

## 镜像对称顶盖驱动方腔内流过渡流临界特性研究

安 博, 孟欣雨, 桑为民

### ON THE TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF MIRROR SYMMETRIC LID-DRIVEN CAVITY FLOW

An Bo, Meng Xinyu, and Sang Weimin

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-218>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 三维方腔介电液体电对流的数值模拟研究

NUMERICAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL ELECTRO-CONVECTION OF DIELECTRIC LIQUIDS IN A CUBICAL CAVITY

力学学报. 2018, 50(6): 1458-1469

#### 一种力-电协同驱动的细胞微流控培养腔理论模型

A THEORETICAL MICROFLUIDIC FLOW MODEL FOR THE CELL CULTURE CHAMBER UNDER THE PRESSURE GRADIENT AND ELECTRIC FIELD DRIVEN LOADS

力学学报. 2018, 50(1): 124-137

#### 海陆过渡相页岩气藏不稳定渗流数学模型

AN UNSTABLE POROUS FLOW MODEL OF MARINE-CONTINENTAL TRANSITIONAL SHALE GAS RESERVOIR

力学学报. 2021, 53(8): 2257-2266

#### 水中开孔腔流激振荡控制实验研究

EXPERIMENTAL INVESTIGATION INTO THE CONTROL OF FLOW-INDUCED OSCILLATIONS OF UNDERWATER APERTURE-CAVITIES

力学学报. 2021, 53(10): 2762-2775

#### 仿双髻鲨头部的仿生机器鱼外型设计及其流场特性

SHAPE DESIGN AND FLOW FIELD CHARACTERISTICS OF A ROBOTIC FISH IMITATING THE HEAD OF A HAMMERHEAD

力学学报. 2021, 53(12): 3389-3398

#### 基于数据驱动的流程控制方程的稀疏识别

DATA-DRIVEN SPARSE IDENTIFICATION OF GOVERNING EQUATIONS FOR FLUID DYNAMICS

力学学报. 2021, 53(6): 1543-1551



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

镜像对称顶盖驱动方腔内流过渡流临界特性研究<sup>1)</sup>安 博<sup>\*,†,\*\*</sup> 孟欣雨<sup>\*</sup> 桑为民<sup>\*,2)</sup><sup>\*</sup>(西北工业大学航空学院, 西安 710072)<sup>†</sup>(中国空气动力研究与发展中心结冰与防除冰重点实验室, 四川绵阳 621000)<sup>\*\*</sup>(翼型、叶栅空气动力学国家重点实验室, 西安 710072)

**摘要** 流场过渡流临界特性是指流场因流动状态改变而引起的流场物理特性变化. 如流动从定常演化为非定常周期性时, 流动处于过渡状态的物理性质. 它从根本上决定了流动演化模式和流场特性等物理规律, 对认清流动现象的形成机理有重要意义. 本文在之前腔体内流流场过渡流临界特性研究的基础上, 针对镜像对称顶盖驱动方腔内流开展数值模拟和流场稳定性分析研究, 捕捉各流动分岔点, 如 Hopf 流动分岔点和 Neimark-Sacker 流动分岔点等, 并揭示其对流场特性的影响; 分析流场演化模式, 随着雷诺数增大从定常状态依次演化为非定常周期性流动、准周期性流动和湍流; 揭示各种流动现象的形成机理, 如流动滞后、对称性破坏、能量级串等; 分析流场拓扑结构, 阐明流场镜像对称性和流场稳定性的关系. 本文研究成果有助于揭示该流场的物理特性, 进一步完善了内流流场特性的研究. 研究发现, 针对本文镜像对称方腔顶盖驱动内流, 流场稳定性的破坏总是以 Hopf 流动分岔点的出现而发生并且伴随着流场对称性的破坏; 流场演化模式符合经典的 Ruelle-Takens 模式; 流动从定常状态演化至非定常周期性流动时存在流动滞后现象.

**关键词** 镜像对称顶盖驱动方腔, 过渡流临界特性, 流场稳定性, 流场对称性, 流动分岔点

中图分类号: O3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-218

ON THE TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF MIRROR SYMMETRIC  
LID-DRIVEN CAVITY FLOW<sup>1)</sup>An Bo<sup>\*,†,\*\*</sup> Meng Xinyu<sup>\*</sup> Sang Weimin<sup>\*,2)</sup><sup>\*</sup>(School of Aeronautic, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072)<sup>†</sup>(Key Laboratory of Icing and Anti/De-icing, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, Sichuan, China)<sup>\*\*</sup>(National Key Laboratory of Science and Technology on Aerodynamic Design and Research, Xi'an 710072)

**Abstract** The transitional critical characteristics refer to the change of physical properties of flow field caused by the change of different flow states, which is amid the transitional stages. For instance, when flow evolves from steady to unsteady periodic. It fundamentally determines physical laws, like evolution mode and flow characteristics, deep inside the corresponding flow field, which is of great importance and necessity to understand the formation mechanism of flow phenomena. In this paper, the numerical simulations and flow stability analysis are carried out for the mirror symmetric lid driven cavity flow. The flow bifurcations, such as Hopf bifurcation and Neimark-Sacker bifurcation, are captured and

2022-05-23 收稿, 2022-07-11 录用, 2022-07-12 网络版发表.

1) 翼型、叶栅空气动力学重点实验室基金(614220121030101)和中国空气动力研究与发展中心结冰与防除冰重点实验室开放课题基金(IADL20210302)资助项目.

2) 桑为民, 教授, 研究方向: 空气动力学、计算流体力学. E-mail: sangweimin@nwpu.edu.cn

引用格式: 安博, 孟欣雨, 桑为民. 镜像对称顶盖驱动方腔内流过渡流临界特性研究. 力学学报, 2022, 54(9): 2409-2418

An Bo, Meng Xinyu, Sang Weimin. On the transitional characteristics of mirror symmetric lid-driven cavity flow. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(9): 2409-2418

their influence on the flow characteristics is discussed. The flow evolution mode is analyzed as well, it is found that with the increase of Reynolds numbers, the flow evolves from a steady state to a unsteady periodic state, then to a quasi-periodic state and finally into chaos. It is explained that the formation mechanism of various flow phenomena, for example, flow hysteresis, symmetry loss, energy cascade, etc. The flow topology is analyzed and the relation between mirror symmetry and stability is clarified. The conclusions of the present study is helpful to better understand the physics of this internal flow field, further completing the corresponding research of on this research direction, such as the classic lid driven cavity flow. Based on the findings of present study, we have found that the unsteadiness of flow field always starts as the Hopf bifurcation appears, the flow symmetry breaks as soon as the flow unsteadiness shows up. It is found that the flow evolves as the classic Ruelle-Takens mode and the flow hysteresis is observed when flow evolves from a steady state to an unsteady periodic state.

**Key words** mirror symmetric lid-driven cavity flow, transitional characteristics, flow stability, flow symmetry, flow bifurcations

## 引言

过渡流临界特性作为流体力学中的经典问题长期受到学界的关注. Hof 等<sup>[1]</sup>在 *Science* 上撰文强调, 过渡流临界特性的研究对揭示流动物理本质起到了至关重要的作用, 同时对流场演化模式起到了决定性的作用. 他们认为, 流场演化是个极为复杂的过程, 需要细节化的分类探索来准确把握诸如湍流等复杂流场的物理特性. Avila 等<sup>[2]</sup>也在 *Science* 上撰文阐述, 过渡流研究对认识流场的重要作用, 对比经典的 Landau-Ruelle-Takens 流场演化模式, 他们认为混沌的空间扩散是湍流特性的决定性过程和固有本质. 同时 Graham<sup>[3]</sup>在 *Nature* 上也介绍了过渡流的概念, 文中再次强调了过渡流临界特性研究的重要性, 同时指出过渡流的相关研究为解释更为复杂的流动现象铺平了道路. 此外诸多学者<sup>[4-13]</sup>在 *Annual Review of Fluid Mechanics* 和 *Journal of Fluid Mechanics* 上先后强调了过渡流临界特性研究在流体力学研究中的应用价值. 虽然他们就不同视角从不同层面探讨了不同的内容, 但是学者们一致肯定了过渡流研究的重要性和必要性, 在正确认识物理本质的同时不断推进本学科的蓬勃发展, 为解决更为复杂的流动问题打下了坚实的基础.

作为过渡流临界特性的核心研究内容, 流动分岔点 (flow bifurcations) 表征的是流场不同流动状态 (定常流动、非定常周期性流动、非定常准周期性流动、湍流) 的物理特性临界点. 常见的流动分岔点, 比如 Hopf 流动分岔点, 它的出现意味着此时的流动随雷诺数增加已经从定常状态演化至非定常周

期性状态, 流动会随时间产生周期的循环变化. 根本原因是流场稳定性被破坏了, 取而代之的是流场周期性特征. 随着雷诺数进一步增加, 流动的非定常周期性特征也逐渐遭到破坏, 此时的流动虽然继承了部分周期性流动的物理特性, 但逐渐出现了准周期性流动的典型特征, 即基于庞加莱映射的双环形结构. 此时的流动不再以单一频率振荡, 流动表现出长周期和短周期的双频振荡. 而 Neimark-Sacker 流动分岔点正是非定常周期性流动和非定常准周期性流动的临界点; Period-doubling 流动分岔点出现后, 标志着流场从非定常周期性流动跃变至湍流; 再比如定常状态下, 区别不同拓扑结构流场解的 Saddle-node 流动分岔点和在研究流场拓扑结构时捕捉到的 Pitchfork 流动分岔点. 这样的基础研究, 对准确认识流场的物理特性意义巨大.

作者在之前的研究工作<sup>[14-15]</sup>中针对三角腔顶盖驱动内流, 经典方腔顶盖驱动内流以及上下边双驱动方腔内流开展了全面的流场稳定性分析研究. 较为完整地揭示了以上流动问题的流场过渡流临界特性. 同时发现流场拓扑结构的  $\pi$  旋转对称性与流场稳定性密切相关, 对流场的演化也有较大影响. 根据之前的研究经验发现对称驱动条件对于腔体内流的过渡流临界特性影响非常大. 当驱动条件布置在相向的两个边界时, 会导致流场内的镜像和  $\pi$  旋转对称性, 而这些流场对称性又与流场的稳定性息息相关, 对更好地理解流场物理规律有重要意义. 而单边镜像对称驱动内流的相对缺乏, 没有形成完整的体系化的研究. 本文独特的单边镜像驱动条件使得顶盖的剪应力分布相较于常规边界驱动内流发生了巨大变化, 导致了流场具有更强的失稳性, 其流动机理也

更为复杂. 为了进一步明晰镜像对称性与流场稳定性的关系及对流场演化的影响规律, 针对镜像对称顶盖驱动内流开展过渡流临界特性研究.

### 1 不可压缩 LBM 计算模型

本文的研究目的在于揭示镜像对称顶盖驱动方腔内流的过渡流临界特性, 数值模拟工作以低马赫数和低雷诺数为主. 所涉及马赫数为  $Ma = 0.1732$ , 雷诺数为  $Re \leq 20\,000$ , 因此选取传统格子 Boltzmann 方法<sup>[16-19]</sup>中的经典单松弛碰撞迁移模型作为本文数值模拟的计算模型, 且使用了目前应用最广泛的 LBGK D2Q9 模型<sup>[20]</sup>. 其中平衡态分布函数  $f_i^{eq}$  的构造为

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[ 1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (1)$$

式中,  $\omega_i$  和  $\mathbf{e}_i$  分别对应离散时空模型中不同离散方向的权系数和离散速度, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_i &= c \begin{bmatrix} 0, 1, 0, -1, 0, 1, -1, -1, 1 \\ 0, 0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, -1 \end{bmatrix} \\ \omega_i &= \begin{cases} 4/9, \mathbf{e}_i^2 = 0 \\ 1/9, \mathbf{e}_i^2 = c^2 \\ 1/36, \mathbf{e}_i^2 = 2c^2 \end{cases} \\ c_s &= \frac{c}{\sqrt{3}} \\ (i &= 0, 1, \dots, 8) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中,  $c = \Delta x / \Delta t = 1$  为格子速度,  $\Delta x$  为网格步长,  $\Delta t$  为时间步长. 格子 Boltzmann 控制方程为

$$F_i - f_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (3)$$

其中,  $f_i$  为碰撞迁移前的分布函数,  $F_i$  为碰撞迁移前的分布函数,  $\tau$  为松弛时间.  $\rho$  和  $\mathbf{u}$  为流体粒子的宏观密度和速度, 即

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sum_i f_i \\ \rho \mathbf{u} &= \sum_i \mathbf{e}_i f_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

## 2 数值模拟背景

### 2.1 计算域构建及参数设计

均匀直角网格具有网格质量好, 鲁棒性高等特点, 其网格结构天然契合格子 Boltzmann 方法的碰撞迁移理论, 因此在 LBM 数值模拟中得到了广泛应用. 本文使用的均匀直角网格, 网格分辨率为  $1024 \times$

$1024$ , 网格步长  $\Delta x = 1/1024$ , 在之前的研究工作中<sup>[15]</sup> 我们已经开展了相关的网格独立性验证, 研究表明这个网格尺度足以保证计算结果的精确性和可靠性. 尤其对于腔体内流场在  $Re \leq 20\,000$  的计算状态下, 能够保证  $y^+ < 0.5$ , 具备捕捉边界层流动信息的能力. 如图 1 所示, 计算域特征长度  $L = 1.0$  是方腔的边长. 顶盖镜像对称驱动条件为

$$\left. \begin{aligned} U_{lid} &= 0.1 |x \in [0, 0.5) \\ U_{lid} &= 0.0 |x = 0.5 \\ U_{lid} &= -0.1 |x \in (0.5, 1.0] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

本文在过渡流临界特性分析研究中设计了两个数值模拟信息采集点 (如图 1 所示)  $P_{lm}(x = 0.25, y = 0.5)$  和  $P_{rm}(x = 0.75, y = 0.5)$  用于记录流场中局部速度随时间的变化曲线. 同时, 为了研究流场拓扑结构的镜像对称性, 设计了对称性参数  $\xi$ , 定义为

$$\xi = \sqrt{(u_{lm} + u_{rm})^2 + (v_{lm} - v_{rm})^2} \quad (6)$$

其中,  $u_{lm}$  和  $v_{lm}$  是点  $P_{lm}(x = L/4, y = L/2)$  水平和垂直速度分量, 而  $u_{rm}$  和  $v_{rm}$  是对应的点  $P_{rm}(x = 3L/4, y = L/2)$  的水平和垂直速度分量.

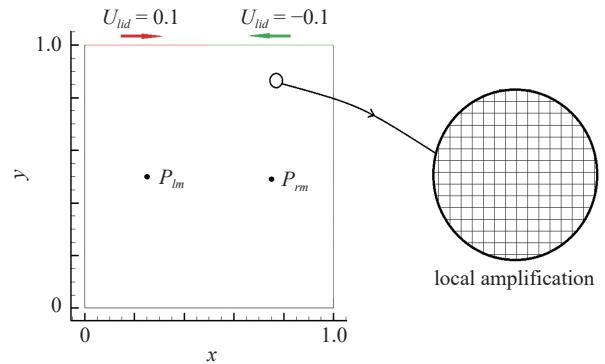


图 1 计算域

Fig. 1 Computational domain

### 2.2 边界条件处理

本文数值模拟的边界条件均为平直边界 (方腔四个边). 其中顶盖为驱动边界, 其余三边均为物面边界. 为此本文采用了经典的非平衡态外推格式<sup>[21]</sup>. 该格式的基本思想是, 将边界节点上的分布函数分为平衡态和非平衡态两部分. 其中, 平衡态部分由平衡态分布函数的定义近似获得, 而非平衡态部分则用非平衡态外推法求解.

如图 2 所示点  $D, E$  和  $F$  为远场边界点, 根据 LBM 的演化 (碰撞迁移) 原理可知, 在每次演化之前



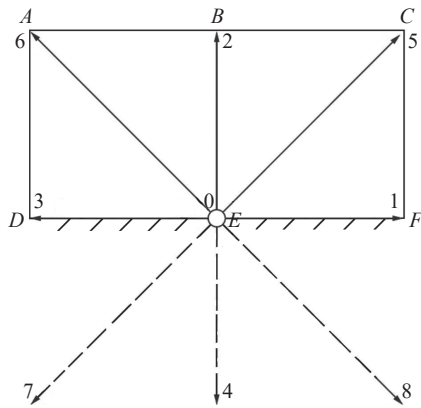


图 2 平直物面边界  
Fig. 2 Straight wall boundary

需要求解每个点的分布函数, 对于  $E$  点其分布函数可看作两部分: 平衡态分布函数和非平衡态分布函数, 即

$$f_{\alpha}(E, t) = f_{\alpha}^{eq}(E, t) + f_{\alpha}^{neq}(E, t) \quad (7)$$

该点的平衡态分布函数  $f_{\alpha}^{eq}(E, t)$  可用该点的宏观物理量 (速度、密度等) 来构造, 如果该点的宏观物理量未知, 则由  $B$  点的相应值代替. 而非平衡态分布函数则由  $B$  点的非平衡态分布函数来近似代替, 即

$$\left. \begin{aligned} f_{\alpha}^{neq}(B, t) &= f_{\alpha}(B, t) - f_{\alpha}^{eq}(B, t) \\ f_{\alpha}^{neq}(B, t) &\approx f_{\alpha}^{neq}(E, t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

因此, 可以近似求解  $E$  点的分布函数

$$f_{\alpha}(E, t) = f_{\alpha}^{eq}(E, t) + [f_{\alpha}(B, t) - f_{\alpha}^{eq}(B, t)] \quad (9)$$

若考虑边界点的碰撞过程, 则边界点  $E$  的分布函数为

$$f_{\alpha}(E, t) = f_{\alpha}^{eq}(E, t) + [f_{\alpha}(B, t) - f_{\alpha}^{eq}(B, t)] \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \quad (10)$$

综上, 可以确定壁面边界和驱动边界点的分布函数, 各边界点宏观物理量构造如下

$$\text{顶盖驱动边界: } u = U_{lid}, v = 0, \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0;$$

$$\text{底边壁面边界: } u = 0, v = 0, \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0;$$

$$\text{左右壁面边界: } u = 0, v = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

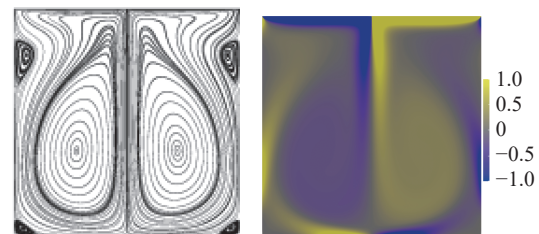
### 3 计算结果与分析讨论

#### 3.1 定常流动

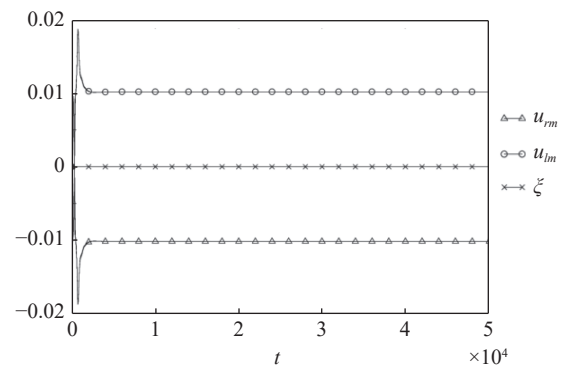
根据流动的演化机理, 随着雷诺数的增加流动会从定常状态演化为非定常状态<sup>[22-23]</sup>. 本文选取  $Re = 1000$  时的数值模拟结果作为镜像对称顶盖驱动

内流定常结果的代表. 如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 分别介绍了该雷诺数下的流线和涡量图. 由流场拓扑结构可见, 由于对称驱动的作用, 流动在此时保持了非常好的对称性, 两个对称主涡几乎占据了整个计算域, 主涡的周边存在着两对对称次级涡. 从主涡和次级涡的演化和分布规律可以观察到腔体内流的典型特征. 此外, 本文数值模拟结果中其余的所有涡量图都使用了如图 3(b) 所示的统一色条.

图 3(c) 描绘了信息采集点  $P_{lm}$  和  $P_{rm}$  的水平速度分量及对称性参数随时间的变化曲线, 其中  $t$  是无量纲流场演化步数. 从三个曲线中可以看出此时的流动收敛于一个定常状态且进一步从数值方面证明, 此时的流动是严格对称的 ( $\xi \equiv 0$ ). 相较于之前的研究工作<sup>[14-15]</sup>, 没有发现类似三角腔顶盖驱动内流的 Saddle-node 流动分岔点, 说明对于定常流动, 只存在一种流场解, 这与经典的顶盖驱动方腔内流研究结论一致.



(a) 流线图  
(a) Streamlines  
(b) 涡量图  
(b) Vorticity



(c) 水平速度分量及对称性参数  
(c) Horizontal velocity component and symmetry parameter

图 3  $Re = 1000$  时的定常计算结果  
Fig. 3 Steady state at  $Re = 1000$

#### 3.2 非定常流动

本文选取了三个计算状态分别揭示周期性流动 ( $Re = 1700$ )、准周期性流动 ( $Re = 1735$ ) 和湍流 ( $Re = 20\ 000$ ) 的流场特性.

图 4 展示了不同雷诺数信息采集点  $P_{rm}$  的水平

速度分量及通过傅里叶变换之后的速度频谱曲线。可以看出当雷诺数增加至 1700 时流动已经演化为非定常周期性流动, 此时流场稳定性已被破坏, 取而代之的是以频率为  $f = 1/T = 0.343$  的周期性振荡。当雷诺数进一步增加至 1735 时, 流动演化为非定常准周期性流动, 虽然保留了周期性流动的部分特征, 但是此时的流动不在以周期性单一频率振荡演化。从图中可以看到代表准周期性流动典型特征的双频率, 其中  $f_1 = 0.338$  是从周期性流动继承而来的基本频率, 而  $f_2 = 0.169$  是伴随周期性流动出现的调制频率, 其他频峰则是基本频率和调制频率的线性组合。当雷诺数增加至 20000 时, 流场已完全被湍流取代, 但是从速度频谱图中仍可以观察到之前准周期性流动的双频率, 而围绕双频率频峰的基本都是宽带噪音。此时从速度曲线图也可以看到流动演化的无序性和随机性。图 5 给出了对应雷诺数的速度相图, 其中闭合的单一曲线代表了周期性流动。而准周期性流动的相图不再是单一闭合的曲线, 也不是混沌状态的一团乱麻 (湍流), 而是介于二者之间的过渡状态, 其物理特性既继承了周期性流动的部分特征同时预示了可能出现的湍流。

结合图 6, 展示了周期性流动在一个完整周期内

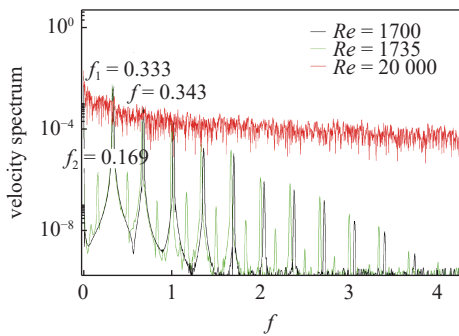


图 4 速度频谱图

Fig. 4 Velocity spectrum

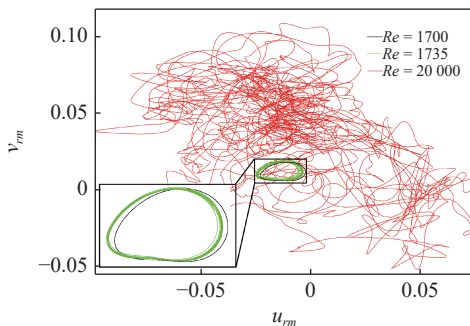
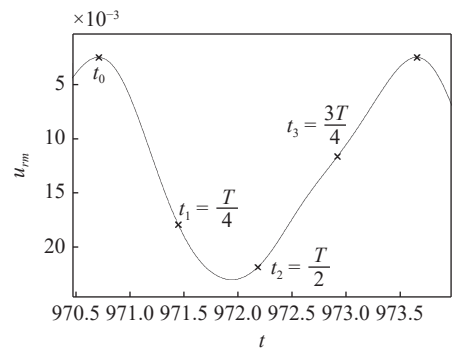


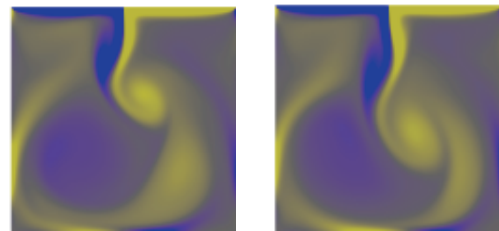
图 5 速度相图

Fig. 5 Velocity phase map



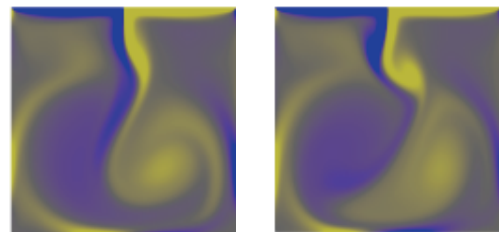
(a) 速度时间曲线

(a) Velocity time series



(b)  $t_0$

(c)  $t_1 = \frac{T}{4}$



(d)  $t_2 = \frac{T}{2}$

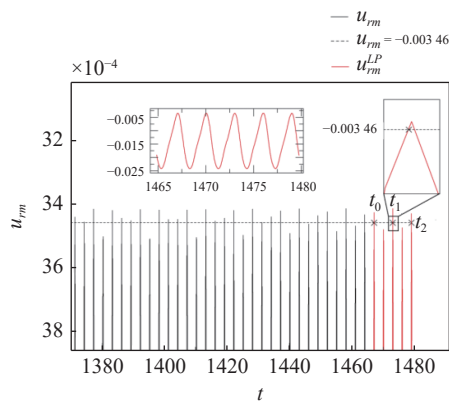
(e)  $t_3 = \frac{3T}{4}$

图 6 完整周期内不同时刻涡量图 ( $Re = 1700$ )

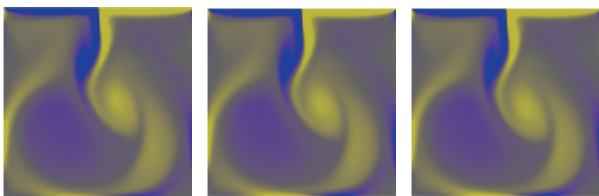
Fig. 6 Vorticity snapshots at different time steps within a full period  $T$  ( $Re = 1700$ )

不同时刻的流场拓扑结构。图 6(a) 给出了周期性流动完整周期内水平速度随时间的变化曲线以及不同时刻的选取方式。此时, 流动仍旧继承了流动定常解拓扑结构的主要特征, 可以观察到两个主涡及其附近的次级涡依旧存在, 只不过整个流场以  $f = 0.343$  的频率循环振荡。

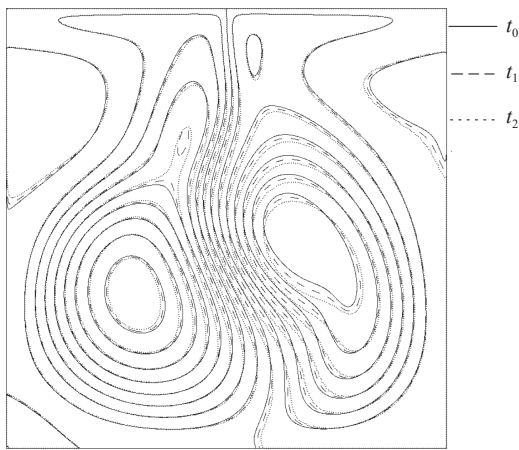
图 7 描述了准周期性流动 ( $Re = 1735$ ) 在不同庞加莱交叉点的流场拓扑结构, 给出了准周期性流动庞加莱交叉点的选取方式。图中  $u_{rm}$  代表准周期性解信息采集点  $P_{rm}$  处沿  $x$  方向的速度分量。  $u_{rm}^{LP}$  代表准周期性解调制频率  $f_2$  对应的长周期在一个整周期内的速度随时间  $t$  的曲线。庞加莱交叉点的选取满足  $u_{rm} = -0.00346$  和  $\frac{\partial u_{rm}}{\partial t} > 0$  的条件。图 7(b)~图 7(d) 分别展示了准周期性解在不同时刻 (庞加莱交叉点) 的瞬时涡量图, 虽然整体流动趋势基本一致, 但是流动



(a) 速度时间曲线  
(a) Velocity time series



(b)  $t_0$  (c)  $t_1$  (d)  $t_2$



(e) 流函数  
(e) Stream function

图 7 准周期性解 ( $Re = 1735$ )

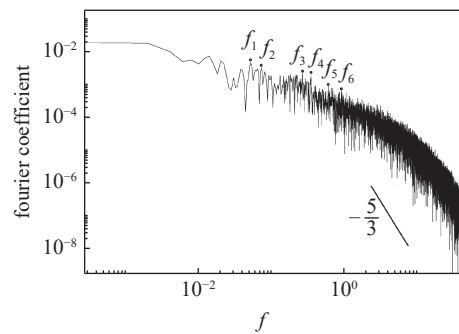
Fig. 7 A quasi-periodic solution ( $Re = 1735$ )

细节有不同的呈现 (见图 7(d) 所示的对应不同时刻的流函数). 这是因为此时流场已经演化为准周期性流动, 尽管庞加莱交叉点的选取方式一致, 但是对应的是准周期性解调制频率  $f_2$  所对应的长周期在不同时刻的瞬时涡量图. 可以想象, 如果此时的流动仍为周期性流动, 那么这三个时刻对应的计算结果将完全一致. 这也进一步证实了流动此时已经演化为准周期性流动的事实. 从流场拓扑结构来看, 此时的准周期性解与周期性解的差别不是特别明显, 需要从流动细节观察区分. 因为流动刚从周期性演化至准周期性不久, 其准周期性特征不是特别明显, 单从流

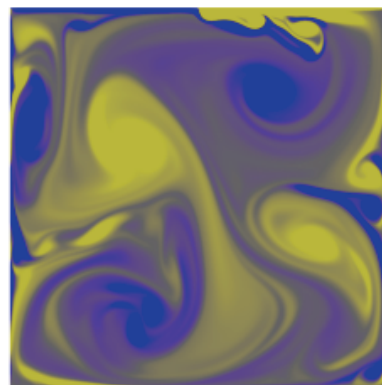
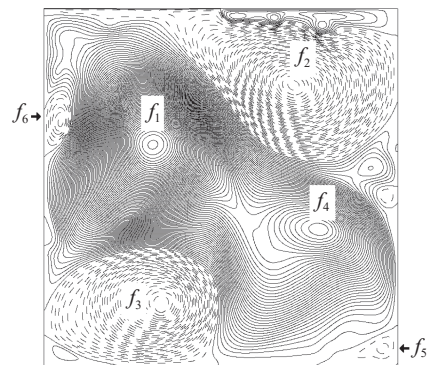
场拓扑结构很难区分.

结合图 8 分析了湍流流动状态的流场特性, 图 8(a) 揭示了湍流状态下的能量频谱图, 可以看到湍流惯性子区的斜率为  $-5/3$ , 跟文献 [24-26] 的结论一致. 伴随能量级串现象的出现, 大尺度的涡结构已破碎变成细小的涡结构, 而能量也依次传递至小尺度的涡结构直至 Kolmogorov 尺度的能量耗散现象.

图 8(b) 给出了某一特定时刻的流场拓扑结构, 其中实线代表逆时针旋转的涡, 虚线代表顺时针旋转的涡, 虽然此时流场已演化至湍流, 流动已变得随机和无序, 但是部分特征仍旧明显, 如流场内大尺度



(a) 能量频谱图  
(a) Energy spectrum



(b) 某一时刻的流线图 (上) 和涡量图 (下)  
(b) Streamlines (upper) and vorticity (lower) at a certain timing

图 8 湍流状态计算结果

Fig. 8 Results for chaos



的涡结构都发生了破坏, 此时主导流场拓扑结构的基本都是小尺度的细碎涡结构. 并且每个尺度的涡结构都有对应的振荡频率, 如图 8(b) 所示, 频峰  $f_1$  所对应的频率为主涡的振荡频率, 相较于定常结果 (见图 3), 主涡的结构发生了明显破坏, 且尺度变小. 频峰  $f_2, f_3$ , 和  $f_4$  分别对应不同位置的次级涡的振荡频率. 频峰  $f_5$  和  $f_6$  对应边角处次级涡的振荡频率. 除了这些较大尺度的涡系结构所对应的振荡频率, 从能量频谱曲线中还可以观察到其他频峰对应的附着在主涡和次级涡周围的细碎涡的频率.

### 3.3 Hopf 流动分岔点

随着雷诺数的增加, 流动会从定常状态演化至非定常状态, 本文针对镜像对称顶盖驱动方腔内流, 根据研究不同雷诺数下的扰动衰减系数 (Lyapunov 指数)  $\varepsilon = \ln(u_{rm} - \bar{U})$ , 发现流场稳定性最初的破坏伴随 Hopf 流动分岔点的出现而发生, 这与我们之前研究工作 [14-15] 中的结论一致. 如图 9 所示, 当雷诺数从 1500 增至 1692 时, 扰动衰减系数的斜率不断增大, 从一个负值逐渐趋向于 0. 当扰动衰减系数的斜率变为 0 时, 说明此时流动已经演化为非定常周期性流动, 意味着 Hopf 流动分岔点出现在雷诺数等于 1691 和 1692 之间. 对比经典的顶盖驱动方腔内流 [14-15,27-28] ( $Re^H = 8025 \pm 25$ ), 我们发现, 该流场的稳定性非常差, 很容易失稳. 说明顶盖镜像驱动对于腔体内流有很强的失稳作用.

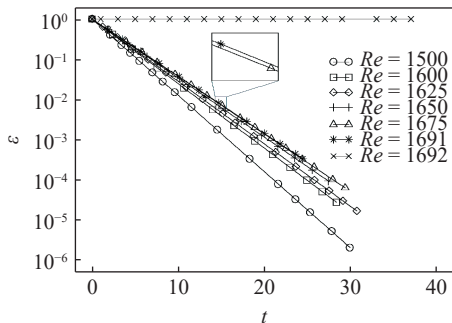
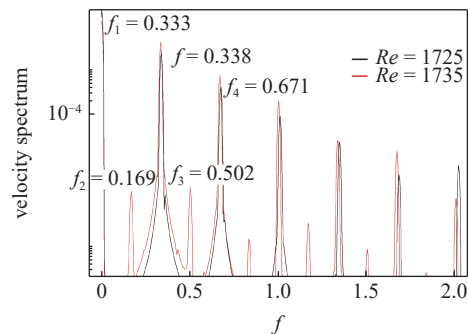


图 9 扰动衰减系数  
Fig. 9 Perturbation decay rate

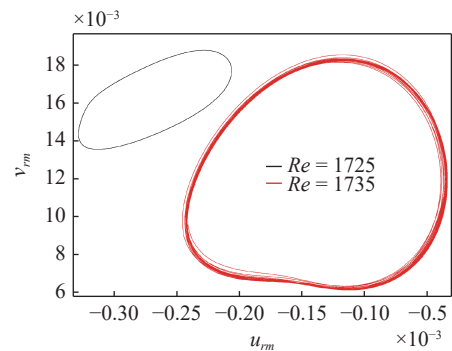
### 3.4 Neimark-Sacker 流动分岔点

随着雷诺数的进一步增加, 从 1725 增至 1735, 流动由非定常周期性流动演化为非定常准周期性流动. 说明 Neimark-Sacker 流动分岔点出现在雷诺数等于 1725 和 1735 之间. 图 10(a) 和图 10(b) 分别展示了速度频谱图和相图, 其中黑色和红色曲线分别代表雷诺数为 1725 和 1735 的计算结果. 结合图 10(a),

可以观察到周期性解的振荡频率为  $f = 0.338$ , 其他频峰均为  $f$  的整数倍, 为基本频率的谐振频率. 而准周期性解则有两个频率, 分别为基本频率  $f_1 = 0.333$ , 调制频率  $f_2 = 0.169$ , 其他频峰则是  $f_1$  和  $f_2$  的线性组合, 如  $f_3 = f_1 + f_2 = 0.502$ ,  $f_4 = f_1 + 2f_2 = 0.671$ . 如图 10(b) 所示, 周期性解的相图是一个闭合的单一曲线, 而准周期性解的相图则由一组曲线族构成. 类似顶盖驱动和顶底双边驱动方腔内流 [14-15], 研究发现流动非定常周期性的破坏通常都是伴随 Neimark-Sacker 流动分岔点的出现而发生. 没有发现类似三角腔顶盖驱动和四边驱动方腔内流时所出现的 Period-doubling 流动分岔点. 并且类似其他腔体内流流动, 流动的非定常周期性并不能长期保持, 随着雷诺数增加, 伴随准周期性流动典型双环结构的出现, 流动很快会进一步演化为准周期性流动.



(a) 速度频谱图  
(a) Velocity spectrum



(b) 速度相图  
(b) Velocity phase map

图 10 周期性和准周期性计算结果对比  
Fig. 10 Comparison between periodic and quasi-periodic solutions

### 3.5 湍流始现

经历了 Neimark-Sacker 流动分岔点之后, 当雷诺数增加至 1750 时, 流场演化逐渐表现出无序性和随机性, 说明湍流出现在雷诺数等于 1735 和 1750 之间. 图 11(a) 和图 11(b) 分别展示了速度频谱图和速度相图, 其中黑色和红色曲线分别代表雷诺数为 1735



和 1750 的计算结果. 从速度频谱图 (图 11(a)) 可以明显观察到准周期性解的两个频率, 分别为基本频率  $f_1 = 0.333$ , 调制频率  $f_2 = 0.169$ . 当雷诺数增加至 1750 时, 虽然仍旧可以观察到从准周期性流动中继继承来的两个振荡频率, 但是被一系列宽频噪音所包围, 说明此时流动已然变为湍流. 如图 11(b) 所示, 准周期性解的速度相图是闭合的曲线族 (图 11(b) 局部放大图), 而湍流的速度相图明显是一个无序、随机的混乱系统, 更进一步证实此时流动特性主要表现为湍流. 至此, 流动的演化路径已基本明晰, 这与顶盖和顶底双边驱动内流的研究结论保持一致, 即流动先从定常演化为非定常周期性, 再演化为准周期性流动, 最终演化为湍流.

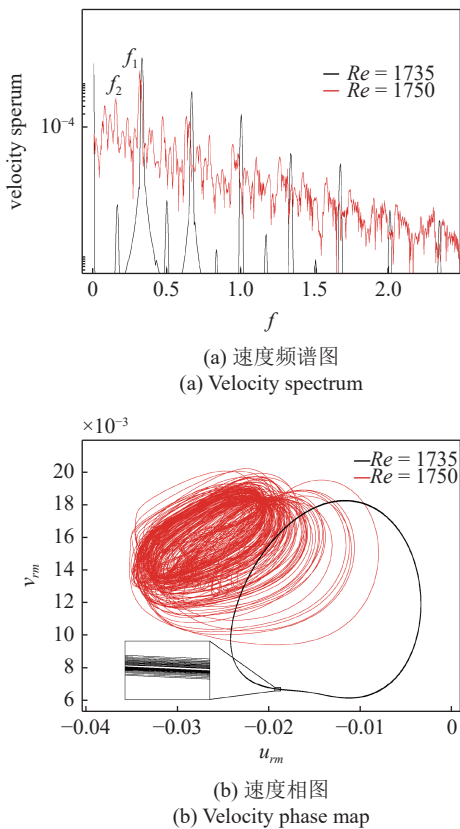


图 11 准周期性和湍流计算结果对比  
Fig. 11 Comparison between quasi-periodic and chaotic solutions

### 3.6 流场镜像对称性

由于本文的驱动条件为严格的顶盖镜像对称, 所以流动在初期表现出了严格的对称性, 且对称性参数一直为 0 (见图 3). 但是当我们观察对称性参数 (图 12) 时, 可以看到当 Hopf 流动分岔点出现时, 对称性参数不再是 0, 且随着雷诺数增大而逐渐增加. 这就说明当 Hopf 流动分岔点出现时, 伴随着流场稳定性的破坏, 流场镜像对称性也发生了破坏, 这与我们之

前研究<sup>[15]</sup>中观察到的结论类似, 即流场  $\pi$  旋转对称性与流场稳定性同时丧失. 同时对比与该流动较为类似的 Taylor-Couette 流动, 我们发现了相同的结论, 镜像对称性的破坏往往伴随着流场稳定性的丧失, 流动不可能不经历对称性破坏而直接演化为湍流<sup>[29-30]</sup>.

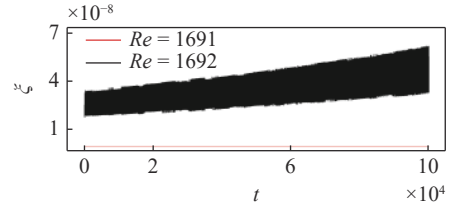


图 12 不同雷诺数的对称性参数  
Fig. 12 Symmetry at different  $Re$

虽然此时对称参数在数量级上非常小, 但是足以说明流场对称性在逐渐丧失, 这样的微小差别在肉眼观察流场拓扑结构时很难发现. 但随着雷诺数进一步增加, 流场非对称性就可以直观地显现出来 (见图 6). 图 13 展示了流场演化之标准周期性流动时的速度曲线和对称性参数曲线. 可以清晰地看到此时的对称参数以 0.015 左右的振幅周期性振荡.

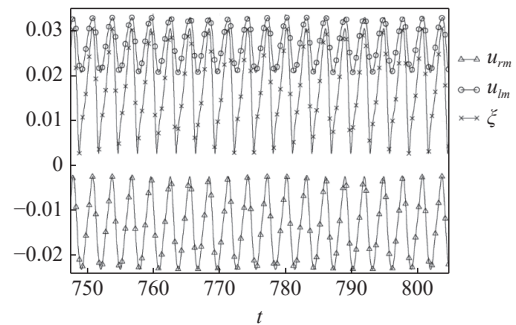


图 13 水平速度分量及对称性参数 ( $Re = 1700$ )  
Fig. 13 Velocity and symmetry series ( $Re = 1700$ )

### 3.7 流动滞后

在本文之前的研究工作中, 我们发现对于顶盖镜像对称驱动方腔内流这一特定流场, Hopf 流动分岔点出现在雷诺数等于 1691 和 1692 之间. 这个结论从图 14 中也可进一步证实, 当雷诺数增加至 1700 时, 流动从定常状态演化至非定常周期性流动. 如图所示, 红色符号代表由初始状态计算得到的结果, 而黑色符号意味着, 首先基于初始状态计算得到周期性结果 ( $Re = 1700$ ), 然后在此基础上计算雷诺数小于 1700 的流动. 其中  $\times$  代表定常结果,  $\Delta$ ,  $\square$  和  $\circ$  分别代表非定常周期性流动的最小值、平均值和最大值.

如图所示, 基于  $Re = 1700$  的周期性结果将雷诺数分别降至 1600, 1500 和 1400, 流动仍然保持周期

性特性, 并非之前观察到的定常结果 (由初始态计算得到), 说明存在流动滞后 (flow hysteresis) 现象. 进一步降低雷诺数至 1350, 此时流动才回落至定常状态, 说明流动滞后现象发生在  $1350 < Re < 1700$  这个区间. 同时也说明此前捕捉到的 Hopf 流动分岔点为亚临界 (subcritical) 形式. 流动滞后现象的出现意味着在  $1350 < Re < 1700$  这个区间, 对应的每个雷诺数会有两种解的可能性, 一种是定常状态, 另一种是周期性状态. 并且, 根据观察得到, 此周期性流动的基本规律与之前基于初始状态计算得到的周期性解特性基本一致. 如图 15 所示, 展示了  $Re = 1600$  时的周

期性解在一个完整周期内不同时刻的涡量图.

### 4 结 论

针对镜像对称顶盖驱动方腔内流, 本文开展了流动从定常流动到湍流的数值模拟和流场稳定性分析研究, 捕捉并解释各种流动现象, 从物理层面揭示该流场的流动机理, 具体结论如下.

(1) 流场稳定性的破坏是以 Hopf 流动分岔点的出现而开始.

(2) 相较于经典顶盖方腔驱动内流, 流场稳定性更容易丧失, Hopf 流动分岔点的临界雷诺数为  $Re^H = 1691.5 \pm 0.5$ .

(3) 流场稳定性被破坏的同时, 也丧失了流场镜像对称性.

(4) 流动丧失稳定性后会迅速从非常周期性流动演化为非定常准周期性流动, Neimark-Sacker 流动分岔点出现在  $Re^{NS} = 1712.5 \pm 12.5$ .

(5) 当雷诺数增至  $Re^C = 1762.5 \pm 12.5$ , 湍流出现, 流动变得无序随机.

(6) 当流动进一步演化后, 随着雷诺数增大, 大尺度的涡结构发生破坏变成小尺度的细碎涡结构, 同时能量从大尺度的涡结构传递至小尺度的涡结构直至 Kolmogorov 尺度的能量耗散.

(7) 流场演化遵循经典的 Ruelle-Takens 模式, 从定常演化为非定常周期性流动, 再到准周期性流动, 最后演化为湍流.

(8) 在  $1350 < Re < 1700$  这个区间存在流动滞后现象, 对于同一个雷诺数有两种可能的解, 一种是定常流动, 另一种是非定常周期性流动. 并且发现 Hopf 流动分岔点为亚临界型.

为了更好地分析上文介绍的三种典型流动状态 (非定常周期性流动、非定常准周期性流动和湍流) 的流场拓扑结构特征, 本文准备了相关视频动画进一步展示了流场细节. 同时对应流动滞后现象, 还准备了对应同一个雷诺数可能的非定常周期性解的流动特性.

### 参 考 文 献

- 1 Hof B, Van Doorne CWH, Westerweel J, et al. Experimental observation of nonlinear travelling waves in turbulent pipe flow. *Science*, 2004, 305: 1594-1598
- 2 Avila K, Moxey D, de Lozar A, et al. The onset of turbulence in pipe flow. *Science*, 2011, 333: 192-196

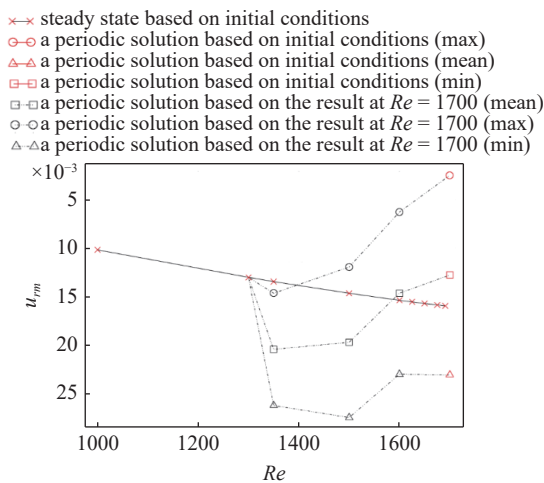


图 14 流动滞后现象  
Fig. 14 Flow hysteresis

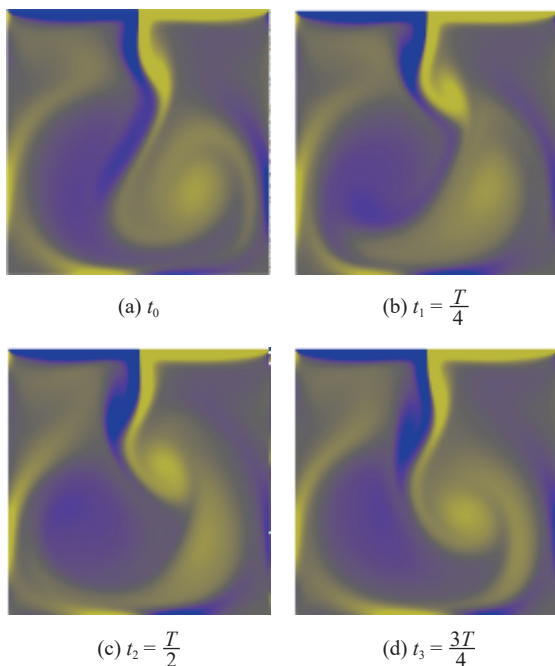


图 15 完整周期内不同时刻涡量图 ( $Re = 1600$ )  
Fig. 15 Vorticity snapshots at different time steps within a full period  $T$  ( $Re = 1600$ )

- 3 Graham MD. Fluid dynamics turbulence spreads like wildfire. *Nature*, 2015, 526: 508-509
- 4 Rempfer D. Low-dimensional modeling and numerical simulation of transition in simple shear flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2003, 35: 229-265
- 5 Chomaz JM. Global instabilities in spatially developing flows: Non-normality and nonlinearity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2005, 37: 357-392
- 6 Kerswell RR. Nonlinear nonmodal stability theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2005, 50: 319-345
- 7 Eckhardt B, Schneider TM, Hof B, et al. Turbulence transition in pipe flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2007, 39: 447-468
- 8 Launder B, Poncet S, Serre E. Laminar, transitional, and turbulent flows in rotor-stator cavities. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2010, 42: 229-248
- 9 Luchini P, Bottaro A. Adjoint equations in stability analysis. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2014, 46: 493
- 10 Kunii K, Ishida T, Duguet Y, et al. Laminar-turbulent coexistence in annular Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 879: 579-603
- 11 Benton SI, Visbal MR. The onset of dynamics stall at high, transitional Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 861: 860-885
- 12 Gavrilakis S. Post-transitional periodic flow in a straight square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 859: 731-753
- 13 Wu XH, Moin P, Adrian RJ. Laminar to fully turbulent flow in a pipe: scalar patches, structural duality of turbulent spots and transitional overshoot. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 896: A9
- 14 An B, Bergada JM, Mellibovsky F. The lid driven right-angled isosceles triangular cavity flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 875: 476-519
- 15 An B, Mellibovsky F, Bergada JM, et al. Towards a better understanding of wall-driven square cavity flows using lattice Boltzmann method. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 82: 469-486
- 16 Chen S, Doolen GD. Lattice Boltzmann method for fluid flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, 30: 329-364
- 17 Krüger T, Kusumaatmaja H, Kuzmin A, et al. The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice. New York: Springer Publishing Company, 2016
- 18 Lallemand P, Luo LS. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, 2000, 61(6): 6546-6562
- 19 An B, Bergada JM, Mellibovsky F, et al. New applications of numerical simulation based on lattice Boltzmann method at high Reynolds numbers. *Computers and Mathematics with Applications*, 2020, 79(6): 1718-1741
- 20 Qian YH, d'Humieres D, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhysics Letters*, 1992, 17(6): 478-484
- 21 Guo ZL, Zheng CG, Shi BC. An extrapolation method for method boundary conditions in lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids*, 2002, 14(6): 2007-2010
- 22 Sierra J, Fabre D, Citro V, et al. Bifurcation scenario in the two-dimensional laminar flow past a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 905: A2
- 23 Picella F, Robinet JC, Cherubini S. Laminar-turbulent transition in channel flow with superhydrophobic surface modelled as a partial slip wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 881: 462-497
- 24 Alexakis A, Biferale L. Cascades and transitions in turbulent flows. *Physics Reports-review Section of Physics Letters*, 2018, 767: 1-101
- 25 Vassilicos JC. Dissipation in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2015, 47: 95-114
- 26 Jimenez J. Cascades in wall-bounded turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2012, 44: 27-45
- 27 Auteri F, Parolini N, Quartapelle L. Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow. *Journal of Computational Physics*, 2002, 183: 1-25
- 28 Boppana VBL, Gajjar JSB. Global flow instability in a lid-driven cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 62: 827-853
- 29 Avila M, Marques F, Lopez JM, et al. Stability control and catastrophic transition in a forced Taylor-Couette system. *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, 590: 471-496
- 30 Heise M, Agshagen J, Küter D, et al. A localized spirals in Taylor-Couette flow. *Physical Review E*, 2008, 77(2): 026202