示平板位移向量 $\boldsymbol{\Delta}_s$ 对时间求导的结果, 矩阵 $\boldsymbol{M}_s$ 为肋条的质量矩阵, 采用高斯积分计算平板和肋条的质量矩阵. 根据式 (19), 可以的到

$$T_s=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{T}_{sp}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p \tag{63}$$

当非矩形板上有多个肋条时, 可以按照类似的方法肋条的动能依次叠加到平板上. 若是肋条的几何尺寸及材料没有改变, 只是摆放位置不同, 不需重复计算每根肋条的弹性刚度矩阵, 只需计算 $\boldsymbol{T}_p$ 矩阵.

3.3 自由振动控制方程

结合文献 [34], 可以得到加肋板的应变势能为

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_p\boldsymbol{\Delta}_p+\boldsymbol{\Delta}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{T}_{sp}\boldsymbol{\Delta}_p \tag{64}$$

将式 (54) 和式 (63) 进行叠加, 可以得到整个加肋板的动能

$$T=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_p\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p+\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{sp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{T}_{sp}\dot{\boldsymbol{\Delta}}_p \tag{65}$$

由 Hamilton 原理, 可以得到加肋非矩形板的自由振动问题的控制方程

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\Delta}_p=0 \tag{66}$$

通过完全转换法处理本质边界条件, 可以得到以真实节点位移 $\bar{\boldsymbol{\delta}}_p$ 为未知量的加肋板自由振动控制方程

$$\left(\bar{\boldsymbol{K}}-\omega^2\bar{\boldsymbol{M}}\right)\bar{\boldsymbol{\Delta}}_p=0 \tag{67}$$

代入边界条件求解方程, 可以得到结构的自振频率

$$f=\frac{\omega}{2\pi} \tag{68}$$

4 算例分析

以菱形及加肋圆板 (单肋条板及垂直双肋条板) 为例, 先通过受均布载荷作用的单肋条菱形板的肋条位置优化分析验证本文算法的准确性, 再采用遗传算法[35] 优化局部载荷作用下单肋、双肋菱形及圆形板的肋条位置, 控制板中点挠度最小和最大化加肋板的自振频率.

在遗传算法优化中, 本文使用 rand 函数在非矩形板上随机生成肋条的 20 个初始位置, 采用轮盘赌选择法, 单点交叉算子 (交叉概率 $P_{\mathrm{c}}=0.5$), 基本位变异方式 (变异概率 $P_{\mathrm{m}}=0.1$), 并利用连续几代的个体适应度的平均值 (或方差) 作为终止准则, 反复迭代计算找出最优解.

4.1 加肋菱形板控制点最小挠度肋条位置优化

4.1.1 本文优化方法的有效性分析

一四边铰支的加肋菱形板 (图 7), $E=68$ GPa, $\mu=0.27$, $h_s=0.08$ m, h_p, t_s 均为 0.01 m, $l_1=l_2=1.5$ m. 加肋菱形板受均布载荷作用 $q=50$ kN/m², 显然在该载荷作用下使板中点挠度最小的肋条最优位置为 $x=0.75$ m. 现采用本文所述的方法进行 10 次优化分析: 种群数选为 20 (编号为 1 至 20), 遗传终止迭代的次数定为 30, 无网格方案为 $n=10$. 10 次优化分析结果见表 1, 相应的波动曲线如图 8 所示.

结果表明: 在十次优化结果中, 除第 6 次优化结果误差相对较大 (30.1333%), 其余的相对误差均在 3% 以内, 其中第 9 的优化结果最佳. 第 6 次计算结果误差相对较大的主要原因是: 遗传算法在迭代过程中会出现陷入局部最优解的情况. 以下分别就第 9 次和第 6 次的结果作详细分析:

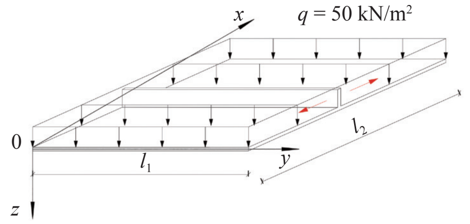


图 7　受均布荷载作用的单肋菱形板

Fig. 7　Single stiffener stiffened plate subjected to uniformly distributed load

表 1　均布荷载下加肋菱形板肋条位置 10 次优化结果

Table 1　Results of rib position optimization of the skew stiffened plate under uniformly distributed load

No.	Present results x/m	Deflection/ mm	Theoretical results x/m	Deflection/ mm	Relative errors/ %
1	0.757877	9.55306	0.75	9.35654	1.0502
2	0.746311	9.44857	0.75	9.35654	−0.4918
3	0.752845	9.42753	0.75	9.35654	0.3794
4	0.767312	9.82657	0.75	9.35654	2.3083
5	0.747522	9.41837	0.75	9.35654	−0.3304
6	0.524013	12.17842	0.75	9.35654	30.1333
7	0.751636	9.47291	0.75	9.35654	0.6219
8	0.764767	9.72500	0.75	9.35654	1.9690
9	0.754664	9.39735	0.75	9.35654	0.2181
10	0.744043	9.50517	0.75	9.35654	−0.7943

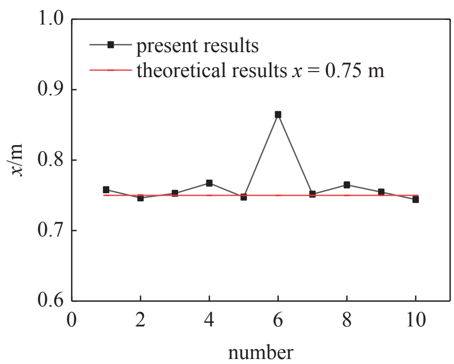
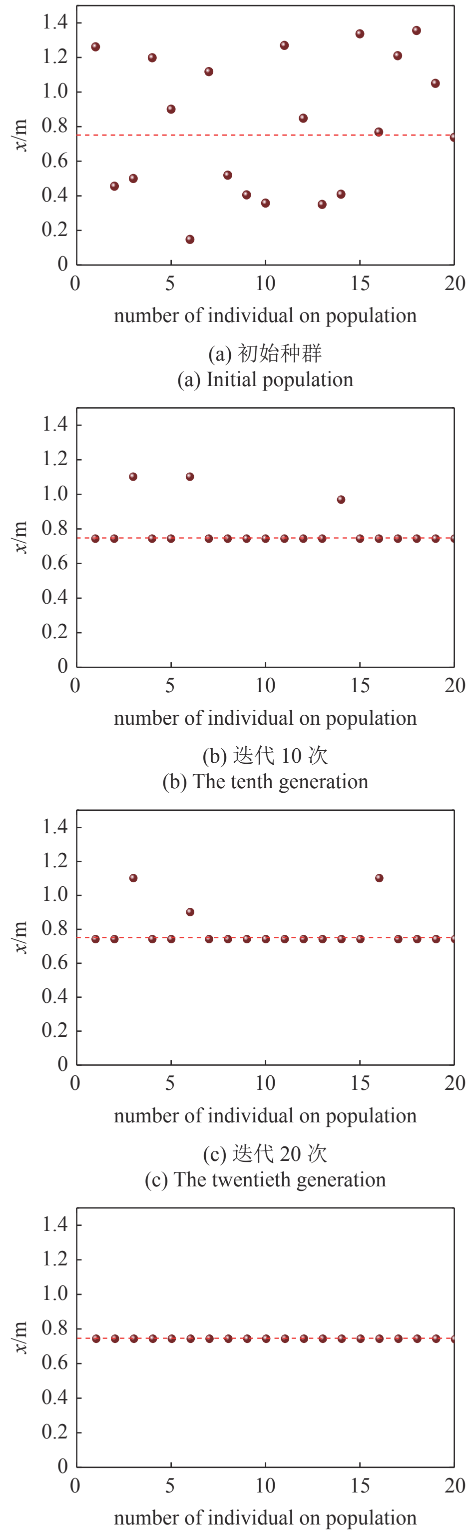


图 8　均布荷载作用下本文解与理论解的对比

Fig. 8　Comparison of the presented solution and the theoretical solution

(1) 第 9 次计算结果分析: 第 9 组数据迭代 1 次、10 次、20 次及 30 次的种群分布情况如图 9



(a) 初始种群
(a) Initial population

(b) 迭代 10 次
(b) The tenth generation

(c) 迭代 20 次
(c) The twentieth generation

(d) 迭代 30 次
(d) The thirtieth generation

图 9　均布荷载作用下单肋条优化迭代过程的种群分布 (第 9 次计算结果)

Fig. 9　Population distribution of single rib optimization iterative process under uniform load (the 9th result)

所示 (虚线位置 $x = 0.75$ m 为本算例最优解), 并以样本方差式描述肋条的位置与最优解之间的偏离程度.

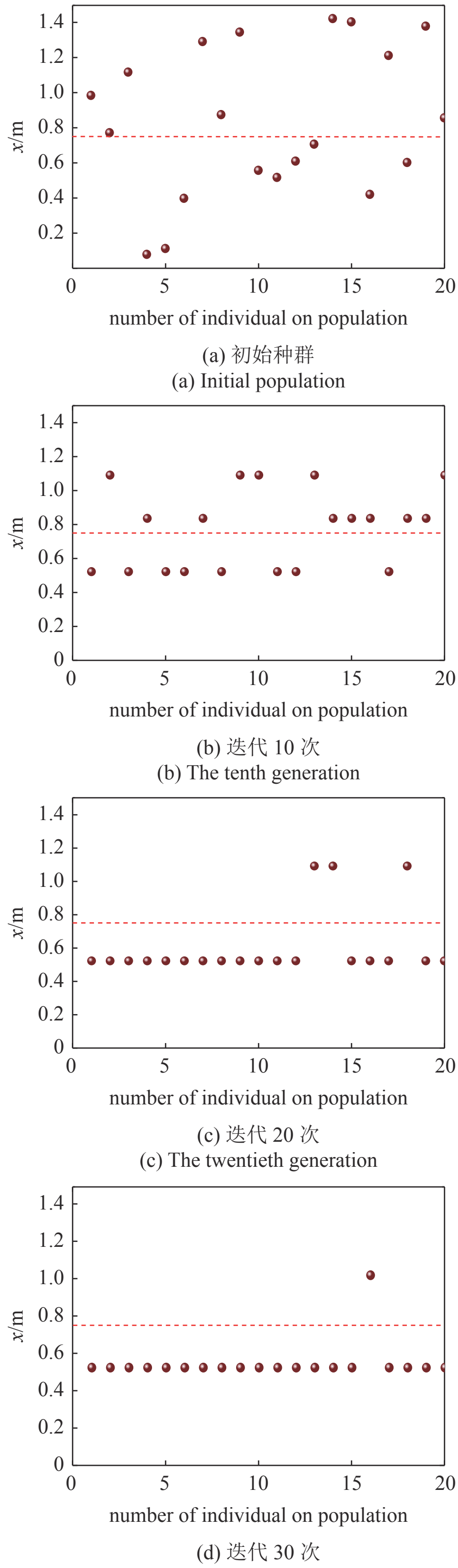
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{69}$$

式中, n 为样本容量, 即种群个体的数目, 取值为 20, 随机变量 x_i 为肋条的位置, $\bar{x}$ 为最优解, 本算例中 $\bar{x} = 0.75$ m, 初始种群、迭代 10 次、20 次及 30 次的方差分别为 0.1593, 0.0155, 0.0142, 0.0018.

由图 9 可知随着迭代次数的增加, 种群中的优势个体逐渐增多, 个体逐步向最优解靠近, 当迭代次数达到一定值时结果收敛, 证明了遗传算法的有效性. 由第 10 代和第 20 代种群的分布发现, 在同一代种群中 (或者不同代种群之间) 有些个体是相同的, 这是由于在遗传算法的迭代中大概率是种群里适应度高的个体参与到下一步运算, 从而引起部分个体重复出现. 每一代的最优解逐渐向全局最优解 ($x =$ 0.75 m) 靠近, 第 10 代的种群中已出现 17 个相同且优质个体, 直至第 30 代, 种群中所有个体均相同且优质, 即结果收敛于最优解. 此外, 由初始种群的分布图可知个体在 0 ~ 1.5 m 范围内随机且分散分布, 说明了遗传算法在优化过程中搜索的随机性和全局寻优性能.

(2) 第 6 次计算结果分析: 第 6 组数据迭代一次、10 次、20 次及 30 次的种群分布情况如图 10 所示, 方差计算结果分别为 0.189, 0.049, 0.061, 0.052. 结果表明: 随着迭代次数的增加, 群体的总体分布趋势亦是逐渐向最优解靠近, 但最终收敛于一个局部最优解 (在最优解附近), 且在进化过程中出现了优势个体丢失的情况, 例如第一代出现了个体最优点 $x = 0.762$ m, 却在第 10 代丢失. 这主要是由于传统的遗传体制和根据适应度进行比例选择的保留策略, 会让适应度值大的优势个体在下一代进化选择中得到相对较多的取样, 而某些适应性较差的劣势个体则被过早丢弃, 随着迭代代数的递增, 产生了局部最优解.

以上研究表明: 本文方法可以找出肋条的最佳位置, 在特定载荷和边界的情况下使得加肋圆板的中点挠度最小. 另外在寻优过程中可能出现收敛于局部最优解的现象, 需要通过多次计算, 对比所得结果找出最优解以保证准确性.



(a) 初始种群
(a) Initial population

(b) 迭代 10 次
(b) The tenth generation

(c) 迭代 20 次
(c) The twentieth generation

(d) 迭代 30 次
(d) The thirtieth generation

图 10 均布荷载作用下单肋条优化迭代过程的种群分布 (第 6 次计算结果)

Fig. 10 Population distribution of single rib optimization iterative process under uniform load (the 6th result)

4.1.2　局部载荷作用的单肋条位置优化

在 4.1.1 节算例的基础上将均布载荷改成局部载荷, 载荷大小改为 100 kN/m², 其余参数不变, 如图 11 所示. 进行十次优化计算, 结果见表 2, 表明第 10 次计算结果最优, 控制点 (板中点) 的位移最小 (5.05741 mm), 故选 x = 0.662906 m 为最优解. 第 10 组初始种群、迭代 10 次、20 次以及 30 次的种群分布情况图 12 (虚线位置 x = 0.662906 m), 其样本方差分别为 0.057, 0.036, 0.022, 0.014. 结果表明: 随着迭代次数的递增种群逐渐向最优点靠近, 最终可求出在相应载荷作用下加肋菱形板使控制点挠度最小的肋条最佳摆放位置.

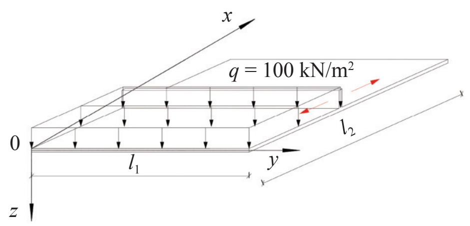


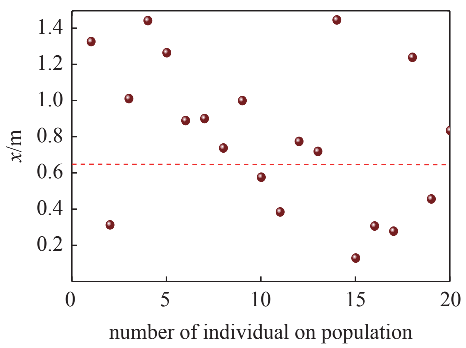
图 11　局部荷载下单肋条菱形板

Fig. 11　Single-stiffened skew plate under local load

表 2　局部布荷载下双肋条位置优化结果

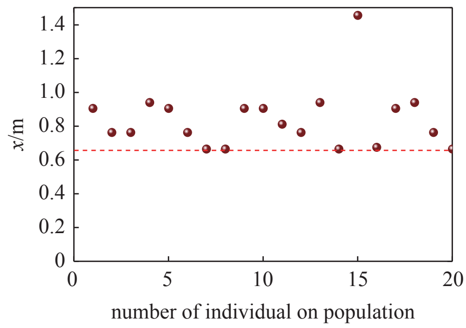
Table 2　Results of rib position optimization under local load

No.	rib position x	modpoint deflection/mm
1	0.631570	5.11805
2	0.670169	5.51728
3	0.669569	5.51653
4	0.646980	5.52643
5	0.752411	5.53346
6	0.665160	5.51104
7	0.694006	5.12778
8	0.650185	5.52243
9	0.667421	5.51386
10	0.662906	5.05741



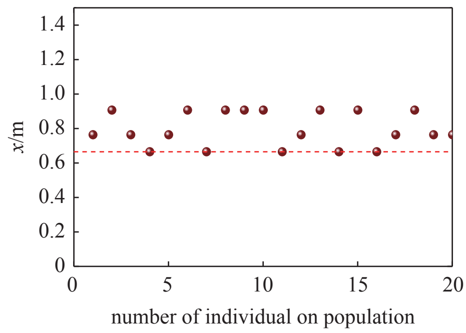
(a) 初始种群

(a) Initial population



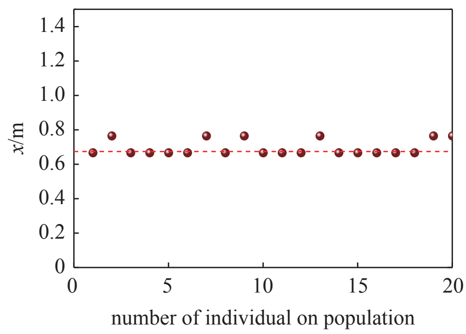
(b) 迭代 10 次

(b) The tenth generation



(c) 迭代 20 次

(c) The twentieth generation



(d) 迭代 30 次

(d) The thirtieth generation

图 12　局部荷载作用下单肋条优化迭代过程的种群分布

Fig. 12　Population distribution of single rib optimization iterative process under local load

4.1.3　局部载荷作用的双肋条位置优化

在 4.1.2 节算例的基础上增加肋条 (记为肋条 I 和肋条 II), 载荷变为 180 kN/m², 如图 13 所示. 考虑局部载荷作用对肋条 I (平行于底边) 和肋条 II (平行于斜边) 的位置进行优化 (仅考虑平移). 此时优化计算包含两个设计变量, 即肋条 I 的 x_1 和肋条 II 的 x_2, 种群个数取为 30 个, 十次优化计算结果见表 3, 表明第 6 次计算结果最优, 菱形板的控制点挠度位移最小 (5.979 mm), 故选肋条 I x_1 = 0.65012 m、肋条 II x_2 = 0.62133 m 为最优解. 初始种群、迭代 10 次、20 次及 30 次的种群分布如图 14 所示 (虚线位置 x_1 = 0.65012 m, x_2 = 0.62133 m), 样本方差见分别为 0.502, 0.261, 0.115, 0.085.

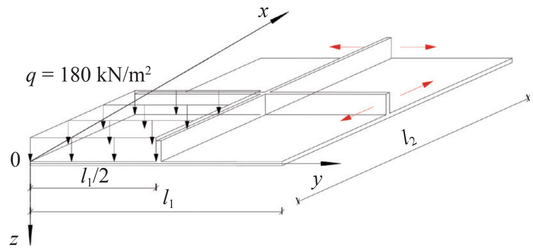


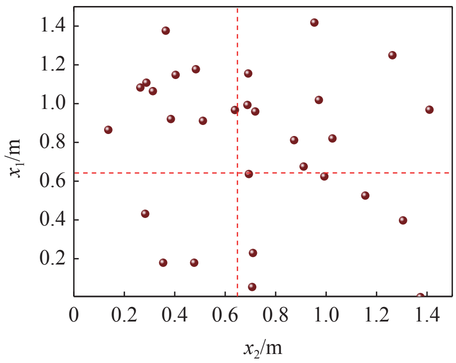
图 13 局部荷载下双肋条菱形板

Fig. 13 Double-stiffened skew plate under local load

表 3 局部布荷载下双肋条位置优化结果

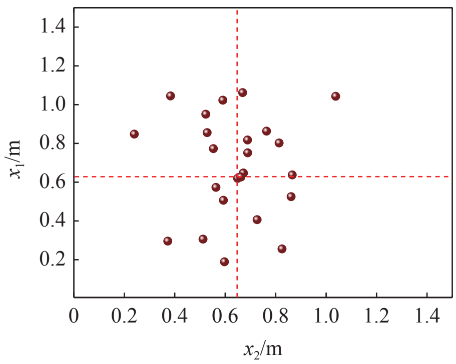
Table 3 Results of double ribs position optimization under local load

No.	x_1/m	x_2/m	Midpoint deflection/mm
1	0.661 52	0.655 21	5.995 17
2	0.753 92	0.749 56	6.068 45
3	0.651 61	0.602 61	5.990 52
4	0.660 89	0.442 67	6.454 33
5	0.691 29	0.756 87	6.101 83
6	0.650 12	0.621 33	5.979 00
7	0.759 85	0.690 62	6.102 05
8	0.755 41	0.552 56	7.051 98
9	0.651 95	0.688 62	6.102 91
10	0.708 22	0.749 12	6.112 53



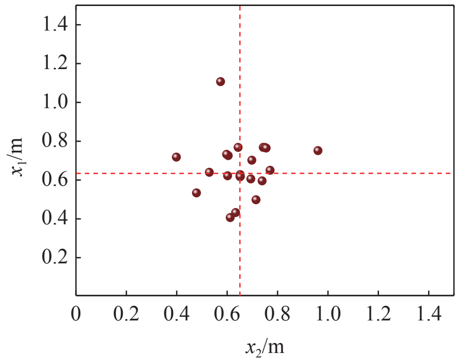
(a) 初始种群

(a) Initial population



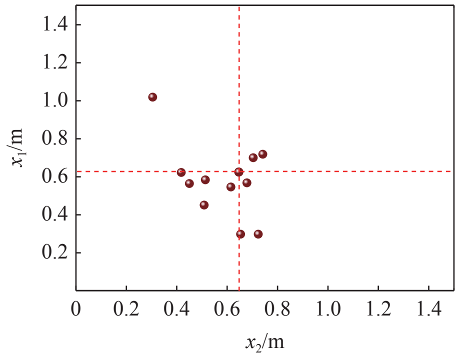
(b) 迭代 10 次

(b) The tenth generation



(c) 迭代 20 次

(c) The twentieth generation



(d) 迭代 30 次

(d) The thirtieth generation

图 14 局部荷载作用下双肋条优化迭代过程的种群分布

Fig. 14 Population distribution of double-rib optimization iterative process under local load

由种群分布图及方差结果可看出: 随着迭代次数的递增种群逐渐向最优解靠近, 最终求出局部载荷作用下肋条的最佳摆放位置, 说明本文方法在包含多个变量的双肋条板优化方面亦是有效的. 对比 4.1.1 和 4.1.2 节算例的单肋优化结果及 4.1.3 节的双肋优化结果, 可以发现, 对单肋的位置进行优化时, 随着迭代次数的增加, 种群的个体收敛更快, 且最后收敛于同一位置的概率更大, 对双肋的位置进行优化时, 即使迭代到 30 代, 种群个体中仍存在一些较差的个体, 且收敛于同一位置的概率相对较小. 主要是由于双肋的位置优化增加了设计变量, 个体变异的随机性更大, 且优化问题相对复杂.

4.2 加肋圆板最大频率肋条位置优化

4.2.1 单肋条位置优化

一周边铰支的加肋圆板如图 15 所示 (圆板中有一固定肋条 I), $R = 0.8$ m, $h_s = 0.08$ m, h_p 和 t_s 均为 0.01 m, $E = 210$ GPa, $\mu = 0.3$, $\rho = 7800$ kg/m³. 现优化肋条 II 的 (旋转) 位置, 使加肋圆板的一阶自振频率

最大化. 设计变量为肋条 II 与 x 轴的夹角 θ, 约束条件为 $\theta \in [0, \pi/2]$. 采用本文所述的方法进行 10 次优化分析: 种群数选为 20 (编号为 1 ~ 20), 遗传终止迭代的次数定为 30, 无网格方案为 n = 10, 10 次优化分析结果见表 4.

表明第 3 次计算结果最优, 加肋圆板频率最大 (67.527 59), 故选肋条 II θ = 1.549 06 rad 为最优解. 第 3 次计算的初始种群、迭代 10 次、20 次及 30 次的种群分布如图 16 所示 (虚线位置 θ_1 = 1.549 06 rad), 样本方差分别为 0.813, 0.123, 0.064, 0.012. 由种群分布图及方差结果可看出: 随着迭代次数的递增种群逐渐向最优解靠近, 最终求出使加肋板的基频最大化的肋条最佳摆放位置.

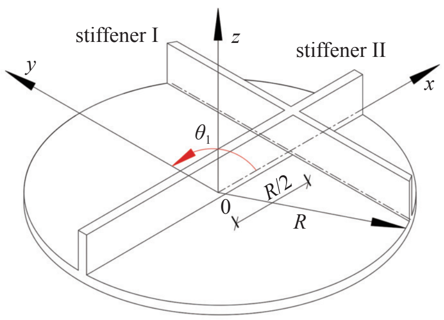


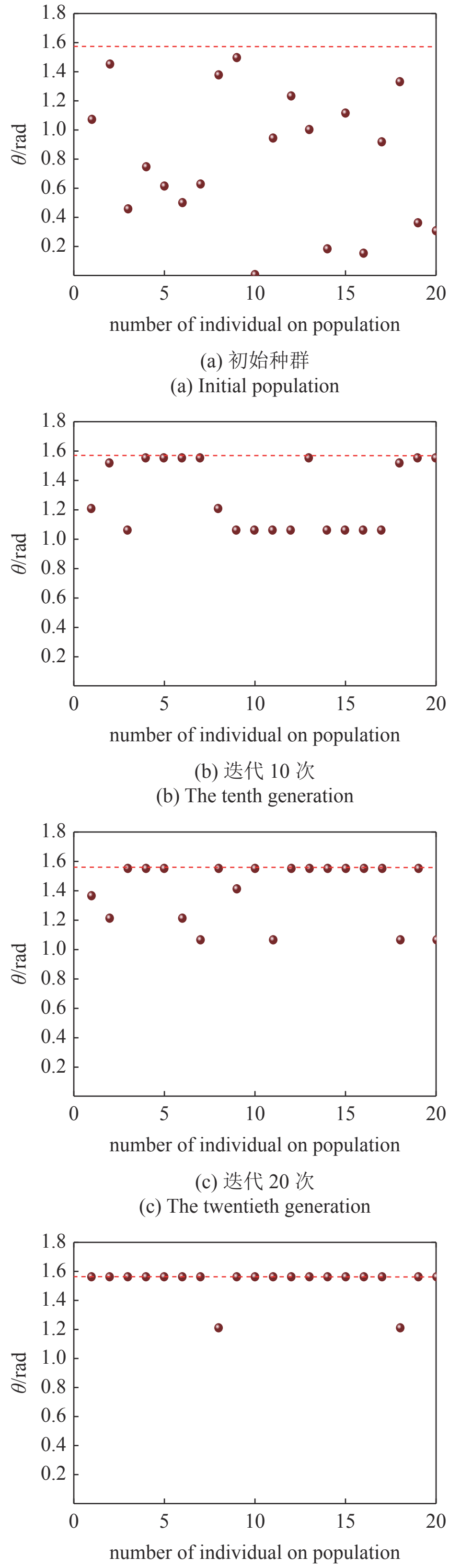
图 15　双肋条加肋圆板

Fig. 15　Circular stiffened plate with two stiffeners

表 4　加肋圆板单肋条位置优化结果

Table 4　Results of rib position optimization of circular stiffened plate

No.	Rib position θ	Base frequency/Hz
1	1.528 98	67.309 54
2	1.540 31	67.432 55
3	1.549 06	67.527 59
4	1.557 04	67.614 21
5	1.256 32	65.274 00
6	1.414 89	66.070 94
7	0.939 44	61.492 03
8	1.526 31	67.280 55
9	1.431 49	66.251 19
10	1.419 76	66.123 86



(a) 初始种群
(a) Initial population

(b) 迭代 10 次
(b) The tenth generation

(c) 迭代 20 次
(c) The twentieth generation

(d) 迭代 30 次
(d) The thirtieth generation

图 16　加肋圆板单肋条优化迭代过程的种群分布

Fig. 16　Population distribution of single rib optimization iterative process of circular stiffened plate

4.2.2 双肋条位置优化

一直边固定的加肋半圆板如图 17 所示, R = 0.8 m, h_s = 0. 06 m, h_p, t_s 均为 0.01 m, E = 210 GPa, μ = 0.3. 半圆形板上有肋条 I 和肋条 II, 现优化肋条 I 和肋条 II 的 (旋转) 位置, 使加肋半圆板的一阶自振频率最大化. 肋条 I 和肋条 II 的设计变量分别为 θ_1(肋条 I 与 x 的夹角) 和 θ_2(肋条 II 与 y 的夹角), 约束条件为 $\theta_1 \in [0, \pi/2]$, $\theta_2 \in [0, \pi/2]$. 采用本文所述的方法进行 10 次优化分析: 种群数选为 20(编号为 1 至 20), 遗传终止迭代的次数定为 30, 无网格方案为 n = 10, 10 次优化分析结果表 5.

表明第 8 次计算结果最优, 菱形板的控制点挠度位移最小 (48.1778), 故选肋条 I θ_1 = 0.36818 rad 和肋条 II θ_2 = 0.37342 为最优解. 第 8 次计算的初始种群、迭代 10 次、20 次及 30 次的种群分布如图 18 所示 (虚线位置 θ_1 = 0.36818 rad 和肋条 II θ_2 = 0.37342), 样本方差分别为 0.825, 0.291, 0.154, 0.07.

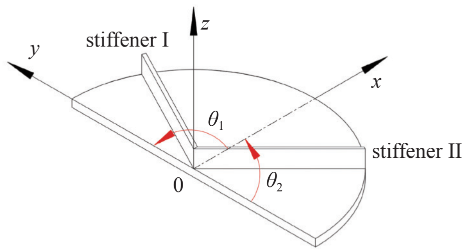


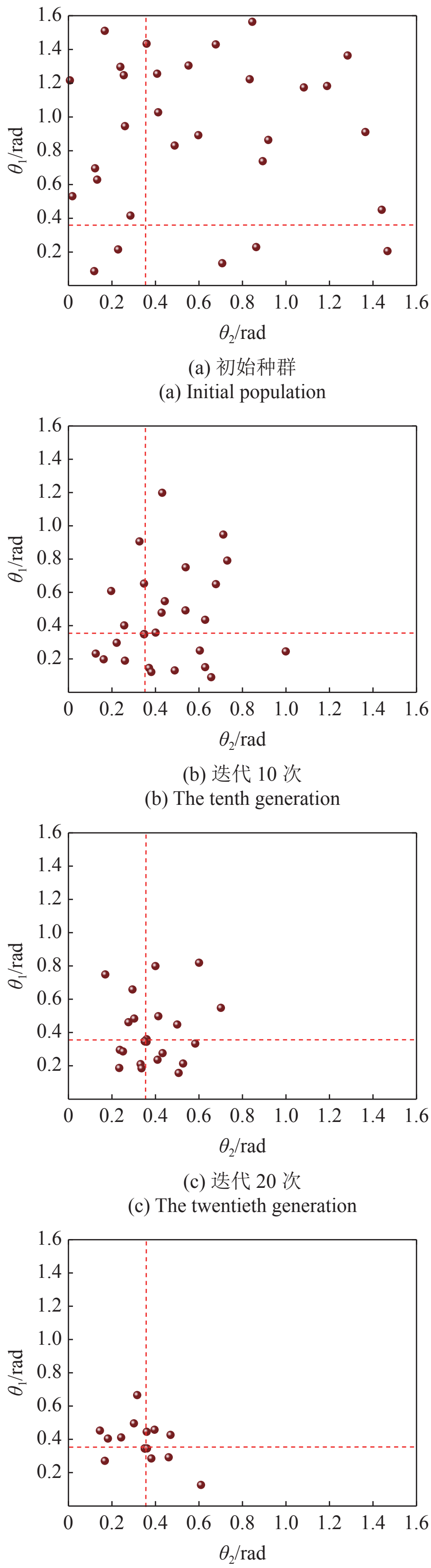
图 17 双肋条加肋圆板

Fig. 17 Circular stiffened plate with two stiffeners

表 5 加肋半圆板条位置优化结果

Table 5 Results of double ribs position optimization of semicircular stiffened plate

No.	θ_1/rad	θ_2/rad	Base frequency/Hz
1	0.45601	0.44118	46.0592
2	0.57187	0.56237	42.4454
3	0.43837	0.43800	46.5886
4	0.38377	0.37132	48.1074
5	0.34707	0.33374	48.1441
6	0.31832	0.31030	47.9313
7	0.27696	0.26809	46.6987
8	0.36818	0.37342	48.1778
9	0.39179	0.40400	48.0054
10	0.33078	0.31961	48.0986



(a) 初始种群

(a) Initial population

(b) 迭代 10 次

(b) The tenth generation

(c) 迭代 20 次

(c) The twentieth generation

(d) 迭代 30 次

(d) The thirtieth generation

图 18 加肋半圆板肋条优化迭代过程的种群分布

Fig. 18 Population distribution of double-rib optimization iterative process of semicircular stiffened plate

由种群分布图及方差结果可看出: 随着迭代次数的递增种群逐渐向最优解靠近, 且前 10 代的种群收敛速度相对较快, 最终求出使半圆加肋板的基频最大化的肋条最佳摆放位置.

5　结论

本文提出了加肋非矩形板肋条位置优化的无网格分析方法, 通过不同的算例分析, 得出如下结论:

(1) 基于遗传算法所提出的肋条位置无网格优化方法, 可有效优化加肋非矩形板的肋条位置, 使控制点的挠度最小或自振频率最大: 在特定条件下 (载荷、边界、加肋板形状), 随着优化迭代次数的递增, 最终可找出相应条件下肋条的最佳摆放位置.

(2) 在优化计算中, 遗传算法用来进行样本选择, 再通过本文所建立的加肋非矩形板无网格模型进行计算, 优化结果可能收敛于局部最优解, 因此需要进行多次优化计算, 通过对比分析来选出最优解.

(3) 本文建立的肋条与非矩形板之间的节点参数转换方程, 完全基于离散点得到问题的近似数值解, 点与点之间没有单元或其他的直接连接, 即使在优化过程中肋条位置不断改变也不会导致平板节点重新分布, 因此, 可以实现肋条在平板上按任意位置布置, 且可在保证计算结果满足所需精度的情况下保持平板的离散方案不变. 在每一次优化进程中, 仅需要重新计算式 (20) 的 $\boldsymbol{T}_p$ 矩阵, 在考虑几何非线性影响的前提下, 成功省去了繁杂的网格重置工作, 极大地减少了计算量, 在工程实际上具有一定的优势.

参　考　文　献

1 Yi K, Choi KK, Kim NH, et al. Continuum-based design sensitivity analysis and optimization of nonlinear shell structures using meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 68(2): 231-266

2 彭细荣, 隋允康. 考虑破损-安全的连续体结构拓扑优化 ICM 方法. 力学学报, 2018, 50(3): 11 (Peng Xirong, Sui Yunkang. A damage-safe continuum structure topology optimization ICM method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 11 (in Chinese))

3 陈炉云, 张裕芳. 基于遗传算法的复合材料结构-声辐射优化研究. 复合材料学报, 2012, 29(3): 203-207 (Chen Luyun, Zhang Yufang. Research on structure-acoustic radiation optimization of composite materials based on genetic algorithm. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2012, 29(3): 203-207 (in Chinese))

4 李林远, 彭林欣. 基于无网格及混合遗传算法的矩形加肋板肋条布置优化. 应用力学学报, 2018, 35(6): 7 (Li Linyuan, Peng Linxin. Optimization of rib layout of rectangular ribbed slab based on meshless and hybrid genetic algorithm. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, 35(6): 7 (in Chinese))

5 Wodesenbet E, Kidane S, Pang SS. Optimization for buckling loads of grid stiffened composite panels. *Composite Structures*, 2003, 60(2): 159-169

6 李琳, 石峰, 项松等. 基于遗传算法和复合二次径向基函数的复合材料层合板自由振动分析. 工程数学学报, 2022, 39(2): 319-329 (Li Lin, Shi Feng, Xiang Song, et al. Free vibration analysis of composite laminates based on genetic algorithm and compound quadratic radial basis function. *Chinese Journal of Engineering Mathematics,* 2022, 39(2): 319-329 (in Chinese))

7 王选, 刘宏亮, 龙凯等. 基于改进的双向渐进结构优化法的应力约束拓扑优化. 力学学报, 2018, 50(2): 385-397 (Wang Xuan, Liu Hongliang, Long Kai, et al. Stress constrained topology optimization based on improved bidirectional progressive structural optimization method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics,* 2018, 50(2): 385-397 (in Chinese))

8 米大海, 杨睿, 周亮等. 以频率为目标的加筋平板结构优化设计研究. 机械强度, 2013, 35(2): 4 (Mi Dahai, Yang Rui, Zhou Liang, et al. Research on optimization design of stiffened plate structure with frequency as target. *Journal of Mechanical Strength*, 2013, 35(2): 4 (in Chinese))

9 Afonso S, Sienz J, Belblidia F. Structural optimization strategies for simple and integrally stiffened plates and shells. *Engineering Computations*, 2005, 22(4): 429-452

10 王博, 郝鹏, 田阔. 加筋薄壳结构分析与优化设计研究进展. 计算力学学报, 2019, 36(1): 12 (Wang Bo, Hao Peng, Tian Kuo. Research progress on the analysis and optimization design of stiffened thin shell structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, 36(1): 12 (in Chinese))

11 文立中. 偏压作用下钢木组合柱非线性分析及截面优化设计. [博士论文] 中南林业科技大学, 2021 (Wen Lizhong. Nonlinear analysis and section optimization design of steel-wood composite column under eccentric pressure. [PhD. Thesis] Central South University of Forestry and Technology, 2021 (in Chinese))

12 周俊文, 刘界鹏. 基于多种群遗传算法的钢框架结构优化设计. 土木与环境工程学报, 2022, 44(6): 1-11 (Zhou Junwen, Liu Jiepeng. Optimal design of steel frame structure based on multiple population genetic algorithm. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 2022, 44(6): 1-11 (in Chinese))

13 王栋, 李正浩. 薄板结构加筋布局优化设计方法研究. 计算力学学报, 2018, 35(2): 6 (Wang Dong, Li Zhenghao. Research on optimization design method of reinforcement layout of thin plate structure. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, 35(2): 6 (in Chinese))

14 Csonka B, Kozák I, Soares C, et al. Shape optimization of axisymmetric shells using a higher order shear deformation theory. *Structural Optimization*, 1995, 9(2): 117-127

15 T, Belytschko, Y, et al. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 1994, 37(2): 229-256

16 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用. 计算力学学报, 2001, 20(6): 730-742 (Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Research progress and application of meshless method.Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 20(6): 730-742 (in Chinese))

17 邓立克, 王东东, 王家睿等. 薄板分析的线性基梯度光滑伽辽金无

网格法. 力学学报, 2019, 51(3): 690-702 (Deng Like, Wang Dongdong, Wang Jiarui, et al. A gradient smoothing Galerkin meshfree method for thin plate analysis with linear basis function. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 690-702 (in Chinese))

18 覃霞, 刘珊珊, 吴宇等. 平行四边形加肋板自由振动分析的无网格法. 工程力学, 2019, 36(3): 24-32, 39 (Qin Xia, Liu Shanshan, Wu Yu, et al. The meshless method for free vibration analysis of parallelogram ribbed plates. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(3): 24-32, 39 (in Chinese))

19 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36 (Zhang Xiong, Liu Yan, Ma shang. Theory and application of meshless method. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1-36 (in Chinese))

20 张建平, 刘庭显, 龚曙光等. 基于无网格法的热力耦合周期性结构多目标拓扑优化. 机械工程学报, 2022, 58(14): 223-232 (Zhang Jianping, Liu Tingxian, Gong Shuguang, et al. Multi-objective topology optimization of thermomechanical coupled periodic structures based on meshless method. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(14): 223-232 (in Chinese))

21 彭林欣. 矩形加肋板线性弯曲分析的移动最小二乘无网格法. 计算力学学报, 2012, 29(2): 210-216 (Peng Linxin. Moving least squares meshless method for linear bending analysis of rectangular ribbed plates. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(2): 210-216 (in Chinese))

22 宋超, 彭慧凯, 王东东. 薄板壳屈曲分析的埃尔米特无网格法//中国计算力学大会 2014 暨第三届钱令希计算力学奖颁奖大会论文集, 2014 (Song Chao, Peng Huikai, Wang Dongdong. Hermitian meshless method for buckling analysis of thin shells//Proceedings of the China Computational Mechanics Conference 2014 and the 3rd Qian Lingxi Computational Mechanics Award Conference, 2014 (in Chinese))

23 张驰, 校金友, 张硕. 用无网格法分析功能梯度材料圆板的自由振动. 科学技术与工程, 2014, 13: 6 (Zhang Chi, Xiao Jinyou, Zhang Shuo. Analysis of free vibration of circular plates with functionally gradient materials by meshless method. *Science Technology and Engineering*, 2014, 13: 6 (in Chinese))

24 杨柳, 彭建设. 解平行四边形板弯曲问题的 GD 法. 成都大学学报: 自然科学版, 2014, 33(3): 4 (Yang Liu, Peng Jianshe. GD method for solving parallelogram plate bending problem. *Journal of Chengdu University* (*Natural Science Edition*), 2014, 33(3): 4 (in Chinese))

25 马文涛. 二维弹性力学问题的光滑无网格伽辽金法. 力学学报, 2018, 50(5): 1115-1124 (Ma Wentao. A smoothed meshfree Galerkin method for 2 D elasticity problem. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1115-1124 (in Chinese))

26 方电新, 李卧东, 王元汉等. 用无网格法计算平板弯曲问题. 岩土力学, 2001, 22(3): 3 (Fang Lixin, Li Wodong, Wang Yuanhan, et al. Calculation of plate bending problems using the meshless method. *Rock and Soil Mechanics*, 2001, 22(3): 3 (in Chinese))

27 曾军才, 王久法, 姚望等. 正交各向异性矩形板的自由振动特性分析. 振动与冲击, 2015, 34(24): 123-127 (Zeng Juncai, Wang Jiufa, Yao Wang, et al. Analysis of free vibration characteristics of orthotropic rectangular plates. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(24): 123-127 (in Chinese))

28 Zhou L, Zheng WX. Vibration of skew plates by the MLS-Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50(7): 1133-1141

29 Reddy JN. Theory and Analysis of Elastic Plates. London: Taylor and Francis, 1999

30 彭林欣. 加肋板自由振动的移动最小二乘无单元分析. 振动与冲击, 2011, 30(6): 67-73 (Peng Linxin. Moving least squares element-free analysis of free vibration of ribbed plates. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(6): 67-73 (in Chinese))

31 Chen JS, Pan CH, Wu CT, et al. Reproducing Kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 195-227

32 Peng LX, Kitipornchai S, Liew KM. Free vibration analysis of folded plate structures by the FSDT meshfree method. *Computational Mechanics*, 2007, 39(6): 799-814

33 彭林欣. 折板结构非线性弯曲分析的移动最小二乘无网格法. 工程力学, 2011, 28(12): 126-132 (Peng Linxin. Moving least squares meshless method for nonlinear bending analysis of folded plate structures. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(12): 126-132 (in Chinese))

34 Qin X, Shen Y, Chen W, et al. Bending and free vibration analyses of circular stiffened plates using the FSDT mesh-free method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021(202-203): 106498

35 Goldberg DE. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning//Ethnographic Praxis in Industry Conference Proceedings, 1988