

曲壁蜂窝夹层悬臂板的振动特性研究

薛 潇, 张君华, 孙 莹, 权铁汉

VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF HONEYCOMB SANDWICH CANTILEVER PLATE WITH CURVED-WALL CORE

Xue Xiao, Zhang Junhua, Sun Ying, and Quan Tiehan

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-305>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

磁致伸缩主被动隔振装置中的磁机耦合效应研究

RESEARCH ON THE MAGNETO-MECHANICAL EFFECT IN ACTIVE AND PASSIVE MAGNETOSTRICTIVE VIBRATION ISOLATOR

力学学报. 2019, 51(2): 324-332

机械臂臂杆刚度主动控制下的末端振动特性研究

RESEARCH ON VIBRATION CHARACTERISTICS OF THE MANIPULATOR END UNDER ACTIVE CONTROL OF ARM STIFFNESS

力学学报. 2020, 52(4): 985-995

非线性被动隔振的若干进展

SOME RECENT PROGRESSES IN NONLINEAR PASSIVE ISOLATIONS OF VIBRATIONS

力学学报. 2017, 49(3): 550-564

低频振动隔离和能量采集双功能超材料

LOW-FREQUENCY VIBRATION ISOLATION AND ENERGY HARVESTING SIMULTANEOUSLY IMPLEMENTED BY A METAMATERIAL WITH LOCAL RESONANCE

力学学报. 2021, 53(11): 2972-2983

亚音速气流中复合材料悬臂板的非线性振动响应研究

NONLINEAR VIBRATIONS OF COMPOSITE CANTILEVER PLATE IN SUBSONIC AIR FLOW

力学学报. 2019, 51(3): 912-921

并联式承载减振一体的整星隔振研究

RESEARCH ON WHOLE-SPACECRAFT VIBRATION ISOLATION BASED ON PARALLEL LOAD-BEARING AND DAMPING SYSTEM

力学学报. 2019, 51(2): 364-370



曲壁蜂窝夹层悬臂板的振动特性研究¹⁾薛 潇* 张君华*,²⁾ 孙 莹† 权铁汉*

*(北京信息科技大学机电工程学院, 北京 100192)

†(北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

摘要 蜂窝结构作为一种多孔材料具有轻质、高强度、高刚度的优点, 兼具隔声降噪、隔热等优良性能, 被广泛应用于交通运输、航空航天等领域. 传统直壁蜂窝在受力后容易出现应力集中的问题, 这将导致蜂窝夹层产生裂纹破坏, 缩短夹层板的使用寿命. 针对此问题本文设计了一种以圆弧曲壁蜂窝作为芯层的蜂窝夹层板, 基于单位载荷法推导了蜂窝芯的等效参数, 建立曲壁蜂窝夹层板的动力学模型, 利用 Chebyshev-Ritz 方法求解悬臂边界下曲壁蜂窝夹层板的固有频率, 并用有限元方法进行对比验证, 发现前 5 阶固有频率的误差均在 5% 以内, 每阶固有频率对应的振型一致. 通过 3D 打印聚乳酸 (PLA) 制备了曲壁蜂窝夹层板, 使用万能试验机对 PLA 拉伸试件进行准静态拉伸测定了打印材料的杨氏模量, 搭建振动试验平台对制备的曲壁蜂窝夹层板进行正弦扫频试验、定频谐波驻留试验和冲击试验. 对比发现 3D 打印模型振动试验获得的前 5 阶固有频率与理论模型和有限元模型的计算结果三者一致, 试验发现曲壁蜂窝芯在特定频段内具有一定的抗冲击性能. 研究结果将为曲壁蜂窝在振动和隔振方面的应用提供理论支持.

关键词 曲壁蜂窝, 夹层板, 振动特性, 振动试验, 隔振

中图分类号: TB53 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-305

VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF HONEYCOMB SANDWICH CANTILEVER
PLATE WITH CURVED-WALL CORE¹⁾Xue Xiao* Zhang Junhua*,²⁾ Sun Ying† Quan Tiehan*

*(College of Mechanical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

†(College of Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract As a kind of porous material, the honeycomb structure has the advantages of light weight, high strength, high stiffness, sound insulation, noise reduction, heat insulation and other excellent performance. Therefore, it is widely used in the field of transportation vehicles and aerospace etc. The traditional straight wall honeycomb is prone to stress concentration after loading, which will lead to crack failure and shorten the service life of the honeycombs. In order to solve this problem of honeycombs with straight walls, a honeycomb sandwich plate with circular arc core layer is designed in this paper. The equivalent parameters of honeycomb core are derived based on unit load method and the dynamic model of the curved-wall-core honeycomb sandwich plate is derived. The Chebyshev-Ritz method was used to solve the natural frequencies of honeycomb sandwich plate under cantilever boundaries, and the finite element method is used to compare. The errors of the first five natural frequencies are all within 5% from the two methods. The modes

2022-07-10 收稿, 2022-09-19 录用, 2022-09-20 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (12272057, 11902038, 11732005).

2) 张君华, 教授, 主要研究方向: 非线性振动. E-mail: hua@bistu.edu.cn

引用格式: 薛潇, 张君华, 孙莹, 权铁汉. 曲壁蜂窝夹层悬臂板的振动特性研究. 力学学报, 2022, 54(11): 3169-3180

Xue Xiao, Zhang Junhua, Sun Ying, Quan Tiehan. Vibrational characteristics of honeycomb sandwich cantilever plate with curved-wall core. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(11): 3169-3180

corresponding to each order of natural frequencies obtained from the finite element model are consistent with those obtained from the theoretical model. The curved honeycomb sandwich plate is prepared by 3D printing polylactic acid (PLA). The Young's modulus of the printed PLA was measured by quasi-static tensile of the tensile specimen using a universal testing machine. The vibration test platform is built to do the sine sweep test, fixed frequency harmonic residues test and impact test. The comparison shows that the first five natural frequencies obtained from the vibration test of the 3D printing model verify the calculation results of the theoretical model and the finite element model. It is found that the curved-wall honeycomb core has a certain impact resistant performance in a specific frequency band. The obtained research results will provide theoretical support for the application of curved wall honeycombs in vibration and vibrational isolation.

Key words curved-wall honeycomb, sandwich plate, vibration characteristics, vibration test, vibration isolation

引言

蜂窝是一种有序棱柱状胞元组成的多孔材料,具有制造所需耗材少、结构稳定性好的优势.通过对蜂窝胞元进行设计,蜂窝可以实现负泊松比^[1]、负刚度^[2]等力学性能,并且可以实现隔热^[3]、隔声^[4]和隔振^[5]等功能.蜂窝夹层板的力学特性很大程度上取决于蜂窝胞元的形状和相对密度,国内外学者对于蜂窝夹层板芯层的研究成果已经非常丰富. Gbison 等^[6]对正六边形蜂窝夹层板进行系统的研究,提出了计算蜂窝结构芯层弹性模量的经典等效理论. 富明慧等^[7]系统地对蜂窝芯等效参数进行了综述. 杨稳等^[8]从理论公式推导、均匀化法及有限元法等方面对蜂窝芯等效参数的研究进行分类论述. 乐京霞等^[9]给出线弹性范围内蜂窝芯层的箭型负泊松比蜂窝夹层板等效力学参数理论公式,并通过拉伸试验验证了公式的准确性. Liu 等^[10]设计并制备一种新型的 Y 型芯全复合材料夹层结构,并研究了相对密度对力学性能的影响. Ru 等^[11]设计了一种具有混凝土状增强层的蜂窝复合材料,具有比蜂窝更高的峰值载荷和更好的能量吸收能力. Albert 等^[12]研究了具有不同相对密度的 13 种二维蜂窝芯胞元的力学性能和变形模式. Zwab 等^[13]提出一种可定制有效弹性模量的混合分层方形蜂窝,分析了结构参数和相对密度对有效弹性模量的影响.

传统正六边形蜂窝在面内变形的力学行为主要是直壁和斜壁的拉压和弯曲变形,直壁间的节点受力很容易出现应力集中的问题,将直壁换成曲壁后能在一定程度上改善这个问题. Lee 等^[14]发现啄木鸟的喙在微观结构上是由波浪形曲线拼接而成的多

孔结构,这种弯曲的边界能保护啄木鸟头部. Yang 等^[15]将正六边形蜂窝等几种蜂窝的直壁替换成波浪形的曲壁,发现替换后的蜂窝具有更好的耐撞性. Deng 等^[16]提出一种负泊松比正弦弯曲蜂窝结构,并分析其力学性能. 发现正弦弯曲蜂窝在面内冲击下具有较好的耐撞性能.

曲壁蜂窝不仅能缓解直壁的应力集中问题,还有负刚度特性,将蜂窝的直壁替换为正弦屈曲梁的负刚度蜂窝在近年来受到广大学者的关注,这种蜂窝可以经受压缩加载和卸载的多次重复循环,并且具有很高的能量吸收性能和隔振性能. Qiu 等^[17]发现了负刚度蜂窝的可重用性,并可以提供可定制的、近乎理想的冲击隔离. Restrepo 等^[18]发现通过参数设计,负刚度蜂窝可以达到和正六边形蜂窝相同的比吸收能 and 平台应力值. Debeau 等^[19]通过试验发现负刚度蜂窝可以提供近理想的加速度冲击隔离,并且受冲击后变形可完全恢复. Chen 等^[20]设计了一种梯度负刚度 GNS 蜂窝结构,通过隔振试验发现 GNS 蜂窝比普通负刚度蜂窝具有更好的减振性能.

蜂窝夹层板因其优异的力学特性,通常用于对材料要求苛刻的航空航天领域中. 结构的振动是飞行器飞行过程中不可避免的,对振动问题的忽视往往会造成灾难性的后果,因此研究蜂窝结构的非线性振动问题具有重要意义. Di 等^[21]研究了蜂窝单元的不同几何参数对负泊松比夹层板自由振动响应的影响. Li 等^[22]比较了泡沫铝夹芯圆柱壳、传统蜂窝夹芯圆柱壳和负泊松比六角形蜂窝夹芯圆柱壳在爆炸荷载作用下的动力学响应. Wu 等^[23]对铝蜂窝夹层板在冰楔冲击下的动态响应和能量吸收特性进行了数值和实验研究. Ma 等^[24]在随机振动载荷下对

复合蜂窝夹芯板进行了疲劳试验, 并提出一种预测复合蜂窝夹层结构在随机振动载荷下的疲劳寿命的方法. Zhang 等^[25]建立了旋转整体叶盘的非线性运动控制方程. 研究了调谐和失谐整体叶盘的自由振动和模态局部化现象. 陈永清等^[26]运用 Hoff 理论对类蜂窝夹层结构进行振动特性分析, 计算类蜂窝夹层结构在四边简支边界条件下的振动固有频率方程解. 对于蜂窝夹层板振动特性的研究, 大多都集中于理论推导并运用有限元方法进行验证. 进行振动试验的较少. Arunkumar 等^[27]对蜂窝夹层结构自由振动和受迫振动进行了数值和实验研究, 数值得到的结果与实验结果吻合良好. 闫昭臣等^[28]利用振动台测定了具有 3 种泊松比的蜂窝夹层板的固有频率, 并对夹层板进行了冲击试验. 何贵勤等^[29]对挠性航天器太阳翼进行了振动试验, 经试验测定的振动特性与理论模型相一致. 杨雨恒等^[30]利用锤击法测定了自由边界的铝制蜂窝夹层板的固有频率.

本文基于以上的研究, 采取力学等效方法推导曲壁蜂窝芯的等效力学参数, 建立曲壁蜂窝夹层板的动力学模型, 计算得出板的固有频率, 并应用有限元软件对动力学模型进行验证. 通过 3D 打印曲壁蜂窝夹层板, 对蜂窝夹层板进行脉冲激励试验, 定频驻波试验和冲击试验, 试验结果验证理论模型, 并研究了曲壁蜂窝的抗冲击性能.

1 曲壁蜂窝夹层板动力学模型建立及求解

本文提出一种新型曲壁蜂窝芯夹层板, 夹层板结构如图 1 所示, 蜂窝芯胞元由可变弧长、弧度的圆弧和支撑圆弧的直壁组成.



图 1 曲壁蜂窝夹层板
Fig. 1 Curved-wall honeycomb sandwich plate

1.1 曲壁蜂窝芯的等效弹性参数计算

本节推导曲壁蜂窝胞元的面内等效弹性参数, 曲壁蜂窝胞元形状如图 2 所示, θ 为圆弧所对应弧度,

R 为圆弧半径, b 为单胞厚度, 单胞直壁长度为 $2h$, 单胞在 x 方向长度为 L_x , 单胞在 y 方向长度为 $2L_y$.

从单胞中选取曲梁为研究对象如图 3 所示, 曲梁材料杨氏模量为 E_s , 梁截面惯性矩为 I , 可计算得不受外力时单胞在 x 方向的长度为

$$L_x = 4R \sin \theta \quad (1)$$

在 y 方向的长度为

$$2L_y = 4h + 4R(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

弯矩是导致曲梁变形的主要因素, 正应力和切应力导致的曲梁变形在本文中忽略不计. 当曲梁受到 y 方向加载时, 曲梁的受力情况如图 4(a) 所示. 假设曲梁 B 点受到由直梁作用的 y 方向的力 F , 则 A 和 D 两点受到大小为 $F/2$ 的剪力, 受力后 A, B, D 点转角为 0, 弧 BD 受力关于中点 C 对称, 故 C 点所受弯矩为 0. A 和 D 所受弯矩

$$M = \frac{1}{2}FR \sin \theta \quad (3)$$

选取弧 BCD 为研究对象, 弧 BC 和弧 CD 上的弯矩是关于弧度 φ 和 ϕ 的函数 $M_{BCy}(\varphi)$ 和 $M_{CDy}(\phi)$

$$M_{BCy}(\varphi) = \frac{1}{2}FR \sin \theta - \frac{1}{2}FR \sin \varphi \quad (4)$$

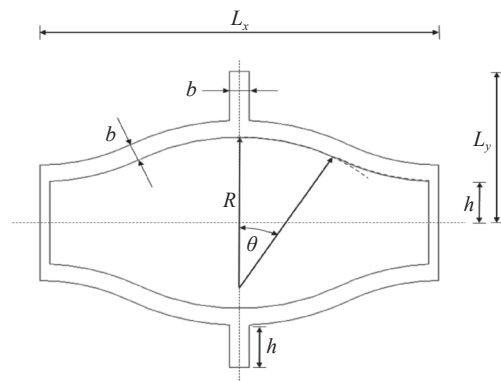


图 2 曲壁蜂窝单胞

Fig. 2 Cell of curved-wall honeycomb

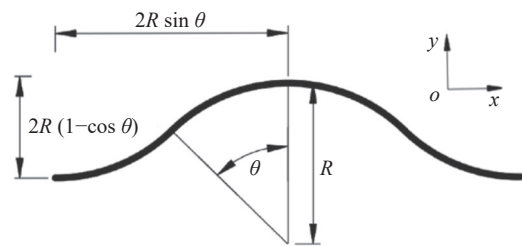


图 3 曲壁蜂窝的曲梁

Fig. 3 Curved beam of curved-wall honeycomb

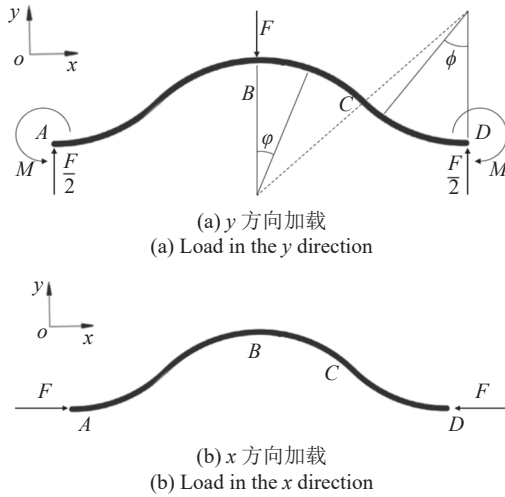


图4 蜂窝曲梁受力分析

Fig. 4 Force analysis of honeycomb curved beam

$$M_{CDy}(\phi) = \frac{1}{2}FR\sin\phi - \frac{1}{2}FR\sin\theta \quad (5)$$

利用单位载荷法计算在 y 方向加载时 L_y 的位移变化 Δ_{yy} 和 L_x 的位移变化 Δ_{yx}

$$\begin{aligned} \Delta_{yy} = & 2 \left[\int_0^\theta \frac{M_{BCy}(\varphi)\bar{M}_{BC1}(\varphi)}{E_s I} d\varphi + \int_0^\theta \frac{M_{CDy}(\phi)\bar{M}_{CD1}(\phi)}{E_s I} d\phi \right] = \\ & \frac{FR^3 \left[\theta \sin^2\theta + \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} + 2(\cos\theta - 1)\sin\theta \right]}{E_s I} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{yx} = & 2 \left[\int_0^\theta \frac{M_{BCy}(\varphi)\bar{M}_{BC2}(\varphi)}{E_s I} d\varphi + \int_0^\theta \frac{M_{CDy}(\phi)\bar{M}_{CD2}(\phi)}{E_s I} d\phi \right] = \\ & \frac{FR^3 \left[2\sin^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta - 2(\cos\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{2} \right]}{E_s I} \end{aligned} \quad (7)$$

$$v_{yx} = -\frac{\Delta_{yx}L_y}{\Delta_{yy}L_x} = -\frac{2\sin^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta - 2(\cos\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{2}[\cos(2\theta) - 1]L_y}{\theta\sin^2\theta + \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} + 2(\cos\theta - 1)\sin\theta} \frac{L_y}{L_x} \quad (13)$$

$$v_{xy} = -\frac{\Delta_{xy}L_x}{\Delta_{xx}L_y} = -\frac{\sin^2\theta - \theta\sin\theta\cos\theta - (\cos\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{4}[\cos(2\theta) - 1]L_x}{\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} - 4\cos\theta\sin\theta + 2\theta\cos^2\theta} \frac{L_x}{L_y} \quad (14)$$

曲梁在 y 方向加载后, 最大剪切应力发生在曲梁中心点 B , 剪应力大小可表示为

$$\tau_{yz} = \frac{3F}{2bt} \quad (15)$$

当曲梁受 x 方向的载荷时, 受力情况如图 4(b) 所示. 可求出曲梁在 x 方向加载时 L_y 的位移变化 Δ_{xy} 和 L_x 的位移变化 Δ_{xx}

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} = & 4 \int_0^\theta \frac{M_{BCx}(\varphi)\bar{M}_{BC1}(\varphi)}{E_s I} d\varphi = \\ & \frac{FR^3}{E_s I} \left[2\sin^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta - 2(\cos\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{2}\cos(2\theta) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} = & 4 \int_0^\theta \frac{M_{BCx}(\varphi)\bar{M}_{BC2}(\varphi)}{E_s I} d\varphi = \\ & \frac{4FR^3 \left[\frac{2\theta + \sin(2\theta)}{4} - 2\cos\theta\sin\theta + \theta\cos^2\theta \right]}{E_s I} \end{aligned} \quad (9)$$

曲壁蜂窝芯在 y 方向上的应力和应变分别为

$$\sigma_y = \frac{F}{L_x t}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta_{yy}}{L_y} \quad (10)$$

蜂窝芯在 z 方向上的深度为 t , 可计算出蜂窝芯在 y 方向上的等效弹性模量

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{L_y E_s I}{L_x t R^3 \left[\theta \sin^2\theta + \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} + 2(\cos\theta - 1)\sin\theta \right]} \quad (11)$$

同理可求出蜂窝芯在 x 方向上的等效弹性模量

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{L_x E_s I}{4L_y t R^3 \left[\frac{2\theta + \sin(2\theta)}{4} - 2\cos\theta\sin\theta + \theta\cos^2\theta \right]} \quad (12)$$

曲壁蜂窝芯在 y 方向和 x 方向上的等效泊松比分别为

$$\nu_{yx} = -\frac{\Delta_{yx}L_y}{\Delta_{yy}L_x} = -\frac{2\sin^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta - 2(\cos\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{2}[\cos(2\theta) - 1]L_y}{\theta\sin^2\theta + \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} + 2(\cos\theta - 1)\sin\theta} \frac{L_y}{L_x} \quad (13)$$

$$v_{xy} = -\frac{\Delta_{xy}L_x}{\Delta_{xx}L_y} = -\frac{\sin^2\theta - \theta\sin\theta\cos\theta - (\cos\theta - 1)\cos\theta + \frac{1}{4}[\cos(2\theta) - 1]L_x}{\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} - 4\cos\theta\sin\theta + 2\theta\cos^2\theta} \frac{L_x}{L_y} \quad (14)$$

剪应变用 y 方向位移 Δ_{yy} 和 z 方向的深度 t 表示为

$$\gamma_{yz} = \frac{\Delta_{yy}}{t} \quad (16)$$

可得到 y 方向的剪切模量

$$G_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{3E_s I}{2bR^3 \left[\theta \sin^2 \theta + \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} + 2(\cos \theta - 1) \sin \theta \right]} \quad (17)$$

曲壁蜂窝芯作为轻质多孔材料, 相对密度是多孔材料的一项重要参数, 其相对密度表示为

$$\rho = \rho_s \frac{2\theta Rb + hb}{4R \sin \theta [R(1 - \cos \theta) + h]} \quad (18)$$

1.2 悬臂曲壁蜂窝夹层板的模型及固有频率求解

蜂窝夹层板这类轻质材料结构通常用于航空航天等领域, 工作环境经常为悬臂边界, 故本文选择悬臂边界下的曲壁蜂窝夹层板, 研究其振动特性, 悬臂边界条件下曲壁蜂窝夹层矩形板的模型如图 5 所示, 固定端为夹层板的 ob 边, 其余三边均为自由边界. 在曲壁蜂窝夹层板的中面内建立平面直角坐标系 xOy , z 轴通过坐标原点垂直于中面竖直向上. 曲壁蜂窝夹层矩形板 x 方向长度为 a , y 方向长度为 b . 曲壁蜂窝夹层板由上下两层厚度为 h_f 的蒙皮和厚度为 h_c 的芯层组成, 板受到 z 方向的均布载荷 p_0 , 假设上下蒙皮和芯层紧密黏结.

选取曲壁蜂窝夹层板的基体材料为聚乳酸 (PLA), 其弹性模量为 E_s , 密度为 ρ_s , 泊松比为 ν_s , 剪切模量为 G_s . 曲壁蜂窝夹层板发生自由振动时动能可以表示为

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} + 2 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right] dx dy dz \quad (19)$$

势能表示为

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) \quad (20)$$

其中 u, v, w 分别为板材中面 (即 $z=0$) 上任意一点沿 x, y, z 方向上的位移, ϕ_x 和 ϕ_y 分别为曲壁夹层板中面的法线相对于 x 轴和 y 轴的转角. 根据经典板理论, 位移场中各函数的表达式为

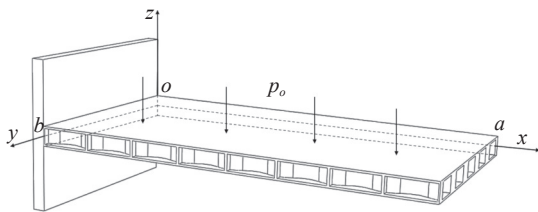


图 5 悬臂边界条件下曲壁蜂窝夹层板

Fig. 5 Cantilever curved-wall honeycomb sandwich plate

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, 0, t), v = v(x, y, 0, t), w = w(x, y, 0, t) \\ \varphi_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}, \varphi_y = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

曲壁蜂窝夹层板的应变分量可表示为^[31]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

曲壁蜂窝夹层板为各向异性, 其本构方程可表示为如下形式^[31]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式中, 上角标 $k=1, 3$ 表示曲壁蜂窝夹层板的上下蒙皮, $k=2$ 表示曲壁蜂窝夹层板的曲壁蜂窝芯, 刚度系数具体表达形式为

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{12}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{66} &= G_{12}, Q_{44} = G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13}, Q_{21} = Q_{12} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中, $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, G_{12}^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{23}^{(k)}, \nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ 分别表示蒙皮和芯层的弹性模量、剪切模量和泊松比, 芯层的等效参数由 1.1 节推导得到. 将式 (21)~式 (24) 代入到式 (19) 可得动能表达式

$$T = \int_{\Omega_0} [(I_0 \dot{u} + I_1 \dot{\phi}_x) \dot{u} + (I_1 \dot{u} + I_2 \dot{\phi}_x) \dot{\phi}_x + (I_0 \dot{v} + I_1 \dot{\phi}_y) \dot{v} + (I_1 \dot{v} + I_2 \dot{\phi}_y) \dot{\phi}_y + I_0 \dot{w} \delta \dot{w}_0] dx dy \quad (25)$$

将式 (21)~式 (24) 代入到式 (20) 可得势能表达式

$$U = \iint_s (N_{xx} \varepsilon_{xx} + N_{yy} \varepsilon_{yy} + N_{xy} \varepsilon_{xy} + Q_x \varepsilon_{xz} + Q_y \varepsilon_{yz}) ds \quad (26)$$

式中

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (27a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (27b)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_s(z) z^i dz \quad (i = 0, 1, 2) \quad (27c)$$

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (27d)$$

利用 Chebyshev-Ritz 法求解悬臂板的固有频率, 假设夹层板的横向振动位移和转角位移函数表达式为^[32]

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= U(x, y)e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= V(x, y)e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= W(x, y)e^{i\omega t} \\ \phi_x(x, y, t) &= \Phi_x(x, y)e^{i\omega t} \\ \phi_y(x, y, t) &= \Phi_y(x, y)e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中, $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$, $\Phi_x(x, y)$, $\Phi_y(x, y)$ 均表示振型函数, 这些振型函数可以用 Chebyshev 函数展开为

$$U(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} T_m(\zeta) T_n(\eta) \quad (29a)$$

$$V(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} T_m(\zeta) T_n(\eta) \quad (29b)$$

$$W(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} T_m(\zeta) T_n(\eta) \quad (29c)$$

$$\Phi_x(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{xmn} T_m(\zeta) T_n(\eta) \quad (29d)$$

$$\Phi_y(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{ymn} T_m(\zeta) T_n(\eta) \quad (29e)$$

式中, $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Phi_{xmn}, \Phi_{ymn}$ 为待定系数, 其中

$$T_m = f_\delta(\zeta) p_m(\zeta), T_n = g_\delta(\eta) p_n(\eta) \quad (\delta = u, v, w, \phi_x, \phi_y) \quad (30)$$

l 阶的第一类 Chebyshev 多项式可写为

$$P_l(\chi) = \cos[(s-1)\arccos(\chi)] \quad (l = m, n; \chi = \zeta, \eta) \quad (31)$$

将式 (28)~式 (31) 代入动能和势能表达式 (25) 和式 (26) 中, 在积分域中积分, 可得到曲壁蜂窝夹层板的最大动能 $T_{\max}$ 和最大势能 $U_{\max}$. 函数 $\Pi = U_{\max} - T_{\max}$, 令

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_{mn}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial V_{mn}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial W_{mn}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_{xmn}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_{ymn}} = 0 \quad (32)$$

式 (32) 可转为以下矩阵形式

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (33)$$

式中, ω 为固有频率, $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别表示刚度矩阵和质量矩阵. $\mathbf{d}$ 表示特征向量, 可写为

$$\mathbf{d} = \{U_{11}, \dots, U_{MN}, V_{11}, \dots, V_{MN}, W_{11}, \dots, W_{MN}, \Phi_{x11}, \dots, \Phi_{xMN}, \Phi_{y11}, \dots, \Phi_{yMN}\} \quad (34)$$

Chebyshev 法是一种截断法, 为了权衡收敛性和运算效率, 利用该方法求解曲壁蜂窝夹层板的固有频率时需要找到一个合适的截断阶数. 通过计算不同截断阶数下系统的第一阶固有频率, 发现在截断阶数为 7 时, 曲壁蜂窝夹层板第一阶固有频率基本收敛 (图 6).

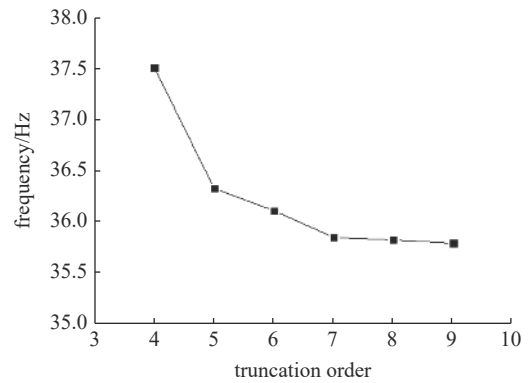


图 6 不同截断数下夹层板的第一阶固有频率

Fig. 6 The first natural frequency of the sandwich plate with different truncation orders

2 曲壁蜂窝夹层结构振动试验

搭建如图 7 所示的悬臂板振动试验平台. 测量曲壁蜂窝夹层板各点在扫频过程的激励随频率的变化, 计算出频响曲线, 并与理论模型和有限元模型得到的结果做对比.

采用极光尔沃公司的 A8S 型 3D 打印机打印试验用的曲壁蜂窝夹层板, 材料选取聚乳酸 PLA.



图 7 振动试验平台

Fig. 7 Vibration test platform

3D 打印机精度的限制导致打印误差, 制备试件的微观组织存在材料不均匀的问题, 因此打印后材料的力学特性与基材存在一定差异. 针对这一问题, 利用 3D 打印机制作了拉伸试样, 并利用万能试验机进行拉伸试验, 万能试验机和拉伸试件如图 8 所示. 试验获得了材料应力-应变曲线如图 9 所示, 经计算得到 3D 打印后材料的杨氏模量约为 1660 MPa, PLA 的泊松比为 0.2^[31], 密度为 12.5 g/mm³. 制备的试件曲壁半径 $R = 20$ mm, 直壁高 $h = 5$ mm, 曲壁弧度 $\theta = \pi/6$, 蒙皮厚度 $h_f = 1.5$ mm, 芯层厚度 $h_c = 12$ mm, 单胞在 x 轴方向长度 $L_x = 40$ mm 在 y 轴方向长度 $L_y = 17.36$ mm, 壁厚 $b = 2$ mm, 制备的夹层板长 320 mm, 宽 173.58 mm, 厚 15 mm.

搭建的振动测试平台主要由杭州亿恒振动控制公司的 MP102 型功率放大器、INV3062 T 型信号采集仪和航天希尔公司的 L620 M 型振动台组成, 加速度传感器采用奇石乐公司的 INV-9828 型加速度传感器. 试验工况如图 10 所示, 应用夹具和螺栓螺母将蜂窝夹层板固定到振动台上. 在曲壁蜂窝夹层板的激励端、中间端、自由端、角端和侧端放置加

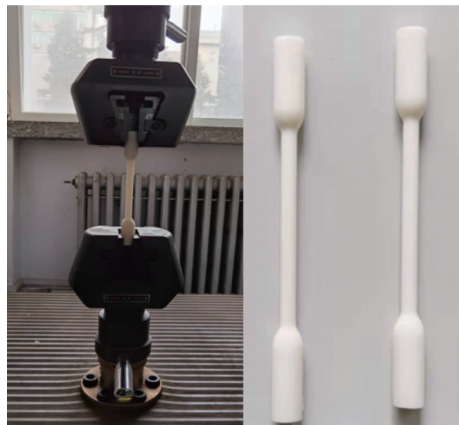


图 8 准静态拉伸试验及试样

Fig. 8 Quasi-static tensile test and test specimens

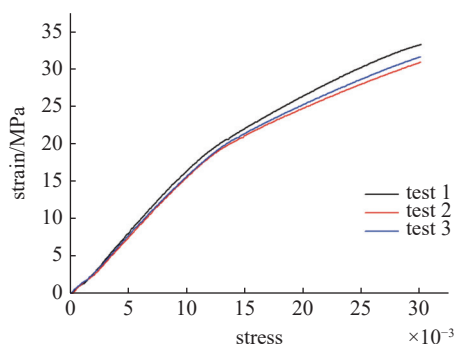
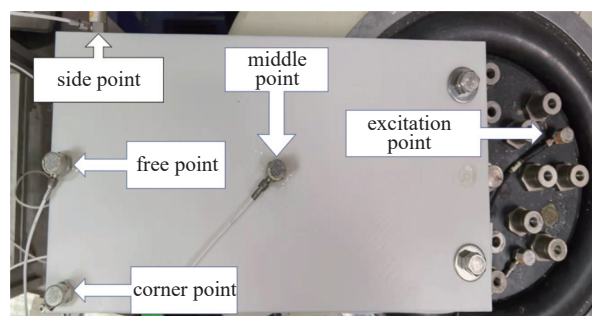
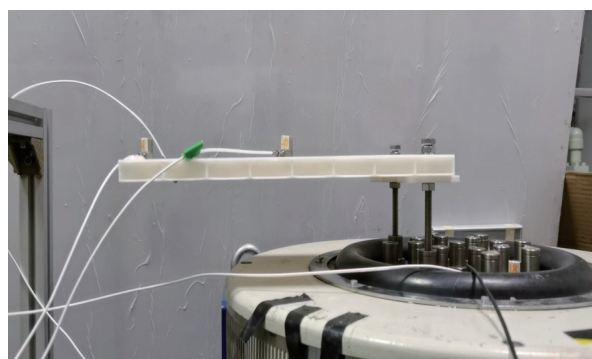


图 9 试验测得的试样的应力-应变曲线

Fig. 9 Stress-strain curves from test



(a) 试验测点位置
(a) Position of test points



(b) 试验工况
(b) Vibration test condition

图 10 振动试验工况及测点位置

Fig. 10 Vibration test condition and position of test points

速度传感器, 分别测量曲壁蜂窝夹层板面外和面内横向方向的响应.

为了测量曲壁蜂窝芯的隔振性能, 利用 3D 打印机制备如下曲壁蜂窝结构试件: 曲壁半径 $R = 40$ mm, 直壁高 $h = 5$ mm, 曲壁弧度 $\theta = \pi/6$, 芯层厚度 $h_c = 12$ mm, 壁厚 $b = 2$ mm 的曲壁蜂窝芯, 隔振试验工况如图 11 所示, 在激励端和曲壁蜂窝芯顶端放置了加

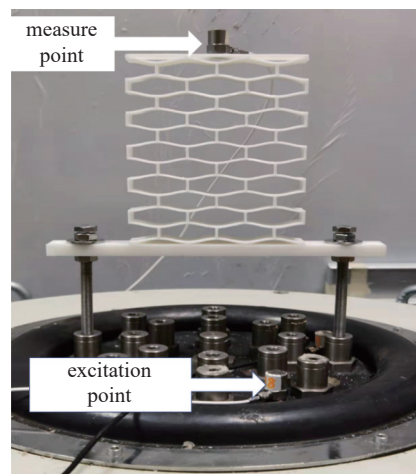


图 11 蜂窝芯振动试验工况及测点位置

Fig. 11 Conditions of honeycomb core vibration test and position of test points

速度传感器以测量冲击激励信号和响应信号。

3 有限元模型的建立

为了模拟曲壁蜂窝结构在振动台上的动力学响应,使用有限元法求解器 ABAQUS 进行了模拟。在有限元模型中,选取的网格为 10 节点六面体 C3D10 单元,建立了如图 12 所示的有限元模型,在有限元软件划分网格过程中考虑的网格收敛性问题,经过多网格尺寸模型的仿真结果,发现当网格尺寸大小为 0.5 mm 时夹层板的第一阶固有频率已经收敛,如图 13 所示。故本文中有有限元模型的网格尺寸选择为 0.5 mm。设定 PLA 材料的力学参数,包括杨氏模量 $E = 1660 \text{ MPa}$ 、泊松比 $\nu = 0.2$,模拟加速

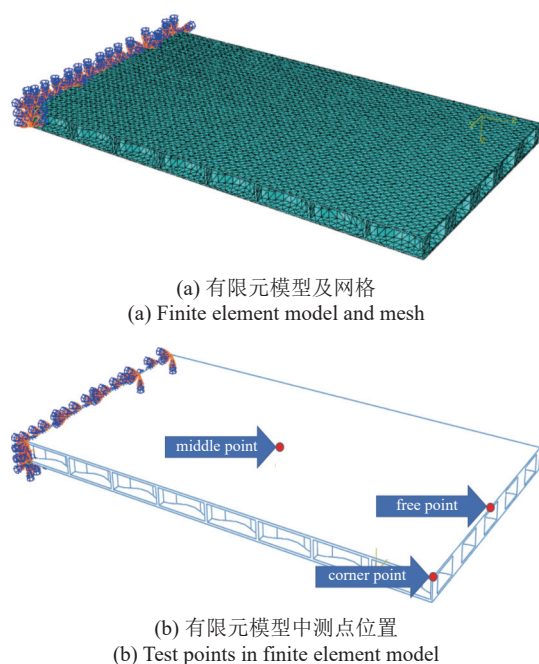


图 12 曲壁蜂窝夹层板有限元模型

Fig. 12 Finite element model of honeycomb sandwich plate with curved wall

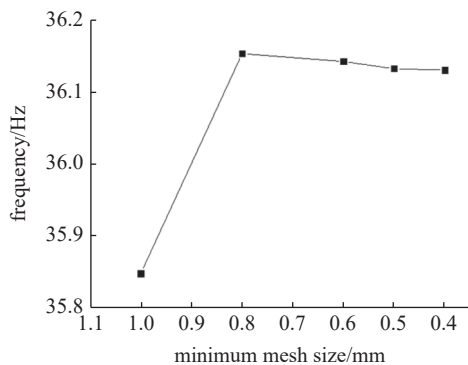


图 13 有限元模型网格收敛性分析

Fig. 13 Analysis of mesh convergence of finite element model

度为 0.2 g 的振动台扫频过程,见图 3。

4 结果与讨论

4.1 曲壁蜂窝夹层板扫频试验与仿真结果

通过信号采集仪获得的激励端、中端、自由端和角端的扫频频响曲线如图 14 所示。试验发现安装在侧端的传感器没有响应,原因可能为夹层板面内振动幅度较小,传感器量程不足导致漏测。

从频响曲线中可获得可能的曲壁蜂窝夹层板前几阶固有频率,对蜂窝夹层板进行频率为 1 阶和 3 阶固有频率的定频谐波驻留实验,作用时间 10 s,限制位移峰值 2 mm。激励频率为 31.25 Hz 和 254 Hz 时,定频激励下曲壁蜂窝夹层板的幅频响应特性如图 15 所示。由图 15(a) 可知,当激励频率为 31.25 Hz 时,曲壁蜂窝夹层板除了在 31.25 Hz 处的主共振外,还激发了多个超谐波共振;而当激励频率为 254 Hz 时,只有主共振。在激励频率为 1 阶固有频率时,曲壁蜂窝夹层板的振动产生的位移较大。

对所建立的有限元模型进行模态分析,可得曲壁蜂窝夹层板的前 5 阶固有频率及振型。理论模型、有限元模型和试验得到的前 5 阶固有频率如图 16 所示,表 1 为夹层板理论解与有限元模型求解和试验得到的前 5 阶固有频率对比。根据有限元模型得出的振型发现悬臂边界下的第 4 阶振型模态为板在 x 方向的往复摆动,由于试验中侧端未测量到有效的响应,故无法从试验中得出曲壁蜂窝夹层板的第 4 阶固有频率。从数值上可以发现理论模型与有限元模型求到的前 5 阶固有频率最大误差为 4.93%,最小误差为 0.57%,理论模型与试验所得结果的误差也在可以接受的范围内,这些在一定程度上都可以说明理论模型的正确性。

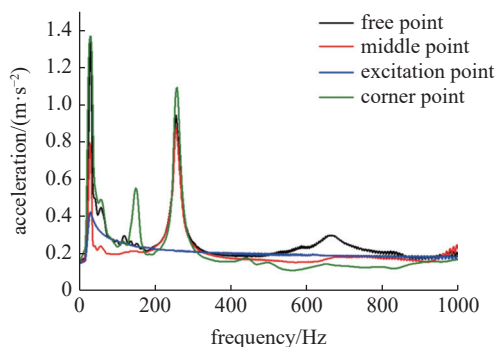
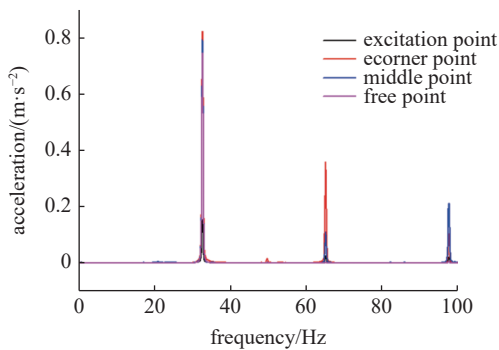
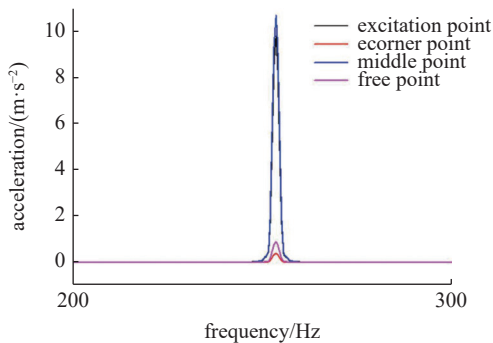


图 14 0~1000 Hz 扫频过程中测点响应

Fig. 14 Response of test point during 0~1000 Hz



(a) 在 31.25 Hz 驻波试验中的响应
(a) Responses in 31.25 Hz standing wave test



(b) 在 252.25 Hz 驻波试验中的响应
(b) Responses in 252.25 Hz standing wave test

图 15 曲壁蜂窝夹层板在定频驻波试验中的响应

Fig. 15 Responses of honeycomb sandwich plate in constant frequencies standing wave test

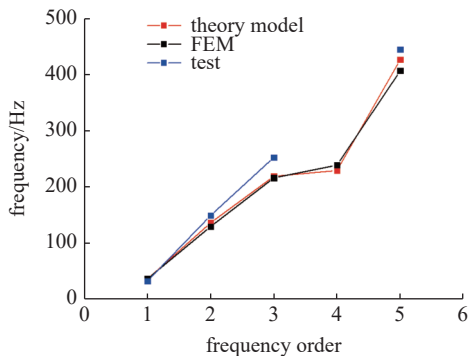


图 16 曲壁蜂窝夹层板的前 5 阶固有频率

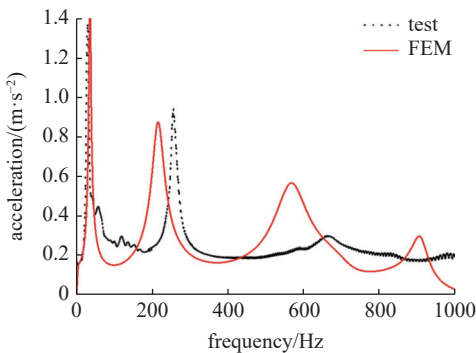
Fig. 16 The first 5 order natural frequencies of curved-wall honeycomb sandwich plate

图 17 为试验和有限元模型的扫频频响曲线对比, 可以发现两者规律大体一致, 曲线走势大致相同. 这说明在相同频率激励下, 试验与有限元模型的响应相同, 即同阶固有频率下的振型相同. 理论模型和有限元模型计算出的曲壁蜂窝夹层板的前 3 阶振型如图 18 所示, 曲壁蜂窝夹层板的 1 阶振型为弯曲模态, 2 阶为扭转模态, 3 阶为拉弯耦合模态. 由 1 阶模态可以发现模态最大位移出现在结构的自由端.

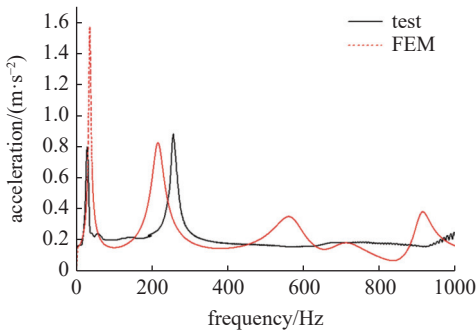
表 1 前 5 阶固有频率结果对比

Table 1 Comparison of the first 5 order natural frequencies results

Frequency/Hz	Vibration order				
	1st	2nd	3rd	4th	5th
Theory	35.81	135.93	218.60	229.05	426.38
FEM	36.13	129.24	215.82	238.53	406.53
error/%	0.89	4.93	1.04	4.14	4.65
Test	32.25	149	252.25	—	444.25
error/%	9.94	9.61	15.2	—	4.19



(a) 自由端响应
(a) Response of free edge point



(b) 中端响应
(b) Response of middle point

图 17 试验和有限元模型的扫频频响曲线对比

Fig. 17 Comparison of sweep frequency curves between test and finite element model

通过对比理论模型和实验求出的前 5 阶固有频率, 发现最大误差达 15.2%, 理论模型与试验结果出现较大误差的原因可能有以下几点: (1) 3D 打印机的最小打印精度为 0.02 mm, 打印出的曲壁蜂窝夹层板材质不够均匀, 无法完全满足设计要求; (2) 在试验过程中夹具夹紧曲壁蜂窝夹层板的边缘时, 会对夹层板产生预紧力的作用, 并且这个产生的预紧力在振动试验中会发生动态的变化; (3) 理论模型应

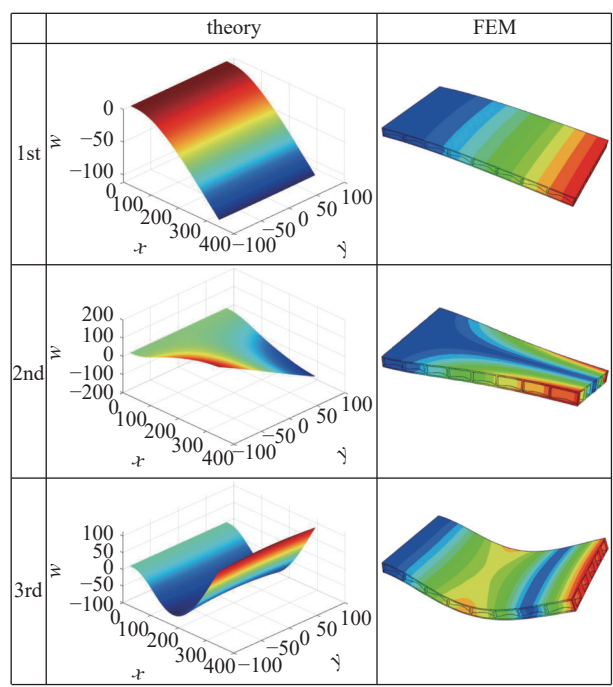


图 18 曲壁蜂窝夹层板的前 3 阶振型对比

Fig. 18 Comparison of the first three modes of honeycomb sandwich plate

用的是试验测得 PLA 材料的杨氏模量, 只考虑了材料在线弹性阶段的变形, 并未考虑结构在响应足够大的时候会产生大变形, 同时也未考虑材料的黏弹性和阻尼等对试验结果的影响; (4) 未考虑加速度传感器对试验结果的影响, 金属传感器使蜂窝夹层板在试验过程中质量分布变得不均匀, 并且增大了板的质量.

4.2 曲壁蜂窝夹层板的参数研究

基于已建立的曲壁蜂窝夹层板动力学模型, 研究单胞的几何参数对蜂窝夹层板的前 5 阶固有频率的影响. 选取的材料参数与第 3 节中一致. 壁厚、曲壁半径和曲壁弧度对前 5 阶固有频率的影响分别如表 2~表 4 所示. 从表中的数据可以发现随着蜂窝胞

表 2 不同壁厚夹层板的固有频率

Table 2 Natural frequencies of sandwich plate with different wall thicknesses

Vibration order	Thickness/mm				
	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
1st	36.759	36.371	35.812	34.684	33.548
2nd	141.789	138.584	135.934	133.138	131.985
3rd	222.159	219.070	218.607	215.359	207.203
4th	239.694	234.894	229.055	222.481	218.335
5th	446.995	435.837	426.387	419.884	412.145

表 3 不同曲壁半径夹层板的固有频率

Table 3 Natural frequencies of sandwich plate with different curved radius

Vibration order	Radius/mm				
	15.0	17.5	20.0	22.5	25.0
1st	33.984	34.370	35.812	36.188	36.593
2nd	132.039	134.094	135.934	137.163	138.517
3rd	213.256	214.318	218.607	219.249	220.964
4th	223.894	226.731	229.055	236.473	239.395
5th	415.498	421.252	426.387	431.476	435.495

表 4 不同曲壁弧度夹层板的固有频率

Table 4 Natural frequencies of sandwich plate with different curvature radian

Vibration order	Radian/(°)				
	30	45	60	75	90
1st	35.812	36.486	40.334	42.981	41.093
2nd	135.934	139.518	153.903	155.815	156.117
3rd	218.607	219.439	240.159	247.947	233.314
4th	229.055	233.445	248.511	253.024	240.821
5th	426.387	434.681	467.185	478.395	458.317

元壁厚的增加, 蜂窝夹层板的前 5 阶固有频率整体呈现减小趋势. 随着单胞曲壁半径的增大, 蜂窝夹层板的固有频率逐渐增大. 当曲壁弧度在 30°~75°的范围内, 夹层板的固有频率随着曲壁弧度的增大而增大.

4.3 曲壁蜂窝芯的隔振与抗冲击试验

本节隔振试验测试曲壁蜂窝芯的响应加速度以表征结构的隔振性能. 振动台设置的激励范围为 15~1000 Hz. 振动加速度为 0.1 m/s². 定义加速度传递率为输出加速度与输入加速度的比值, 作为频率的函数, 可表示为

$$T = \lg \frac{a_{out}}{a_{in}}$$

(35)

图 19 显示了曲壁蜂窝芯在指定频率范围内的传递率变化曲线. 从传递率曲线可知曲壁蜂窝芯在 505.25~645.75 Hz 的频率范围内有一定的隔振能力, 以及在 674.5 Hz 以上的高频范围内有显著的隔振作用. 试验出现这种现象的原因因为结构选用的材料

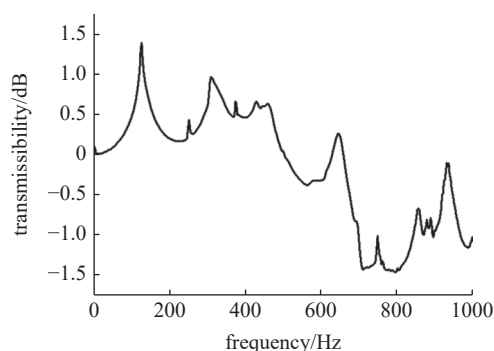
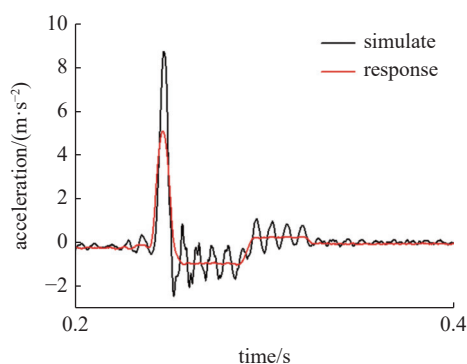


图 19 曲壁蜂窝芯的传递率

Fig. 19 Transmissibility of curved-wall honeycomb core

PLA 是一种脆性材料, 由 PLA 制作的蜂窝芯具有很高的初始刚度, 所以在低频阶段的隔振能力并不显著. 但是试验发现这种脆性材料制造的结构在高频范围内有一定的隔振能力.

试验测得的曲壁蜂窝芯的冲击响应如图 20 所示, 选取的波形为正弦波, 脉冲峰值为 $8g$, 脉冲宽度为 11 ms . 从冲击加速度响应可以得出曲壁蜂窝芯具有较强的抗冲击能力, 响应的最大峰值为 $5g$ 较激励有了显著的降低, 证实了曲壁蜂窝夹层板具有较强的抗冲击能力.

图 20 夹层板在 $8g$ 正弦波激励下的响应Fig. 20 Response of honeycomb sandwich plate excited by $8g$ sine wave

5 结论

本文推导了曲壁蜂窝的等效弹性参数, 给出悬臂边界下曲壁蜂窝夹层板的动力学模型, 利用 Chebyshev-Ritz 方法研究夹层板的固有频率, 并与有限元所得结果进行对比. 利用增材制造的方法制作了曲壁蜂窝夹层板试件, 利用振动台对试件进行了正弦扫频试验、谐波驻留试验和冲击实验, 得出结论如下.

(1) 利用 Chebyshev-Ritz 方法研究曲壁蜂窝夹层板是可行的, 理论模型与有限元模型所求得的前 5 阶固有频率误差在 5% 以内, 在误差允许范围内, 试验结果也验证了理论模型的正确性.

(2) 通过对曲壁蜂窝夹层板进行参数研究, 发现随着蜂窝胞元壁厚的增加, 蜂窝夹层板的前 5 阶固有频率整体呈现减小趋势. 随着单胞曲壁半径的增大, 蜂窝夹层板的固有频率逐渐增大. 当曲壁弧度在 $30^\circ \sim 75^\circ$ 的范围内, 夹层板的固有频率随着曲壁弧度的增大而增大.

(3) 通过对曲壁蜂窝芯的隔振和冲击试验, 可以发现曲壁蜂窝芯具有一定的高频的隔振能力, 并且有较高的抵抗冲击性能, 这将为蜂窝夹层结构在隔振和抗冲击方面的应用提供新的启示.

参 考 文 献

- 1 吴文旺, 肖登宝, 孟嘉旭等. 负泊松比结构力学设计、抗冲击性能及在车辆工程应用与展望. 力学学报, 2021, 53(3): 611-638 (Wu Wenwang, Xiao Dengbao, Meng Jiaxu, et al. Structural mechanics design, impact resistance and application of negative Poisson's ratio in vehicle engineering. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(3): 611-638 (in Chinese))
- 2 侯秀慧, 吕游, 周世奇等. 新型负刚度吸能结构力学特性分析. 力学学报, 2021, 53(7): 1940-1950 (Hou Xiuhui, Lü You, Zhou Shiqi, et al. Analysis of mechanical properties of new negative stiffness energy absorbing structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(7): 1940-1950 (in Chinese))
- 3 Desguers T, Robinson A. An analytical and numerical investigation into conductive-radiative energy transfers in evacuated honeycombs. Application to the optimisation and design of ultra-high temperature thermal insulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2022, 188: 122578
- 4 任树伟, 辛锋先, 卢天健. 蜂窝层芯夹层板结构振动与传声特性研究. 力学学报, 2013, 45(3): 349-358 (Ren Shuwei, Xin Fengxian, Lu Tianjian. Study on vibration and sound transmission characteristics of honeycomb core sandwich laminate structure. *Chinese journal of theoretical and applied mechanics*, 2013, 45(3): 349-358 (in Chinese))
- 5 尹剑飞, 蔡力, 方鑫等. 力学超材料研究进展与减振降噪应用. 力学进展, 2022, 52(3): 1-78 (Yin Jianfei, Cai Li, Fang Xin, et al. Research progress and application of mechanical metamaterials in vibration and noise reduction. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(3): 1-78 (in Chinese))
- 6 Gibson LJ, Ashby MF. Cellular Solids: Structure and Properties. Cambridge: Cambridge University Press, 1997: 135-150
- 7 富明慧, 徐欧腾, 陈誉. 蜂窝芯层等效参数研究综述. 材料导报, 2015, 29(5): 127-134 (Fu Minghui, Xu Oteng, Chen Yu. Review on equivalent parameters of honeycomb core layer. *Materials review*, 2015, 29(5): 127-134 (in Chinese))
- 8 杨稳, 张胜兰, 李莹. 蜂窝夹层结构等效模型研究进展. 复合材料科学与工程, 2020, 10: 122-128 (Yang Wen, Zhang Shenglan, Li

- Ying. Research progress in equivalent models of honeycomb sandwich structures. *Composites Science and Engineering*, 2020, 10: 122-128 (in Chinese))
- 9 乐京霞, 周智斌, 王思宇等. 箭型蜂窝夹层板力学性能及等效方法研究. 华中科技大学学报 (自然科学版), 2021, 49(10): 121-126 (Le Jingxia, Zhou Zhibin, Wang Siyu, et al. Study on mechanical properties and equivalent method of arrow honeycomb sandwich laminate. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2021, 49(10): 121-126 (in Chinese))
 - 10 Liu JL, Liu JY, Mei J, et al. Investigation on manufacturing and mechanical behavior of all-composite sandwich structure with Y-shaped cores. *Composites Science & Technology*, 2018, 159: 87-102
 - 11 Ru ZA, Xin RA, Xiang Y, et al. Mechanical properties of concrete composites with auxetic single and layered honeycomb structures. *Construction and Building Materials*, 2022, 322: 126453
 - 12 Albert FG, Giovanni GG, Marco A, et al. Mechanical performance of additively manufactured lightweight cellular solids: influence of cell pattern and relative density on the printing time and compression behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 122: 1-26
 - 13 Zwab C, Jdab C, Kai L, et al. Hybrid hierarchical square honeycomb with widely tailorable effective in-plane elastic modulus. *Thin-Walled Structures*, 2022, 171: 108816
 - 14 Lee N, Horstemeyer MF, Rhee H, et al. Hierarchical multiscale structure-property relationships of the red-bellied woodpecker (*Melanerpes carolinus*) beak. *Journal of The Royal Society Interface*, 2014, 11(96): 20140274
 - 15 Yang XF, Sun YX, Yang JL, et al. Out-of-plane crashworthiness analysis of bio-inspired aluminum honeycomb patterned with horse-shoe mesostructure. *Thin-Walled Structures*, 2018, 125: 1-11
 - 16 Deng X, Liu W. In-plane impact dynamic analysis for a sinusoidal curved honeycomb structure with negative Poisson's ratio. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36: 103-109
 - 17 Qiu J, Lang JH, Slocum AH. A curved-beam bistable mechanism. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, 13(2): 137-146
 - 18 Restrepo D, Mankame ND, Zavattieri PD. Phase transforming cellular material (PXCm) mechanical response and hysteretic behavior comparison with other cellular materials. *Extreme Mechanics Letters*, 2015, 4: 52-60
 - 19 Debeau DA, Seepersad CC, Haberman MR. Impact behavior of negative stiffness honeycomb materials. *Journal of Materials Research*, 2018, 33: 290-299
 - 20 Chen S, Tan XJ, Hu JQ, et al. A novel gradient negative stiffness honeycomb for recoverable energy absorption. *Composites Part B: Engineering*, 2021, 215: 108745
 - 21 Di K, Mao XB. Free flexural vibration of honeycomb sandwich laminate with negative Poisson's ratio simple supported on opposite edges. *Acta Mater Compositae Sinica*, 2016, 33: 910-920
 - 22 Li C, Shen HS, Wang H. Nonlinear dynamic response of sandwich laminates with functionally graded auxetic 3D lattice core. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100: 3235-3252
 - 23 Wu X, Li YG, Cai W, et al. Dynamic responses and energy absorption of sandwich laminate with aluminium honeycomb core under ice wedge impact. *International Journal of Impact Engineering*, 2022, 162: 104137
 - 24 Ma MZ, Yao WX, Jiang W, et al. Fatigue of composite honeycomb sandwich laminates under random vibration load. *Composite Structures*, 2022, 286: 115296
 - 25 Zhang W, Ma L, Zhang YF, et al. Nonlinear and dual-parameter chaotic vibrations of lumped parameter model in blisk under combined aerodynamic force and varying rotating speed. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 108: 1217-1246
 - 26 陈永清, 仇琨, 李响. 类蜂窝夹层结构振动特性分析及应用研究. 机械, 2022, 49(1): 9-15,36 (Chen Yongqing, Qiu Kun, Li Xiang. Analysis and application of vibration characteristics of honeycomb-like sandwich structures. *Mechanical*, 2022, 49(1): 9-15,36 (in Chinese))
 - 27 Arunkumar MP, Pitchaimani J, Gangadharan KV, et al. Numerical and experimental study on dynamic characteristics of honeycomb core sandwich laminate from equivalent 2D model. *Sādhanā*, 2020, 45(1): 206
 - 28 闫昭臣, 张君华, 刘彦琦. 不同泊松比蜂窝夹层板的振动实验分析. 应用力学学报, 2021, 38(6): 2256-2261 (Yan Zhaochen, Zhang Junhua, Liu Yanqi. Vibration experimental analysis of honeycomb sandwich laminate with different Poisson ratios. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2021, 38(6): 2256-2261 (in Chinese))
 - 29 何贵勤, 曹登庆, 陈帅等. 挠性航天器太阳翼全局模态动力学建模与实验研究. 力学学报, 2021, 53(8): 2312-2322 (He Guiqin, Cao Dengqing, Chen Shuai, et al. Study on global mode dynamic modeling and experiment for a solar array of the flexible spacecraft. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(8): 2312-2322 (in Chinese))
 - 30 杨雨恒, 张周锁, 史文博等. 铝蜂窝夹层板动力学建模仿真与试验验证. 机械设计, 2021, 38(8): 9-16 (Yang Yuheng, Zhang Zhousuo, Shi Wenbo, et al. Dynamic modeling simulation and experimental verification of aluminum honeycomb sandwich Laminate. *Journal of Machine Design*, 2021, 38(8): 9-16 (in Chinese))
 - 31 Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Laminates and Shells: Theory and Analysis. New York: CRC Press, 2004: 110-120
 - 32 Dozio L, Carrera E. Ritz analysis of vibrating rectangular and skew multilayered laminates based on advanced variable-kinematic models. *Composites Structures*, 2012, 94(6): 2118-2128