

时变切换时滞反馈镇定混沌系统不稳定周期轨线

曾尖尖, 郑远广

**STABILIZING UNSTABLE PERIODIC TRAJECTORIES OF CHAOTIC SYSTEMS WITH TIME-VARYING SWITCHING DELAYED FEEDBACK CONTROL**

Zeng Jianjian and Zheng Yuanguang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-361>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

含时滞反馈与涨落质量的记忆阻尼系统的随机共振

STOCHASTIC RESONANCE OF A MEMORIAL-DAMPED SYSTEM WITH TIME DELAY FEEDBACK AND FLUCTUATING MASS

力学学报. 2018, 50(4): 880-889

时变参数时滞减振控制研究

The research of time delay vibration control with time - varying parameters

力学学报. 2018, 50(1): 99-108

时变张力作用下轴向运动梁的分岔与混沌

BIFURCATION AND CHAOS OF AXIALLY MOVING BEAMS UNDER TIME-VARYING TENSION

力学学报. 2019, 51(4): 1180-1188

考虑间隙反馈控制时滞的磁浮车辆稳定性研究

STABILITY ANALYSIS OF MAGLEV VEHICLE WITH DELAYED POSITION FEEDBACK CONTROL

力学学报. 2019, 51(2): 550-557

负刚度时滞反馈控制动力吸振器的等峰优化

EQUAL-PEAK OPTIMIZATION OF DYNAMIC VIBRATION ABSORBER WITH NEGATIVE STIFFNESS AND DELAY FEEDBACK CONTROL

力学学报. 2021, 53(6): 1720-1732

基于步态切换的欠驱动双足机器人控制方法

CONTROL METHOD OF AN UNDERACTUATED BIPED ROBOT BASED ON GAIT TRANSITION

力学学报. 2018, 50(4): 871-879



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 时变切换时滞反馈镇定混沌系统不稳定周期轨线<sup>1)</sup>

曾尖尖 郑远广<sup>2)</sup>

(南昌航空大学数学与信息科学学院, 南昌 330063)

**摘要** 为提高经典时滞反馈控制镇定不稳定周期轨线的效果, 扩大受控周期轨线的稳定区域, 本文基于时变切换策略对经典时滞反馈控制进行改进, 提出了时变切换时滞反馈控制. 时变切换时滞反馈控制的控制信号仅在特定的时段中存在, 而在其他时段上不存在控制信号, 这与经典时滞反馈控制中具有固定的控制信号是不同的. 通过实例分析, 研究了时变切换时滞反馈控制在镇定不稳定周期轨线中的具体性能. 以反馈增益系数为变量, 计算受控周期轨线的最大条件 Lyapunov 指数, 得到了受控周期轨线的稳定区域随切换频率变化的关系曲线. 结果表明, 随着切换频率增大, 受控周期轨线的稳定区域呈现非平滑地变化. 当选取恰当的切换频率时, 时变切换时滞反馈控制的稳定区域显著大于经典时滞反馈控制的稳定区域. 在混沌控制的工程实践中, 控制信号常常受到一定的限制. 要实现对目标周期轨线的稳定控制, 就需要受控周期轨线具有足够大的稳定区域. 因此, 与经典时滞反馈控制相比, 本文提出的时变切换时滞反馈控制具有更广泛的应用前景.

**关键词** 混沌控制, 时滞反馈, 周期轨线, 时变切换, 条件 Lyapunov 指数

中图分类号: O323 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-361

## STABILIZING UNSTABLE PERIODIC TRAJECTORIES OF CHAOTIC SYSTEMS WITH TIME-VARYING SWITCHING DELAYED FEEDBACK CONTROL<sup>1)</sup>

Zeng Jianjian Zheng Yuanguang<sup>2)</sup>

(School of Mathematics and Information Sciences, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

**Abstract** In order to improve the effect of the classical delayed feedback control in stabilizing the unstable periodic trajectory and expand the stability region, the time-varying switching strategy is used to modify the classical delayed feedback control, which leads to the method of time-varying switching delayed feedback control. The control signal of the time-varying switching delayed feedback control only exists in specific time intervals, and there is no control signal in other time intervals, which is different from the fixed control signal in the classical delayed feedback control. Through case studies, the specific performance of time-varying switching delayed feedback control in stabilizing unstable periodic trajectory is investigated. The maximum conditional Lyapunov exponent of the controlled periodic trajectory is calculated as a function of the feedback strength. The relationship between the stability region of the controlled periodic trajectory and the switching frequency is obtained. The results show that with the increase of switching frequency, the stable region of the controlled periodic trajectory changes non smoothly. The stability region of the time-varying switching delayed feedback control is significantly larger than that of the classical delayed feedback control when the switching frequency is

2022-08-08 收稿, 2022-10-08 录用, 2022-10-09 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11872197).

2) 郑远广, 教授, 主要研究方向: 时滞系统动力学与控制. E-mail: zheng-yg@nchu.edu.cn

引用格式: 曾尖尖, 郑远广. 时变切换时滞反馈镇定混沌系统不稳定周期轨线. 力学学报, 2022, 54(12): 3477-3485

Zeng Jianjian, Zheng Yuanguang. Stabilizing unstable periodic trajectories of chaotic systems with time-varying switching delayed feedback control. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(12): 3477-3485

properly selected. In the engineering practice of chaos control, the control signal is often constrained. To achieve the stable control of the target periodic trajectory, the controlled periodic trajectory needs to have a large enough stable region. Therefore, compared with the classical time-delay feedback control, the time-varying switching time-delay feedback control proposed in this paper has a wider application prospect.

**Key words** chaos control, delayed feedback, periodic trajectory, time-varying switching, conditional Lyapunov exponent

## 引言

混沌是非线性系统中普遍存在的一种动力学现象,其典型的特征是对扰动的敏感性和不可预测性.在许多实际工程系统中,混沌常常是有害的.生态系统中的混沌会导致物种的突然消亡<sup>[1-2]</sup>;被动行走机器人中的混沌会降低行走效率,同时增加能量消耗<sup>[3-4]</sup>;网络信息传输中的混沌会导致网络堵塞<sup>[5]</sup>.因此,混沌控制是一项重要的研究课题<sup>[6-7]</sup>.在早期的研究中,人们常常通过改变系统的分叉参数<sup>[8]</sup>来达到消除混沌的目的,或者用外部周期信号去同步混沌系统,从而引导混沌系统到期望的周期运动上来.采用这些控制方法控制混沌时,受控系统的周期解轨线并不是原系统的混沌吸引子中包含的轨线,因此,通常需要比较大的控制力和比较大的能量消耗.

由于混沌吸引子中包含无数个不稳定周期轨线<sup>[9]</sup>,基于这一事实,人们提出了 OGY 控制方法<sup>[10]</sup>.当系统运动到预定的不稳定周期轨道附近时,对系统关键参数进行微小的摄动从而把系统稳定到该周期轨道上.由于该方法是把混沌系统引导到混沌吸引子中原有的不稳定周期轨道上,因此仅需要微小的控制力和少量的能量消耗.然而,OGY 控制方法对外界扰动极度敏感,当系统受到扰动远离预定的周期轨道运动时,该方法无法实施.为了克服这一缺点,人们提出了时滞反馈控制(DFC)<sup>[11]</sup>.DFC 用系统输出状态信号和输出状态信号的适当滞后值之差生成反馈控制信号,其中的时滞量设置成等于预定要控制的不稳定周期轨道的周期.当受控周期轨道稳定后,DFC 的控制信号消失,因此 DFC 不会改变原系统的周期轨道,仅改变其稳定性.在使用 DFC 对混沌系统进行控制时,不需要知道系统精确的数学模型,只需要测得目标周期轨道的周期.DFC 使用方便,且具有较好的控制效果,在实际工程中得到广泛的应用<sup>[12-14]</sup>.

在经典 DFC 的使用中,人们发现该方法存在一

定的局限性.比如,DFC 存在奇数限制(ONL)<sup>[15]</sup>.ONL 表明 DFC 不能稳定具有奇数个实部大于零的条件 Lyapunov 指数的周期轨线.此外,用 DFC 稳定某些不稳定周期轨线时,受控周期轨线常常具有比较小的稳定区域<sup>[16]</sup>.这里的稳定区域是指参数空间的某个区域,当控制参数在这个区域中取值时,受控周期轨线是稳定的.为了提高经典 DFC 的控制效果,人们对该方法进行了多方面的改进<sup>[16-18]</sup>.比如,人们提出了半周期延迟反馈控制来避免 DFC 的奇数限制<sup>[19]</sup>;文献<sup>[20]</sup>基于梯度下降法设计了一种自动调整反馈增益的方法,该方法可以有效地确定稳定目标周期轨线的反馈增益系数;为了稳定高周期的不稳定周期轨线,文献<sup>[16]</sup>提出了广义时滞反馈控制方法(EDFC).

切换控制策略在控制工程中得到广泛应用<sup>[21-23]</sup>.Bang-bang 控制的控制信号在两个常值之间切换<sup>[24]</sup>,该方法能够实现最短时间控制.滑模控制是另一种常用的切换控制技术.滑模控制的主要思想是,通过不连续地切换控制信号,使受控系统到达并保持在设定的滑模面上,从而把系统稳定到期望的平衡状态<sup>[25]</sup>.在系统耦合同步中,切换策略也被用来改变系统的耦合方式以提高系统的同步能力<sup>[26]</sup>.周期耦合是一种依赖于时间和切换频率的耦合方式<sup>[27-28]</sup>,只有在特征的时间段上,系统之间存在耦合,而在其他时间段上,系统之间不存在耦合.研究表明,具有适当切换频率的周期耦合系统同步性能要显著优于标准耦合系统的同步性能<sup>[26]</sup>.为了理解周期耦合对同步流形稳定性的影响,文献<sup>[29]</sup>通过计算同步流形的局部条件 Lyapunov 指数,发现周期耦合以一种非线性的方式修正了同步流形的稳定性.

在混沌控制的工程实践中,受控系统常常存在某些不确定性因素,同时控制参数也会受到一定的限制.要实现目标周期轨线的稳定控制,就需要受控周期轨线具有足够大的稳定区域.因此,采用适当的方法进一步扩大受控周期轨线的稳定区域具有重

要的工程实践意义. 本文基于时变切换策略<sup>[26,30]</sup>对经典 DFC 控制方法进行改进, 提出了时变切换时滞反馈控制方法 (TSDFC). 其目的是提高经典 DFC 的控制效果, 扩大受控周期轨线的稳定区域. 本文的结构如下: 在第二节中, 提出时变切换时滞反馈控制方法. 在第三节中, 通过实例分析, 研究 TSDFC 的控制性能. 最后在第四节中, 对本文的研究工作进行总结并对相关问题进行讨论.

## 1 TSDFC

考虑受控的非线性系统

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)) + U(t) \quad (1)$$

式中,  $\dot{X}(t)$  为  $X(t)$  对时间  $t$  的导数,  $X(t) \in R^m$  为系统输出状态变量,  $F(t, X(t))$  为连续可微的非线性函数. 经典 DFC 的反馈控制信号为

$$U(t) = G(X(t-\tau) - X(t)) \quad (2)$$

式中,  $G$  为反馈增益系数矩阵,  $\tau$  为时滞.

选取系统中某个周期为  $T$  的不稳定周期轨线  $X_*(t)$  作为待镇定的目标周期轨线. DFC 是将时滞  $\tau$  设定等于目标周期轨线  $X_*(t)$  的周期  $T$ , 再通过调节反馈增益系数矩阵  $G$ , 使受控不稳定周期轨线  $X_*(t)$  达到稳定. 当受控周期轨线  $X_*(t)$  稳定时, 反馈控制信号  $U(t)$  趋于无穷小.

虽然 DFC 使用方便, 但受控周期轨线  $X_*(t)$  常常仅有较小的稳定区域. 为了提高 DFC 的控制效果, 扩大受控周期轨线  $X_*(t)$  的稳定区域, 本文基于时变切换策略<sup>[26,30]</sup>对 DFC 进行改进, 提出了 TSDFC. TSDFC 的反馈控制信号为

$$U^t(t) = G^t(X(t-T) - X(t)) \quad (3)$$

式中, 反馈增益系数矩阵为

$$G^t = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}[\cos(\omega t)] + 1 \} \times G \quad (4)$$

式中,  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $G$  为定常反馈增益系数矩阵,  $\omega$  为切换频率, 其决定了切换速度的快慢. TSDFC 的控制信号仅在特征的时段上存在, 而在其他时段控制信号不存在, 即控制信号按照给定的频率  $\omega$  进行周期性切换.

为确定受控周期轨线  $X_*(t)$  的稳定区域, 求得主稳定方程为<sup>[28]</sup>

$$\dot{\eta}(t) = DF(t, X_*(t))\eta(t) + G^t(\eta(t-T) - \eta(t)) \quad (5)$$

式中,  $\eta(t) = X(t) - X_*(t)$  为偏差变量,  $DF(t, X_*(t))$  为  $F(t, X(t))$  在  $X_*(t)$  上的雅可比矩阵.  $X_*(t)$  的稳定性由主稳定方程 (5) 的条件 Lyapunov 指数确定. 当主稳定方程 (5) 的所有条件 Lyapunov 指数均具有负实部时, 受控周期轨线  $X_*(t)$  稳定.

主稳定方程 (5) 是时滞系统, 其初值状态空间是无穷维 Banach 空间  $C = C([-T, 0], R^m)$ . 在 Banach 空间  $C$  中的初始函数定义为  $\eta_{t_0}(\theta) = \eta(t_0 + \theta)$ , 其中,  $t_0$  为初始时间,  $\theta \in [-T, 0]$ . 系统 (5) 的最大条件 Lyapunov 指数定义为  $\lambda_m = \max_{\eta_{t_0}(\theta) \in C} \lambda_{\eta_{t_0}(\theta)}$ , 其中

$$\begin{aligned} \lambda_{\eta_{t_0}(\theta)} &= \frac{1}{T} \ln \frac{\|\eta_{t_0+T}(\theta)\|_C}{\|\eta_{t_0}(\theta)\|_C} \\ &= \frac{1}{T} \ln \frac{\|\eta(t_0+T+\theta)\|_C}{\|\eta(t_0+\theta)\|_C} \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\|\phi(\theta)\|_C = \max_{\theta \in [-T, 0]} \|\phi(\theta)\|_{L_2}$  是定义在 Banach 空间  $C$  上函数  $\phi(\theta)$  的范数,  $\|\cdot\|_{L_2}$  是定义在  $R^m$  上的 Euclidean 范数.

由于系统 (5) 的初值状态空间是无穷维的, 从而无法通过对系统 (5) 进行积分来计算最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_m$ <sup>[31]</sup>. 为克服这一困难, 本文采用 Runge-Kutta 方法, 将系统 (5) 转化成具有有限维状态空间的离散系统, 进而求得最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_m$ <sup>[32]</sup>, 详细的计算过程请参考附录 A.

将 TSDFC 应用于系统 (1) 得到

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)) + G^t(X(t-T) - X(t)) \quad (7)$$

当  $\omega = 0$  时, TSDFC 退化为 DFC.

## 2 TSDFC 镇定不稳定周期轨线

本节用 TSDFC 控制两个典型的非线性混沌系统, 考察该方法镇定不稳定周期轨线的具体效果. 首先, 通过求得受控周期轨线  $X_*(t)$  的稳定区域与切换频率  $\omega$  的关系图, 找到最优切换频率, 使受控周期轨线  $X_*(t)$  的稳定区域达到最大. 其次, 对比 TSDFC 和经典 DFC 的控制效果, 阐述 TSDFC 在镇定混沌系统的不稳定周期轨线的有效性.

### 2.1 TSDFC 控制 Rössler 系统

受 TSDFC 控制的 Rössler 系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z) + g^t(x(t-T) - x) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x-c) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,  $x, y, z$  为系统状态变量,  $a, b, c$  为系统参数,  $g^t = \frac{1}{2} \{\text{sgn}[\cos(\omega t)] + 1\} \cdot g$  为反馈增益系数, 其在定常值  $g$  和 0 之间周期切换. 不失一般性, 这里假设状态变量  $x$  为唯一可获得的系统状态变量, 则反馈控制信号表示为  $U^t(t) = g^t(x(t-T) - x(t))$ .

将系统参数设定为  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ , 此时 Rössler 系统呈现混沌动力学行为, 其混沌吸引子如图 1 所示.

选择 Rössler 混沌吸引子中两个典型的不稳定周期轨线  $\mathbf{X}_k(t) = (x_k(t), y_k(t), z_k(t))^T (k = 1, 2)$  作为待镇定的目标周期轨线. 图 2 展示了目标周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  在  $xoy$  平面上的投影.

为确定受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的稳定区域, 求得主稳定方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -(\eta_1 + \eta_2) + g^t(\eta_1(t - \tau_k) - \eta_1) \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_1 + 0.2\eta_2 \\ \dot{\eta}_3 &= z_k\eta_1 + (x_k - 5.7)\eta_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, 时滞  $\tau_k$  等于目标周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的周期 ( $T_1 = 5.880, T_2 = 11.760$ ). 当受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_m$  的实部小于零, 受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  稳定. 受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的稳定区域是反馈增益系数  $g$  的某个区间, 在这个区间上受控周期轨线稳定, 该区间的长度记为稳定区域宽度  $W_s$ . 受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的稳定区域越大表明控制效果越好.

当  $\omega = 0$  时, TSDFC 退化成经典 DFC. 通过计算受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的最大条件 Lyapunov 指数, 得到受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的稳定区域. 图 3 中红色虚线

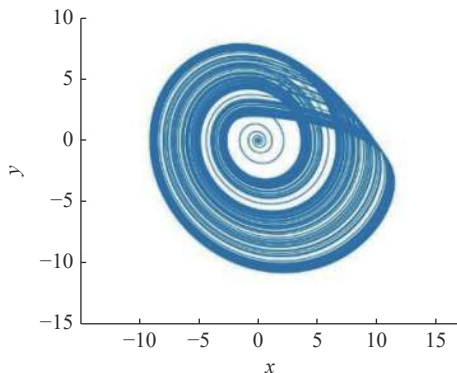
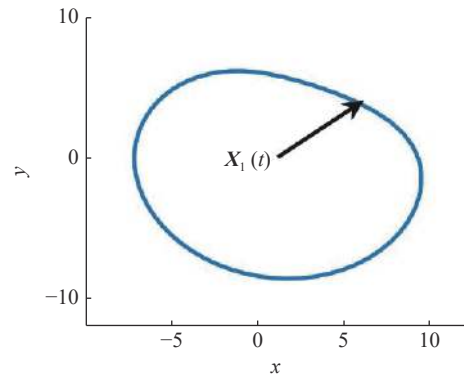
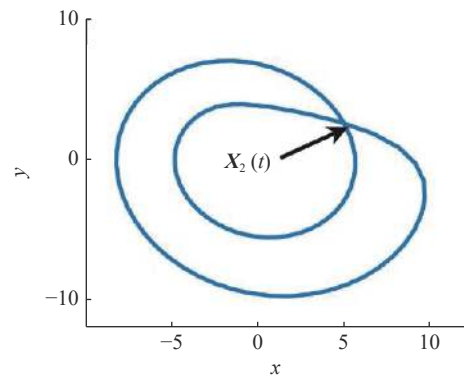


图 1 Rössler 系统的混沌吸引子  
Fig. 1 The chaotic attractor of Rössler system



(a) 周期轨线  $\mathbf{X}_1(t)$   
(a) Periodic trajectory  $\mathbf{X}_1(t)$

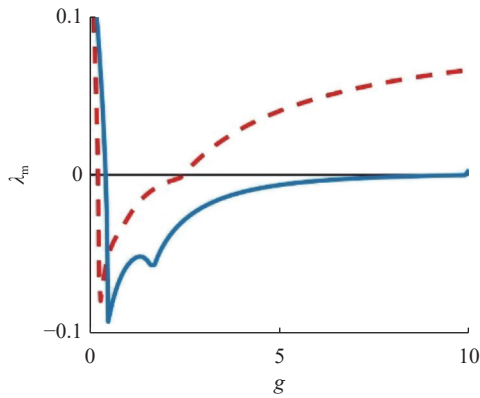


(b) 周期轨线  $\mathbf{X}_2(t)$   
(b) Periodic trajectory  $\mathbf{X}_2(t)$

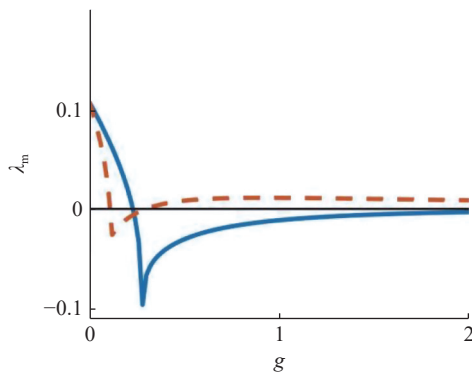
图 2 Rössler 系统的不稳定周期轨线在  $xoy$  平面上的投影  
Fig. 2 The projection of the unstable periodic trajectory of Rössler system on the  $xoy$  plane

是应用 DFC 镇定不稳定周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  时的最大条件 Lyapunov 指数随反馈增益系数  $g$  变化的曲线图. 同时在表 1 中给出了受控周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的稳定区域和稳定区域宽度  $W_s$ . 结果表明受 DFC 控制的周期轨线  $\mathbf{X}_k(t)$  的稳定区域较小, 这表明 DFC 的控制效果比较差.

为提高经典 DFC 的控制性能, 令  $\omega > 0$ , 这时 TSDFC 的控制信号将依据时段进行切换, 其切换过程如图 4 所示, 在灰色时段上, 控制信号存在, 而在灰色时段之外, 控制信号消失. TSDFC 的控制效果与切换频率  $\omega$  密切相关. 为确定最佳切换频率  $\omega$ , 对应于周期轨线  $\mathbf{X}_1(t)$  和  $\mathbf{X}_2(t)$ , 分别求得各自的稳定区域宽度  $W_s$  随切换频率  $\omega$  的变化曲线 (见图 5). 从图 5 中可见, 切换过程以非线性方式修改了受控不稳定周期轨线的稳定性和稳定区域<sup>[33]</sup>, 稳定区域宽度  $W_s$  随切换频率  $\omega$  的增大而非平滑地变化. 对应于周期轨线  $\mathbf{X}_1(t)$  和  $\mathbf{X}_2(t)$  的最佳切换频率分别为  $\omega_1 = 3.9$  和  $\omega_2 = 2.2$ . 采用最佳切换频率, 求得对应于周期



(a) 周期轨线  $X_1(t)$  最大条件 Lyapunov 指数  
(a) The maximum Lyapunov exponent of periodic trajectory  $X_1(t)$



(b) 周期轨线  $X_2(t)$  最大条件 Lyapunov 指数  
(b) The maximum Lyapunov exponent of periodic trajectory  $X_2(t)$

图 3 受控周期轨线  $X_k(t)$  最大条件 Lyapunov 指数随反馈增益系数  $g$  的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 DFC 和 TSDFC

Fig. 3 The comparison of the maximum Lyapunov exponent of periodic trajectory  $X_k(t)$  as a function of the feedback strength, the red dotted line and the blue solid line correspond to DFC and TSDFC, respectively

表 1 受控周期轨线  $X_k(t)$  的稳定区域

Table 1 The stability regions of the controlled periodic trajectory  $X_k(t)$

Trajectory	Stability region		Width of stability region $W_s$	
	DFC	TSDFC	DFC	TSDFC
$X_1(t)$	(0.22, 2.5)	(0.44, 9.9)	2.28	9.46
$X_2(t)$	(0.11, 0.29)	(0.24, 2.0)	0.18	1.76

轨线  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  的最大条件 Lyapunov 指数随反馈增益系数  $g$  的变化曲线如图 3 所示 (蓝色实线), 同时在表 1 中给出了相应的稳定区域和稳定区域宽度  $W_s$ .

通过图 3 和表 1 中对比 DFC 和 TSDFC 的控制效果, 可见应用 TSDFC 时受控周期轨线  $X_k(t)$  的稳定区域明显大于应用 DFC 时受控周期轨线  $X_k(t)$  的稳定区域. 因此, 采用恰当的切换频率, TSDFC 的控

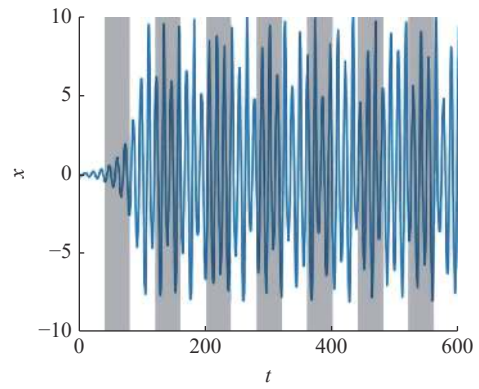
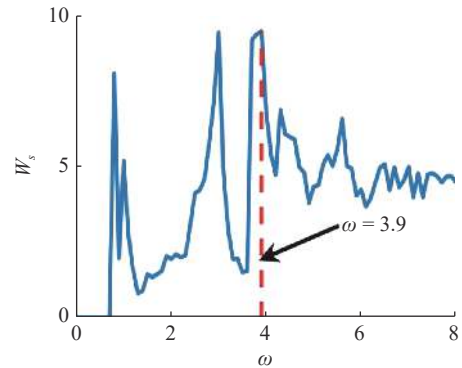
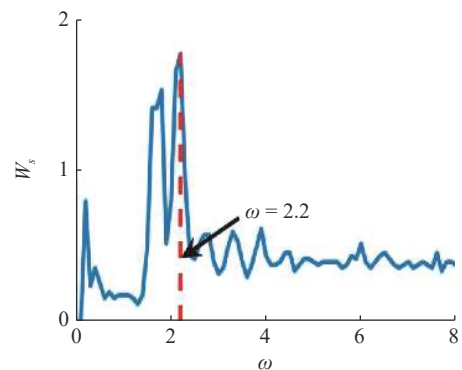


图 4 系统 (9) 的时间序列和 TSDFC 控制信号在不同时段上切换示意图, 在灰色时段中控制信号存在, 而在灰色时段外控制信号消失  
Fig. 4 The time series of system (9) and the schematic diagram of the switching of TSDFC control signals in different time intervals, where the control signal exists in the gray time intervals and disappears outside the gray time intervals



(a) 受控周期轨线  $X_1(t)$  的稳定区域宽度  $W_s$   
(a) The stable region width  $W_s$  for controlled periodic trajectory  $X_1(t)$



(b) 受控周期轨线  $X_2(t)$  的稳定区域宽度  $W_s$   
(b) The stable region width  $W_s$  for controlled periodic trajectory  $X_2(t)$

图 5 受控周期轨线  $X_k(t)$  的稳定区域宽度  $W_s$  随切换频率  $\omega$  的变化曲线

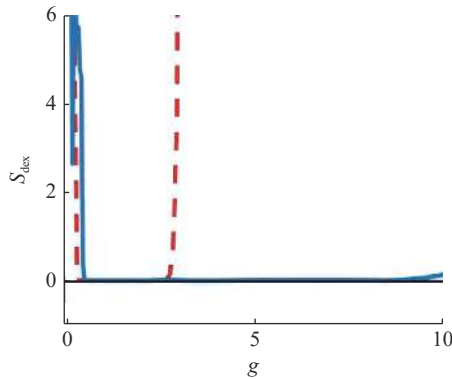
Fig. 5 The stable region width  $W_s$  of controlled periodic trajectory  $X_k(t)$  as a function of the switching frequency  $\omega$

制性能明显优于 DFC 的控制性能.

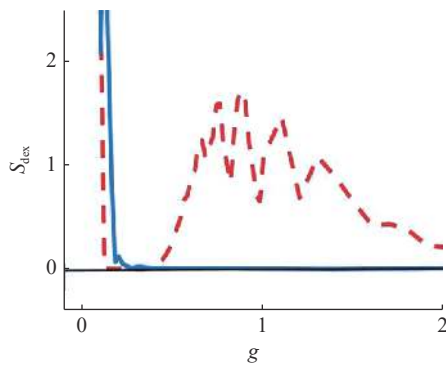
为进一步检验上述结果的正确性, 考察误差指数

$$S_{dex} = \left\langle \left\| \mathbf{X}(t_j - T) - \mathbf{X}(t_j) \right\| \right\rangle \quad (10)$$

式中,  $X(t_j)(j = 1, 2, \dots)$  是系统状态变量的时间序列,  $\langle \cdot \rangle$  表示足够长的时间内平均值. 当受控周期轨线  $X_k(t)$  稳定时, 误差指数  $S_{dex}$  趋近于零. 误差指数  $S_{dex}$  随反馈增益系数的变化曲线如图 6 所示. 从图 6 中可见, 图中  $S_{dex}$  趋近于零的区域与图 3 和表 1 中得到的稳定区域是一致的, 从而验证了图 3 和表 1 中结果的正确性.



(a) 受控周期轨线  $X_1(t)$  的误差指数  
(a) The error index for controlled periodic trajectory  $X_1(t)$



(b) 受控周期轨线  $X_2(t)$  的误差指数  
(b) The error index for controlled periodic trajectory  $X_2(t)$

图 6 受控周期轨线  $X_k(t)$  的误差指数随反馈增益系数  $g$  的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 DFC 和 TSDFC

Fig. 6 The comparison of the error index of the controlled periodic trajectory  $X_k(t)$  as a function of the feedback strength  $g$ , the red dotted line and the blue solid line correspond to DFC and TSDFC, respectively

### 2.2 TSDFC 控制 Van der Pol 系统

受 TSDFC 控制的 Van der Pol 系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y + g^t(x(t-T) - x) \\ \dot{y} &= -\mu(x^2 - 1)y - x + a \cos(\bar{\omega}t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中,  $x$  和  $y$  为系统状态变量,  $\mu$  为系统参数,  $a$  和  $\bar{\omega}$  分别表示外激励幅值和频率. 反馈增益系数  $g^t = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}[\cos(\omega t)] + 1 \} \cdot g$  在定常值  $g$  和 0 之间周期切换.

将系统参数设定为  $\mu = 1, a = 0.998, \bar{\omega} = 0.45$ . 此

时 Van der Pol 系统呈现混沌动力学行为, 其混沌吸引子如图 7(a) 所示.

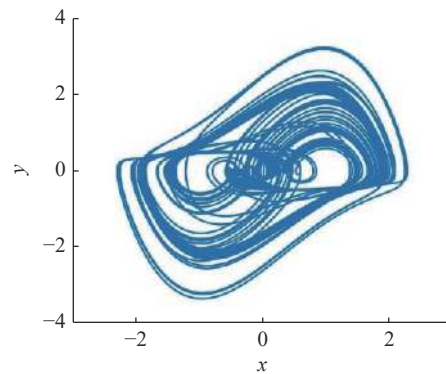
选择 Van der Pol 混沌吸引子中一个典型的不稳定周期轨线  $X_3(t) = (x_3(t), y_3(t))^T$ , 作为待镇定的目标周期轨线. 图 7(b) 展示了目标周期轨线  $X_3(t)$  在  $xoy$  平面上的投影.

为确定受控周期轨线  $X_3(t)$  的稳定性区域, 求得主稳定方程为

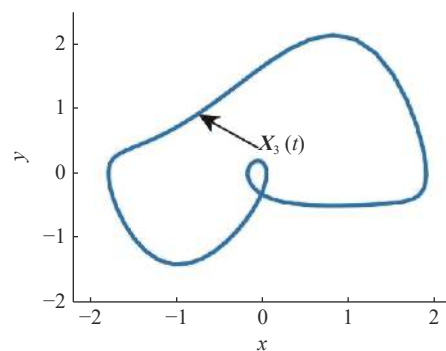
$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 + g^t(\eta_1(t - \tau_3) - \eta_1) \\ \dot{\eta}_2 &= -(1 + 2x_3y_3)\eta_1 + (1 - x_3^2)\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中, 时滞  $\tau_3$  等于目标周期轨线  $X_3(t)$  的周期  $T_3 = 2\pi/\bar{\omega}$ . 当受控周期轨线  $X_3(t)$  的最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_m$  的实部小于零, 受控周期轨线  $X_3(t)$  稳定.

当  $\omega = 0$  时, TSDFC 退化经典 DFC. 图 8 中红色虚线是应用 DFC 镇定不稳定周期轨线  $X_3(t)$  时的最大条件 Lyapunov 指数随反馈增益系数  $g$  变化的曲线图, 同时求得受控周期轨线  $X_3(t)$  的稳定区域宽度



(a) Van der Pol 系统的混沌吸引子  
(a) The chaotic attractor of Van der Pol system



(b) 周期轨线  $X_3(t)$   
(b) Periodic trajectory  $X_3(t)$

图 7 Van der Pol 系统的混沌吸引子和不稳定周期轨线在  $xoy$  平面上的投影

Fig. 7 The projection of the chaotic attractors and unstable periodic trajectory of Van der Pol systems on the  $xoy$  plane

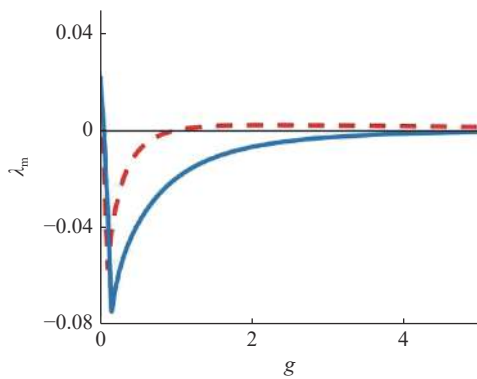


图 8 受控周期轨线  $X_3(t)$  最大条件 Lyapunov 指数随反馈增益系数  $g$  的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 DFC 和 TSDFC

Fig. 8 The comparison of the maximum conditional Lyapunov exponent of the controlled periodic trajectory  $X_3(t)$  as a function of the feedback strength  $g$ , the red dotted line and the blue solid line correspond to DFC and TSDFC, respectively

$W_s$  为 0.88. 结果表明受 DFC 控制时周期轨线  $X_3(t)$  的稳定区域较小, 这表明 DFC 的控制效果比较差.

为了扩大受控周期轨线  $X_3(t)$  稳定区域, 令  $\omega > 0$ , 这时 TSDFC 的控制信号将依据时段进行切换. 为确定最佳切换频率  $\omega$ , 对于周期轨线  $X_3(t)$ , 求得稳定区域宽度  $W_s$  随切换频率  $\omega$  的变化曲线 (见图 9). 从图 9 中可见, 切换过程以非线性方式修改了受控不稳定周期轨线的稳定性和稳定区域<sup>[33]</sup>, 稳定区域宽度  $W_s$  随切换频率  $\omega$  的增大而非平滑地变化, 对于周期轨线  $X_3(t)$  的最佳切换频率为  $\omega_3 = 5.4$ . 采用最佳切换频率  $\omega_3$ , 求得周期轨线  $X_3(t)$  的最大条件 Lyapunov 指数随反馈增益系数  $g$  的变化曲线如图 8 所示 (蓝色实线), 同时也求得受控周期轨线  $X_3(t)$  的稳定区域宽度  $W_s$  为 4.95.

通过图 8 中对比 DFC 和 TSDFC 的控制效果,

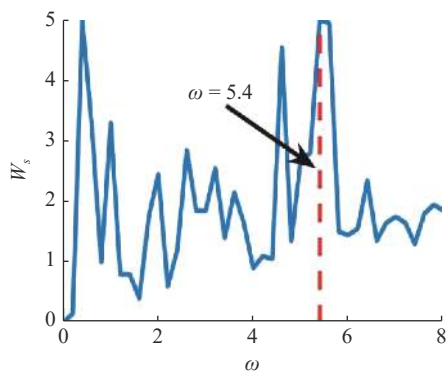


图 9 受控周期轨线  $X_3(t)$  的稳定区域宽度  $W_s$  随切换频率  $\omega$  的变化曲线

Fig. 9 The width of the stable region of the controlled periodic trajectory  $X_3(t)$  as a function of the switching frequency  $\omega$

可见应用 TSDFC 时受控周期轨线  $X_3(t)$  的稳定区域明显大于应用 DFC 时受控周期轨线  $X_3(t)$  的稳定区域. 因此采用恰当的切换频率, TSDFC 的控制性能明显优于 DFC 的控制性能.

为进一步检验上述结果的正确性, 考察误差指数

$$S_{dex} = \langle \|X(t_j - T) - X(t_j)\| \rangle \quad (13)$$

误差指数  $S_{dex}$  随反馈增益系数  $g$  的变化曲线如图 10 所示. 从图 10 中可见, 图中  $S_{dex}$  趋近于零的区域与图 8 中得到的稳定区域是一致的, 从而验证了图 8 中结果的正确性.

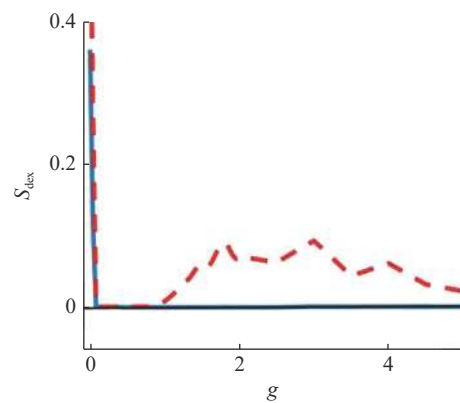


图 10 受控周期轨线  $X_3(t)$  的误差指数随反馈增益系数  $g$  的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 DFC 和 TSDFC

Fig. 10 The comparison of the error index of the controlled periodic trajectory  $X_3(t)$  as a function of the feedback strength  $g$ , the red dotted line and the blue solid line correspond to DFC and TSDFC, respectively

总结前面的两个算例分析, 我们得到以下结论. TSDFC 的控制性能与切换频率密切相关. 受控周期轨线的稳定区域随切换频率的变化呈现强非线性变化. 当采用恰当的切换频率时, 受 TSDFC 控制时周期轨线的稳定区域明显大于受经典 DFC 控制时周期轨线的稳定区域.

备注: TSDFC 可看成是 DFC 的拓展. 当  $\omega = 0$  时, TSDFC 退化成经典 DFC. 虽然在本文中 TSDFC 仅用于稳定两个混沌系统的不稳定周期轨线, 但与经典 DFC 一样, TSDFC 可以应用于广泛的混沌系统控制中.

### 3 结论

本文首次在经典 DFC 的基础上, 加入时变切换策略来提高其控制性能, 建立了 TSDFC 方法. 实例研究表明, 当选择恰当的切换频率时, TSDFC 可以稳定不稳定周期轨线, 且受控周期轨线的稳定区域



明显大于应用经典 DFC 时受控周期轨线的稳定区域. 从实际应用的角度来看, 相比经典 DFC, TSDFC 具有显著的优点. 例如, 在一些实际受控系统中, 反馈增益系数被限制在某些有限的区域内. 利用 TSDFC 方法时, 可以选择恰当的切换频率, 改变和扩大受控周期轨线的稳定区域, 使反馈增益系数落入稳定区域, 从而实现周期轨线的镇定. 此外, 提出的 TSDFC 方法, 开辟了另一种利用不连续控制信号来控制混沌系统的可能性. TSDFC 的控制性能取决于控制时段的选择. 本文仅研究了一种比较简单的时变切换策略. 对于其他更复杂的时变切换策略, TSDFC 控制效果如何? 特别是哪种时变切换策略对提高经典 DFC 的控制性能是最好的, 目前还不清楚. 这些问题值得进一步研究.

### 参 考 文 献

- Din Q. Neimark-Sacker bifurcation and chaos control in Hassell-Varley model. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2017, 23(4): 741-762
- Jiang XW, Chen C, Zhang XH, et al. Bifurcation and chaos analysis for a discrete ecological developmental systems. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(4): 4671-4680
- Huang Y, Huang Q, Wang Q. Chaos and bifurcation control of torque-stiffness-controlled dynamic bipedal walking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, 47(7): 1229-1240
- Telles Ribeiro JG, Pereira M, Cunha A, et al. Controlling chaos for energy harvesting via digital extended time-delay feedback. *The European Physical Journal Special Topics*, 2022, 231: 1485-1490
- Pei L, Wu F. Periodic solutions, chaos and bi-stability in the state-dependent delayed homogeneous additive increase and multiplicative decrease/random early detection congestion control systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, 182: 871-887
- Kuznetsov NV, Leonov GA, Shumafov MM. A short survey on Pyragas time-delay feedback stabilization and odd number limitation. *IFAC-Papers on Line*, 2015, 48(11): 706-709
- 陈玲, 唐有绮. 时变张力作用下轴向运动梁的分岔与混沌. *力学学报*, 2019, 51(4): 1180-1188 (Chen Ling, Tang Youqi. Bifurcation and chaos of axially moving beams under time-varying tension. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(4): 1180-1188 (in Chinese))
- 姚志刚, 张伟, 陈丽华. 压电复合材料层合梁的分岔、混沌动力学与控制. *力学学报*, 2009, 41(1): 129-140 (Yao Zhigang, Zhang Wei, Chen Lihua. Bifurcation, chaotic dynamics and control of piezoelectric laminated composite beam. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, 41(1): 129-140 (in Chinese))
- Lathrop DP, Kostelich EJ. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits. *Physical Review A*, 1989, 40(7): 4028
- Ott E, Grebogi C, Yorke JA. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11): 1196
- Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 1992, 170(6): 421-428
- Mitra RK, Banik AK, Chatterjee S. Response of a harmonically forced dry friction damped system under time-delayed state feedback. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2018, 13(3): 031001
- 张士荣, 赵俊杰, 谈发明. 半导体激光器混沌电路延时反馈控制方法. *激光杂志*, 2022, 43(1): 154-158 (Zhang Shirong, Zhao Junjie, Tan Faming. Delay feedback control method of semiconductor laser chaotic circuit. *Chinese Journal of Laser Journal*, 2022, 43(1): 154-158 (in Chinese))
- 杨坤一, 董云宁. 时滞反馈控制下五维能源供需系统的稳定性分析及 Hopf 分支性质. *系统科学与数学*, 2021, 41(8): 2113-2136 (Yang Kunyi, Dong Yunning. Stabilization and Hopf bifurcation properties of the five-dimensional energy demand-supply system under delayed feedback control. *Chinese Journal of System Science and Mathematics*, 2021, 41(8): 2113-2136 (in Chinese))
- Nakajima H. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Physics Letters A*, 1997, 232(3-4): 207-210
- Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback. *Physics Letters A*, 1995, 206(5-6): 323-330
- Zheng YG, Zhang YY. Stabilization of periodic oscillations with transient delayed feedback control. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(2): 1240-1251
- 代晗, 赵艳影. 负刚度时滞反馈控制动力吸振器的等峰优化. *力学学报*, 2021, 53(6): 1720-1732 (Dai Han, Zhao Yanying. Equal-peak optimization of dynamic vibration absorber with negative stiffness and delay feedback control. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(6): 1720-1732 (in Chinese))
- Nakajima H, Ueda Y. Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries. *Physical Review E*, 1998, 58(2): 1757
- Nakajima H, Ito H, Ueda Y. Automatic adjustment of delay time and feedback gain in delayed feedback control of chaos. *IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 1997, 80(9): 1554-1559
- 张婉洁, 牛江川, 申永军等. 含分数阶 Bingham 模型的阻尼减振系统时滞半主动控制. *力学学报*, 2022, 54(1): 173-183 (Zhang Wanjie, Niu Jiangchuan, Shen Yongjun, et al. Time-delayed semi-active control of damping system with fractional-order Bingham model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(1): 173-183 (in Chinese))
- 夏前锦, 连龙, 瞿建雄等. 倾斜吹吸控制下湍流边界层减阻的直接数值模拟. *力学学报*, 2021, 53(9): 2454-2467 (Xia Qianjin, Lian Long, Qu Jianxiong, et al. Direct numerical simulation of drag reduction in turbulent boundary layers controlled by inclined blowing and sucking. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(9): 2454-2467 (in Chinese))
- Arunshankar J. Control of nonlinear two-tank hybrid system using sliding mode controller with fractional-order PI-D sliding surface. *Computers & Electrical Engineering*, 2018, 71: 953-965
- Wei Q, Niu Z, Chen B, et al. Bang-bang control applied in airfoil roll control with plasma actuators. *Journal of Aircraft*, 2013, 50(2): 670-677
- Arunshankar J. Control of nonlinear two-tank hybrid system using sliding mode controller with fractional-order PI-D sliding surface. *Computers & Electrical Engineering*, 2018, 71: 953-965

26 Li S, Sun N, Chen L, et al. Network synchronization with periodic coupling. *Physical Review E*, 2018, 98(1): 012304

27 陈跃, 黄振坤, 宾红华等. 基于开关周期性耦合的混沌系统量化同步. 集美大学学报: 自然科学版, 2020, 25(3): 222-227 (Chen Yue, Huang Zhenkun, Bin Honghua, et al. Quantized synchronization of chaotic systems based on on-off periodic coupling. *Chinese Journal of Jimei University: Natural Science Edition*, 2020, 25(3): 222-227 (in Chinese))

28 Chen L, Qiu C, Huang HB. Synchronization with on-off coupling: Role of time scales in network dynamics. *Physical Review E*, 2009, 79(4): 045101

29 Ghosh A, Godara P, Chakraborty S. Understanding transient uncoupling induced synchronization through modified dynamic coupling. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(5): 053112

30 Buscarino A, Frasca M, Branciforte M, et al. Synchronization of two Rössler systems with switching coupling. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(1): 673-683

31 Chagas TP, Toledo BA, Rempel EL, et al. Optimal feedback control of the forced van der Pol system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, 45(9-10): 1147-1156

32 Eckhardt B, Yao D. Local Lyapunov exponents in chaotic systems. *Physical D*, 1993, 65: 100-108

33 Ghosh A, Godara P, Chakraborty S. Understanding transient uncoupling induced synchronization through modified dynamic coupling. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(5): 053111

附录 A: 计算主稳定方程的最大条件 Lyapunov 指数

对于主稳定方程

$$\dot{\eta}(t) = \mathbf{D}\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_*(t))\eta(t) + \mathbf{G}^t(\eta(t-T) - \eta(t)) \quad (\text{A1})$$

式中,  $\eta(t) \in R^m$  为偏差变量,  $T$  为时滞,  $\mathbf{X}_*(t+T) = \mathbf{X}_*(t)$  为待镇定的目标周期轨线,  $\mathbf{D}\mathbf{F}(t+T, \mathbf{X}_*(t+T)) = \mathbf{D}\mathbf{F}(t, \mathbf{X}_*(t)) \in R^{m \times m}$  为系统矩阵. 设时区  $[t_0, t_0+T]$  上的时间序列为  $t_k = t_0 + kh$ , 其中  $k = 0, 1, \dots, k_T$ ,  $k_T = T/h$ ,  $h$  为步长. 为减少计算最大条件 Lyapunov 指数的计算量, 用二阶 Runge-Kutta 方法将主稳定方程 (A1) 离散化得到

$$\eta(k+1) = \mathbf{M}_1(k)\eta(k) + \mathbf{M}_2(k)\eta(k-k_T+1) + \mathbf{M}_3(k)\eta(k-k_T) \quad (\text{A2})$$

在式 (A2) 中

$$\begin{aligned} \eta(k) &= \eta(t_0 + kh), \mathbf{M}_1(k) = \mathbf{E} + h\mathbf{A}(k) + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2(k) \\ \mathbf{M}_2(k) &= \frac{h}{2}\mathbf{G}^t, \mathbf{M}_3(k) = \frac{h}{2}\mathbf{G}^t + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2(k)\mathbf{G}^t \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{E}$  为单位矩阵,  $\mathbf{A}(k) = \mathbf{D}\mathbf{F}(t_k, \mathbf{X}_*(k)) - \mathbf{G}^t$ ,  $\mathbf{X}_*(k) = \mathbf{X}_*(t_k) = \mathbf{X}_*(t_0 + kh)$ .

引入一系列离散变量  $\eta_1(k) = \eta(k-k_T)$ ,  $\eta_2(k) = \eta(k-k_T+1), \dots, \eta_{k_T+1}(k) = \eta(k)$ , 并记向量  $\phi(k) = (\eta_1(k), \eta_2(k), \dots, \eta_{k_T+1}(k))^T$ , 从而式 (A2) 可写成

$$\phi(k+1) = \mathbf{S}(k)\phi(k) \quad (\text{A3})$$

式中,  $\mathbf{S}(k) = (\mathbf{S}_{ij})_{(k_T+1) \times (k_T+1)}$ ,  $\mathbf{S}_{k_T+1,1} = \mathbf{M}_3(k)$ ,  $\mathbf{S}_{k_T+1,2} = \mathbf{M}_2(k)$ ,  $\mathbf{S}_{k_T+1,k_T+1} = \mathbf{M}_1(k)$ , 当  $1 \leq i \leq k_T$  和  $j = i+1$  时  $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{E}$ , 其余  $\mathbf{S}_{ij} \in R^{m \times m}$  为零矩阵. 从 (A3) 式可得

$$\phi(k_T) = \mathbf{H}\phi(0) \quad (\text{A4})$$

式中,  $\mathbf{H} = \prod_{k=0}^{k_T-1} \mathbf{S}(k)$ . 矩阵  $\mathbf{H}$  的特征值的模就是目标周期轨线  $\mathbf{X}_*(t)$  的 Floquet 乘数. 设  $\mu_l$  为最大 Floquet 乘数, 则最大条件 Lyapunov 指数为  $\lambda_m = \frac{1}{T} \ln \mu_l$ .