

谐波齿轮系统的快慢振荡机制研究

韩修静, 黄启旭, 丁牧川, 毕勤胜

A STUDY OF DYNAMICAL MECHANISMS OF THE FAST-SLOW OSCILLATIONS OF HARMONIC GEAR SYSTEM

Han Xiujing, Huang Qixu, Ding Muchuan, and Bi Qinsheng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-21-621>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

压电与摩擦电复合型旋转能量采集动力学协同调控机制研究

HYBRID PIEZOELECTRIC-TRIBOELECTRIC ROTATIONAL ENERGY HARVESTER USING DYNAMIC COORDINATED MODULATION MECHANISM

力学学报. 2021, 53(11): 2961-2971

多稳态俘能系统的准确磁力建模方法

AN ACCURATE MODELLING METHOD OF MAGNETIC FORCE IN MULTI-STABLE ENERGY HARVESTING SYSTEM

力学学报. 2021, 53(11): 2984-2995

磁力耦合道路能量收集设计与动力学分析

DESIGN AND DYNAMIC ANALYSIS OF MAGNETIC COUPLING ROAD ENERGY HARVESTING

力学学报. 2021, 53(11): 2941-2949

线形拱形组合梁式三稳态压电俘能器动力学特性研究

RESEARCH ON DYNAMICS CHARACTERISTICS OF LINEAR-ARCH COMPOSED BEAM TRI-STABLE PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTER

力学学报. 2021, 53(11): 2996-3006

活性流体流变行为的布朗动力学模拟研究

BROWNIAN DYNAMICS SIMULATION OF RHEOLOGICAL BEHAVIOR OF ACTIVE FLUIDS

力学学报. 2021, 53(11): 3071-3079

动力吸振器复合非线性能量阱对线性镗杆系统的振动控制

VIBRATION CONTROL OF LINEAR BORING BAR BY DYNAMIC VIBRATION ABSORBER COMBINED WITH NONLINEAR ENERGY SINK

力学学报. 2021, 53(11): 3124-3133



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

谐波齿轮系统的快慢振荡机制研究¹⁾

韩修静²⁾ 黄启旭 丁牧川 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院, 江苏镇江 212013)

摘要 谐波齿轮减速器是一种新型的传动装置, 因其具有诸多的优点, 因而得到了广泛应用. 谐波齿轮减速器涉及不同振荡尺度之间的耦合作用, 这通常会诱发复杂的快慢振荡, 严重影响了谐波齿轮系统的正常工作. 本文考虑涉及扭转刚度非线性因素的谐波齿轮系统, 旨在研究系统的快慢动力学, 揭示新型的快慢振荡机制. 首先, 构建了非线性扭转刚度下的谐波齿轮系统的快慢动力学模型. 然后, 通过改变扭转刚度系数, 得到了系统从常规振荡向快慢振荡的转迁过程. 接着, 简要地论述了有关快慢系统的基础理论. 在此基础上, 采用快慢分析法研究了快子系统的动力学特性, 揭示了快慢振荡的产生机制. 研究表明, 当系统参数改变时, 快子系统的平衡点曲线并未发生失稳或分岔; 然而, 在这一点附近, 平衡点曲线能够产生急剧量变, 其特征是平衡点在局部小范围内可以在正坐标值与负坐标值之间快速转迁. 在此基础上, 揭示了一种诱发快慢振荡的新型动力学机制, 比较了这种诱发机制与其他相关机制之间的区别. 本文丰富了系统通向快慢振荡的路径, 为实际谐波齿轮传动系统中的快慢振荡机理与控制研究提供参考.

关键词 快慢系统, 谐波齿轮, 快慢振荡, 分岔, 动力学机理

中图分类号: O322 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-621

A STUDY OF DYNAMICAL MECHANISMS OF THE FAST-SLOW OSCILLATIONS OF HARMONIC GEAR SYSTEM¹⁾

Han Xiujing²⁾ Huang Qixu Ding Muchuan Bi Qinsheng

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China)

Abstract A harmonic gear reducer is an advanced driving device, and it has been widely used because of many advantages. A harmonic gear reducer involves the coupling of different oscillation scales. This usually induces complex fast-slow oscillations, which have great impact on the proper operation of the system. In this paper, a harmonic gear system with the nonlinear factor of torsional stiffness is considered. The purpose of this paper is to study fast-slow dynamics of the system and to reveal a novel dynamical mechanism of the fast-slow oscillations. To begin with, the fast-slow dynamical model of the harmonic gear reducer with the nonlinear factor of torsional stiffness is built. Then, the transition of the system from normal oscillations to the fast-slow oscillations is obtained by varying the torsional stiffness. Subsequently, we give a brief description of the basic theory related to fast-slow systems. Based on this, dynamical characteristics of the fast subsystem are investigated by the fast-slow analysis and the generation mechanisms of fast-slow oscillations are revealed. Our results show that, when the system parameter is varied, the equilibrium curve of the

2021-11-25 收稿, 2022-01-22 录用, 2022-01-23 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (12072132, 11632008), 江苏省高校“青蓝工程”和江苏大学“青年英才培育计划”资助项目.

2) 韩修静, 教授, 主要研究方向: 动力学与控制. E-mail: xjhan@ujs.edu.cn

引用格式: 韩修静, 黄启旭, 丁牧川, 毕勤胜. 谐波齿轮系统的快慢振荡机制研究. 力学学报, 2022, 54(4): 1085-1091

Han Xiujing, Huang Qixu, Ding Muchuan, Bi Qinsheng. A study of dynamical mechanisms of the fast-slow oscillations of harmonic gear system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(4): 1085-1091

fast subsystem does not lose its stability or bifurcate. However, near some point, a sharp quantitative change can be observed in the equilibrium point curve, characterized by the fact that the equilibrium point is able to undertake a fast transition between positive and negative coordinate values in a local small area of the equilibrium point curve. Based on this, we reveal a novel dynamical mechanism underlying the appearance of fast-slow oscillations, and compare the mechanism with other related dynamical mechanisms of fast-slow oscillations. Our results enrich the routes of dynamical systems to the fast-slow oscillations, and besides our study provides important reference to the research on the dynamical mechanisms and control of fast-slow oscillations in the actual systems of harmonic gear drive.

Key words fast-slow system, harmonic gear, fast-slow oscillations, bifurcation, dynamical mechanism

引言

谐波齿轮减速器是为了适应航天器的发展而发明的一种新型传动装置。由于它具有传动比大、结构紧凑、噪声低、传动效率高、精度高等诸多优点,因而被广泛应用于航空航天、工业仿生以及军事等领域^[1-3]。由于谐波齿轮其自身的结构特点,系统受到了诸多非线性因素的作用,例如扭转刚度、摩擦、运动误差、传动迟滞等^[4-6],其作用载荷具有多源和多路径的特征^[7-8]。这使得系统产生了复杂的振荡响应,严重地影响了系统的正常工作^[9-10]。围绕谐波齿轮系统的动力学问题,如动力学建模^[11-13]、非线性因素的刻画与表达^[14-16]、动力学特性分析^[17-19]、振动与控制^[20-22]等,学者们开展了深入研究,取得了丰富的研究成果。

然而,关于谐波齿轮系统的动力学问题,相关研究主要集中在同一时间尺度下的情形;对于不同尺度耦合作用下的快慢动力学,相关研究鲜有报道。注意到,在谐波齿轮减速器系统中,输入端(含波发生器)的转动惯量通常要比负载端(含柔轮或刚轮)的转动惯量低 2~3 个量级^[23-24]。因此,谐波齿轮系统是一个典型的快慢系统,它涉及快慢两种振荡尺度之间的耦合作用,而这会进一步导致快慢振荡的产生^[25]。事实上,在谐波齿轮减速器系统中,可以经常观测到快慢振荡现象。例如,Taghirad 和 Bélanger^[26-27]研究发现,低转速下的谐波齿轮系统能够产生明显的快慢振荡。随后,发现了类似的快慢振荡,指出这种振荡可能与扭矩波动有关。特别地,在由谐波齿轮驱动的诸如机械手、机械臂等装置中,可以观测到类似的快慢振荡^[28-30]。然而,由于谐波齿轮系统的复杂性,关于快慢振荡的研究,主要集中在现象报道上,而很少涉及动力学机理方面的研究。

本文考虑涉及扭转刚度非线性因素的谐波齿轮

系统,旨在揭示系统中的快慢振荡及其动力学机制。当扰动力矩的频率远小于系统的固有频率时,即当扰动力矩的频率和系统的固有频率之间存在量级差异时,可以观测到快慢振荡如图 1 所示。特别地,这

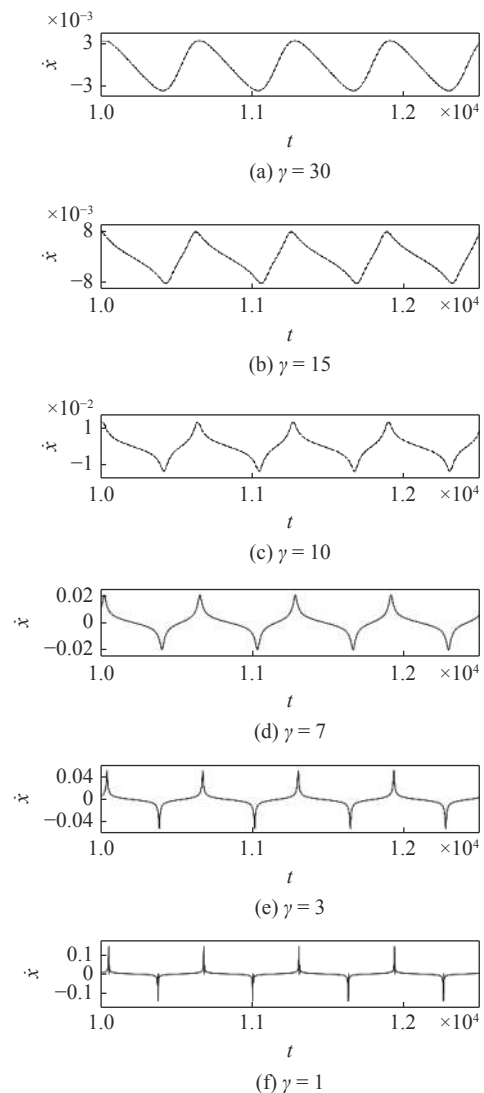


图 1 谐波齿轮系统从 (a)~(c) 常规振荡模式向 (d)~(f) 快慢振荡模式转迁

Fig. 1 A transition of the harmonic gear system from (a)~(c) normal oscillation modes to (d)~(f) fast-slow oscillation modes

种快慢振荡其形式与之前的有关报道^[31]非常相似。然而, 研究表明, 这里的快慢振荡与平衡点曲线在局部小范围内发生的急剧量变有关, 其特征是平衡点在局部小范围内可以在正坐标值与负坐标值之间快速转迁。这是一种不同于以往所报道的新型动力学机制。

1 模型和快慢振荡

考虑刚轮固定, 柔轮作为输出轮时的谐波齿轮传动系统。根据谐波传动原理, 可得系统的简化模型^[11], 如图 2 所示。在图 2 中, J_i 和 J_o 分别是输入端和负载端的转动惯量, θ_i 和 θ_o 分别是电机输入端角位移和负载端输出角位移, T_{im} 是输入轴的静态平均力矩, T_{om} 是谐波齿轮柔轮输出力矩, N 是减速比, $K(\theta)$ 是非线性扭转刚度, C_{eq} 是系统的等效阻尼系数。

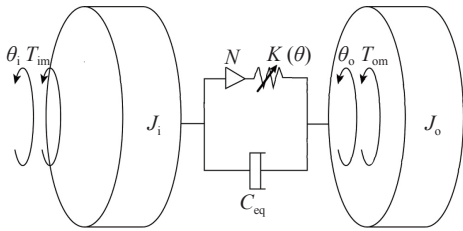


图 2 谐波齿轮系统的简化模型^[11]
Fig. 2 Simplified model of the harmonic gear system^[11]

根据谐波齿轮传动系统的力学关系, 可得如下的运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} J_o \ddot{\theta}_o + C_{eq}(\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_i/N) + K(\theta)f(\theta) &= T_{om} \\ J_i \ddot{\theta}_i - C_{eq}(\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_i/N)/N - K(\theta)f(\theta)/N &= -T_{im}/N \end{aligned} \right\} (1)$$

谐波齿轮传动系统中的摩擦行为十分复杂, 为了便于分析, 这里采用文献^[20]给出的等效阻尼系数 C_{eq} 来近似刻画系统中的摩擦因素, 即

$$C_{eq} = 2\xi \sqrt{J_{eq}K_{HD}} \quad (2)$$

其中, ξ 是阻尼比, $J_{eq} = N^2 J_i J_o / (N^2 J_i + J_o)$ 是系统的等效扭转惯量, K_{HD} 是齿轮啮合的平均刚度。

非线性刚度 $K(\theta)$ 是系统重要的非线性因素, 其贡献不仅有齿轮啮合部分, 还包括柔性轴承部分。本文采用文献^[6]给出的非线性刚度形式, 其兼具了上述两个部分对扭转刚度的影响, 即

$$K(\theta) = k_1 + k_2 \theta^2 \quad (3)$$

其中, k_1 和 k_2 是扭转刚度系数, $\theta = \theta_o - \theta_i/N$ 是相对扭

转角 (θ_i , θ_o 和 N 的含义同前)。

在系统 (1) 中, $f(\theta)$ 是谐波齿轮单向转动时的间隙空程^[20], 即

$$f(\theta) = \theta - \varphi \quad (4)$$

其中, θ 的含义同前, φ 是尺侧间隙空程。

本文假定谐波齿轮柔轮输出力矩 T_{om} 受到周期慢扰动的影响, 可以表示为 $T_{om} = T_{fs} + T_{am} \sin(\omega t)$ 的形式^[25], 其中 $T_{fs} = T_{im}$, $0 < \omega \ll 1$ 。不妨记 $T_m \triangleq T_{fs} = T_{im}$; 于是, 原四维非线性系统 (1) 可以简化成二维非线性系统 (5)

$$J_{eq} \ddot{\theta} + C_{eq} \dot{\theta} + K(\theta)f(\theta) = T_m + J_{eq} T_{am} \sin(\omega_0 t) / J_o \quad (5)$$

将方程 (5) 进行无量纲化, 可得

$$\ddot{x} + \dot{x} + \alpha x^3 - x^2 + \gamma(x - \varepsilon) = \mu + \delta \sin(\omega t) \quad (6)$$

其中, x 是状态变量, $\alpha = C_{eq}^2 / (k_2 \varphi^2 J_{eq})$, $\gamma = k_1 J_{eq} / C_{eq}^2$, $\delta = k_2 \varphi J_{eq}^3 T_{am} / (J_o C_{eq}^2)$, $\varepsilon = k_2 \varphi^2 J_{eq} / C_{eq}^2$, $\mu = k_2 \varphi J_{eq}^2 T_m / C_{eq}^4$ 。这里 α, γ, δ 均是正参数, ε 和 $\mu \in \mathbb{R}$ 。

取定系统参数 $T_m = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$, $T_{am} = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$ ^[25], 其他参数由表 1^[11] 给出。此时, 系统 (6) 的无量纲参数分别是 $\alpha = 16$, $\gamma = 30$, $\varepsilon = 0.71$, $\mu = 0.07$, $\delta = 15$ 。数值模拟表明, 当扰动力矩缓慢地 (例如, $\omega = 0.01$) 周期变化时, 系统产生了普通的周期响应, 见图 1(a)。然而, 如图 1 所示, 随着参数 γ 的不断减小, 系统逐渐演化为快慢振荡, 其特征是在时间序列中周期地出现了“脉冲”形的大振幅振荡 (例如, 见图 1(f))。从形式上来看, 这种快慢振荡与文献^[31]所报道的振荡模式非常相似。将在本文的第 4 部分揭示其产生

表 1 系统参数^[11]

Table 1 System parameters^[11]

Parameter names	Parameter values
reduction ratio, N	100
input inertia, $J_i / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	6.82×10^{-4}
output inertia, $J_o / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	2.35×10^{-2}
damping ratio, ξ	0.06
gap clearance of the reducer, φ / rad	1.74×10^{-2}
average meshing stiffness, $K_{HD} / (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-2})$	7160
torsional stiffness coefficient, $k_1 / (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1})$	3000
torsional stiffness coefficient, $k_2 / (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-3})$	20567

的动力学机制.

2 快慢分析法

为了揭示图 1 中的快慢振荡的动力学机理, 本部分对快慢系统的定性分析方法, 即快慢分析法^[32], 作简要论述.

一般地, 快慢振荡可由以下形式的快慢系统加以描述

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{7}$$

$$\dot{y} = \varepsilon g(x, y) \tag{8}$$

其中, $\varepsilon \ll 1$ 是快慢时间尺度的比率, $x \in \mathbb{R}^m$ 是快变量, $y \in \mathbb{R}^n$ 是慢变量. 快慢振荡是一种特殊的振荡模式, 需采用特殊的分析方法加以研究. Rinzel^[32] 提出的快慢分析法是揭示快慢振荡动力学机理的经典方法, 其基本思想是将快子系统 (7) 与慢子系统 (8) 分开讨论. 快子系统的动力学行为由慢变量加以调控: 快子系统可以处于不同的运动态, 这由慢变量的值决定. 将快慢系统的相图与快子系统的分岔图 (其中, 慢变量视为快子系统的分岔参数) 进行叠加, 进而可以解释快慢振荡的动力学机理.

3 快子系统的动力学特性

注意到本文关注的情形是扰动激励缓慢地变化, 且其频率远小于系统的固有频率. 因此, 根据文献 [33], 可将系统 (6) 视为一个快慢系统: 慢变量是 $\sin(\omega t)$, 快子系统是

$$\ddot{x} + \dot{x} + \alpha x^3 - x^2 + \gamma(x - \varepsilon) = \mu + \delta a \tag{9}$$

其中 $a = \sin(\omega t)$ 是控制参数. 为了便于分析, 本文将 $\alpha, \mu, \varepsilon, \delta$ 的取值固定 (与图 1 中的取值相同), 仅将 γ 和 a 视为系统参数.

显然, 快子系统 (9) 的平衡点可以写成 $E = (x, 0)$, 其中 x 由方程

$$\alpha x^3 - x^2 + \gamma(x - \varepsilon) - \mu - \delta a = 0 \tag{10}$$

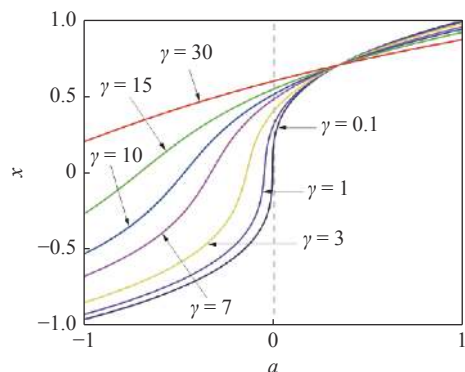
的实根决定. 方程 (10) 的根的判别式为

$$\Delta = \left(\frac{q}{2\alpha} + \frac{\gamma}{6\alpha^2} - \frac{1}{27\alpha^3} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{3\alpha} - \frac{1}{9\alpha^2} \right)^3 \tag{11}$$

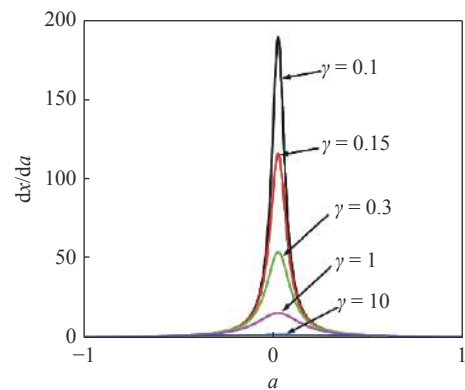
其中 $q = -(\gamma\varepsilon + \mu + \delta a)$. 显然, 系统其他参数固定, 当 $\frac{\gamma}{3\alpha} - \frac{1}{9\alpha^2} > 0$, 即当 $\gamma > \frac{1}{48}$ 时, 判别式 $\Delta > 0$ 恒成立, 系

统 (9) 仅存在一个平衡点 E . 进一步的分析表明: 平衡点 E 是稳定的焦点.

基于上述分析, 下面探讨平衡点 E 的动力学特性. 图 3(a) 给出了不同参数值 γ 下的平衡点曲线. 可以发现, 随着 γ 的数值不断减小, 原先较为平缓的平衡点曲线发生了连续的弯折变形. 特别地, 在参数 $a = 0$ 附近, 平衡点曲线变得陡峭, 其特征是平衡点坐标可在正值与负值之间迅速转迁; 其陡峭程度随着 γ 的数值递减而逐渐加剧. 图 3(b) 给出了不同参数值 γ 下的平衡点曲线的变化率, 这进一步证实了系统在参数 $a = 0$ 附近发生的急剧变化.



(a) 不同参数值 γ 下的平衡点曲线
(a) Equilibrium curves with different values of γ



(b) 不同参数值 γ 下的平衡点曲线的斜率
(b) The slopes of the equilibrium curves with the different values of γ

图 3 平衡点 E 的动力学特性

Fig. 3 Dynamical characteristic of the equilibrium E

4 快慢振荡的动力学机理

前一部分揭示了快子系统在参数 $a = 0$ 附近的动力学特性. 在此基础上, 本部分探讨快慢振荡的动力学机制.

如前所述, 当 γ 不断减小时 (可通过改变扭转刚度系数来实现), 平衡点曲线将在 $a = 0$ 附近发生急剧

量变. 如图 4 所示, 这种急剧量变的动力学特性, 形成了一个狭小的“激发态区域”(spiking area). 当参数取在“激发态区域”时, 系统将发生急剧转迁. 在“激发态区域”的左右两侧, 系统的动力学特性较为温和, 由此形成了两个“沉寂态区域 (quiescent area)”.

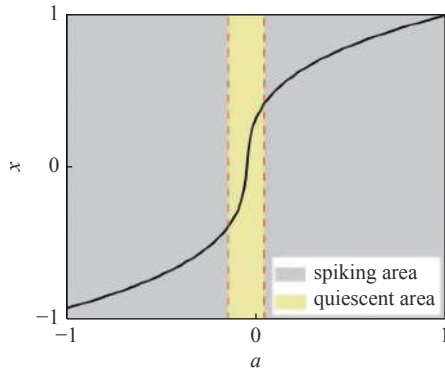


图 4 (示意图) 系统的激发态区域 (黄色) 和沉寂态区域 (灰色)
Fig. 4 (Illustrative diagram) Spiking area (yellow) and quiescent area (gray)

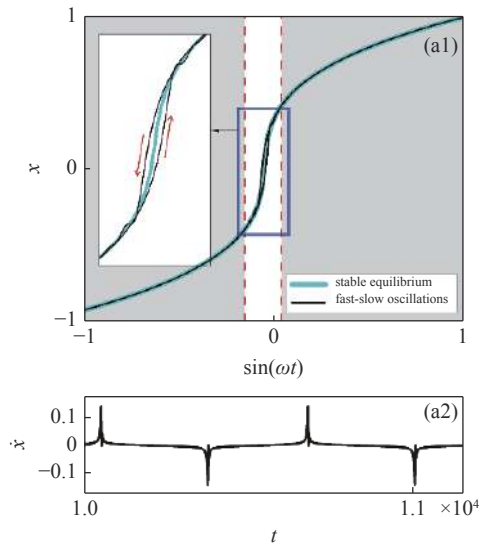
当慢变量 $\sin(\omega t)$ 被接入系统时, $\sin(\omega t)$ 周期地缓慢穿越“激发态区域”和“沉寂态区域”. 这导致系统在“快速转迁”和“慢速演化”中不断交替, 例如见图 5(a1), 图 5(a2), 进而形成了所谓的快慢振荡. 特别地, 如图 3 所示, 当 γ 不断减小时, “激发态区域”中的量变行为越来越剧烈. 这导致系统的快慢振荡特征愈发显著, 例如见图 1(d)~图 1(f).

另一方面, 当 γ 较大时 (例如 $\gamma = 30$), 平衡点曲线没有形成“激发态区域”. 此时, 系统随着平衡点曲线一直“缓慢”地演化, 而没有“快速转迁”现象的发生, 例如可见图 5 (b1). 因此此时无法产生快慢振荡, 只形成了较为常规的振荡模式, 例如见图 5 (b2).

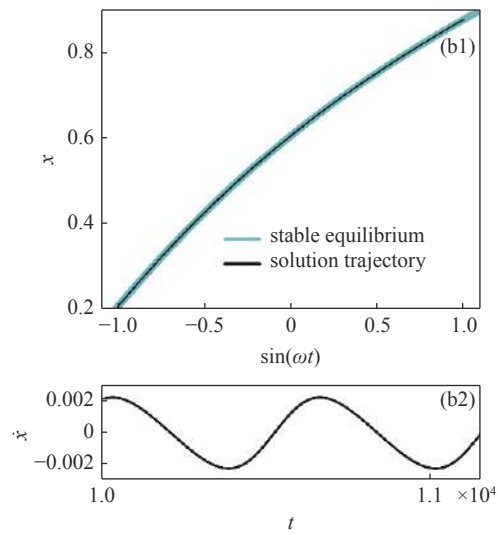
注意到在本文的研究中, 所涉及的两个沉寂态区域中的吸引子均是平衡点, 因此以图 5(a1) 和图 5(a2) 为代表的快慢振荡, 其本质上属于“点-点”型. 需要指出的是, “点-点”型快慢振荡是一种较为常见的振荡模式. 在以往的研究中, “点-点”型快慢振荡通常与折 (fold) 分岔^[34] 和亚临界 Hopf 分岔^[35] 有关. 此外, 延迟分岔 (delayed bifurcations)^[36] 等因素也可以诱发“点-点”型快慢振荡. 然而, 本文中的“点-点”型快慢振荡不是由具体的某种分岔所引起的, 而是由平衡点曲线的急剧量变所诱发.

最后指出, 脉冲式爆炸^[37] 和吸引子的极速逃逸^[38] 等因素是已知的可以诱发快慢振荡的其他急剧量变

行为. 然而, 脉冲式爆炸的特征是, 在平衡点曲线上形成了“脉冲”型的尖峰; 而吸引子的极速逃逸的特征是, 平衡点在某点附近迅速趋于无穷大. 这些均与本文报道的急剧量变行为不同. 综上所述, 本文揭示的快慢振荡的诱发机制, 是未曾报道过的新型动力学机制.



(a1), (a2) 对应于图 1(f) 中的振荡模式
(a1), (a2) are related to the oscillation mode in Fig.1(f)



(b1), (b2) 对应于图 1(a) 中的振荡模式
(b1), (b2) are related to the one in Fig.1(a)

图 5 典型振荡行为的动力学分析

Fig. 5 Dynamical analysis of the typical oscillation modes

5 结论

快慢振荡普遍存在于谐波齿轮传动系统; 探讨快慢振荡的动力学机理问题具有重要意义. 本文研究涉及扭转刚度非线性因素的谐波齿轮传动系统的

快慢动力学,揭示诱发快慢振荡的新机制.研究表明,当扭转刚度系数不断减小时,平衡点曲线可以产生不同于以往的急剧量变,即在某局部小范围内,平衡点可在正、负坐标值之间快速转迁.这直接形成具有不同动力学特性的激发态区域和沉寂态区域.在慢变量的调控下,系统在激发态与沉寂态之间相互转迁,进而产生快慢振荡.本文的研究丰富快慢振荡的诱发机制,为实际谐波齿轮传动系统中的快慢动力学机理与控制研究提供参考.

参 考 文 献

- 1 马东辉,吴嘉宁,阎绍泽.谐波齿轮传动系统中动力学模型研究进展. *中国科技论文*, 2015, 10(16): 1983-1990 (Ma Donghui, Wu Jianning, Yan Shaoze. Advance in researches of dynamic models in harmonic drive system. *China Sciencepaper*, 2015, 10(16): 1983-1990 (in Chinese))
- 2 赵杰亮,谷勇霞,阎绍泽等.谐波传动对柔性机械臂动力学特性的影响. *清华大学学报(自然科学版)*, 2013, 53(4): 482-486 (Zhao Jieliang, Gu Yongxia, Yan Shaoze, et al. Effect of a harmonic drive on the dynamic properties of a flexible space manipulator. *J. Tsinghua Univ. (Sci. & Tech.)*, 2013, 53(4): 482-486 (in Chinese))
- 3 李裕,崔业兵,许敬等.空间机器人谐波减速机构的力学特性研究. *计算机仿真*, 2016, 33(12): 318-322 (Li Yu, Cui Yebing, Xu Jing, et al. Study of the force characteristic for space robot's harmonic gear drive. *Computer Simulation*, 2016, 33(12): 318-322 (in Chinese))
- 4 Rached D, Ghorbel FH, Gandhi PS. A new dynamic model of hysteresis in harmonic drives. *Industrial Electronics*, 2003, 50(6): 1165-1171
- 5 韩邦成,马纪军,李海涛.谐波减速器的非线性摩擦建模及补偿. *光学精密工程*, 2011, 19(5): 1195-1103 (Han Bangcheng, Ma Jijun, Li Haitao. Modeling and compensation of nonlinear friction in harmonic driver. *Optic and Precision Engineering*, 2011, 19(5): 1195-1103 (in Chinese))
- 6 Tjahjowidodo T, Al-Bender F, Brussel HV. Theoretical modelling and experimental identification of nonlinear torsional behaviour in harmonic drives. *Mechatronics*, 2013, 23: 497-504
- 7 Preissner C, Royston TJ, Shu D. A high-fidelity harmonic drive model. *Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2012, 134: 11002-11013
- 8 Wolf S, Iskandar M. Extending a dynamic friction model with nonlinear viscous and thermal dependency for a motor and harmonic drive gear//International Conference on Robotics and Automation, 2018-5-21-25, (IEEE), 2018: 783-790
- 9 Li FJ, Li XP, Guo YJ, et al. Analysis of contact mechanical characteristics of flexible parts in harmonic gear reducer. *Shock and Vibration*, 2021, 2021: 5221320
- 10 Gravagno F, Mucino VH, Ettore P. Influence of wave generator profile on the pure kinematic error and centrodes of harmonic drive. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 104: 100-177
- 11 Hei M, Fan SX, Liao HB, et al. Modeling of precision harmonic drive system. *Optics and Precision Engineering*, 2014, 22(7): 1842-1849
- 12 Luo Y, Chen MY, Zhang J, et al. Research on nonlinear dynamic modeling and simulation of harmonic gear drive. *Mechanical Transmission*, 2021, 45(4): 58-63
- 13 Zhang HW, Ahmad S, Liu GJ. Modeling of torsional compliance and hysteresis behaviors in harmonic drives. *Mechatronics*, 2015, 20(1): 178-185
- 14 Tuttle TD, Seering WP. A nonlinear model of a harmonic drive gear transmission. *Robotics and Automation*, 1996, 12(3): 368-374
- 15 Li XZ, Song CS, Yang Y, et al. Optimal design of wave generator profile for harmonic gear drive using support function. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 152: 103941
- 16 Zhang X, Tao T, Jiang GD, et al. A refined dynamic model of harmonic drive and its dynamic response analysis. *Shock and Vibration*, 2020, 2020: 1841724
- 17 郝俊文.某型谐波齿轮传动系统的非线性动态性能分析研究. *机械传动*, 2018, 42(5): 57-61 (Hao Junwen. Analysis and research of the nonlinear dynamic performance of a certain type harmonic gear drive system. *Mechanical Transmission*, 2018, 42(5): 57-61 (in Chinese))
- 18 Kayabasi O, Erzincanli F. Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modelling. *Materials and Design*, 2007, 28: 441-447
- 19 Rhéaume F, Champliand H, Liu Z. Understanding and modelling the torsional stiffness of harmonic drives through finite-element method. *Mechanical Engineering Science*, 2009, 223(2): 515-524
- 20 辛洪兵,赵昊,秦宇辉.谐波齿轮传动系统非线性扭转振动分析. *机械科学与技术*, 2005, 24(9): 1040-1044 (Xin Hong, Zhao Fu, Qin Yuhui. Nonlinear analysis of harmonic drive torsional vibration. *Mechanical Science and Technology*, 2005, 24(9): 1040-1044 (in Chinese))
- 21 Zhang HW, Ahmad S, Liu GJ. Torque estimation for robotic joint with harmonic drive transmission based on position measurements. *Robotics*, 2015, 31(2): 322-330
- 22 Dong B, Li Y, Liu KP. Decentralized control for harmonic drive-based modular and reconfigurable robots with uncertain environment contact. *Advances in Mechanical Engineering*, 2017, 9(4): 1-14
- 23 Zeng PF, Jiang GD, Zou C, et al. Nonlinear friction compensation of a flexible robotic joint with harmonic drive. *Applied Mechanics and Materials*, 2017, 868: 39-44
- 24 Ghorbel FH, Gandhi PS. On the kinematic error in harmonic drive gears. *Journal of Mechanical*, 2001, 123: 90-97
- 25 游斌弟,赵阳.考虑非线性因素的谐波齿轮传动系统动态误差研究. *宇航学报*, 2010, 31(5): 1278-1282 (You Bindi, Zhao Yang. Study on dynamic error of harmonic drive with nonlinear factors.

- Journal of Astronautics*, 2010, 31(5): 1278-1282 (in Chinese))
- 26 Taghiad HD, Belanger PR. Modeling and parameter identification of harmonic drive systems. *Dynamic Systems*, 1998, 120: 439-444
- 27 Taghiad HD, Belanger PR. Intelligent built-in torque sensor for harmonic drive systems. *Instrumentation and Measurement*, 1999, 48(6): 1201-1207
- 28 Melek WW, Clark CM. Decentralized robust control of robot manipulators with harmonic drive transmission and application to modular and reconfigurable serial arms. *Robotica*, 2009, 27(2): 291-302
- 29 Oaki J, Adachi S. Grey-box modeling of elastic-joint robot with harmonic drive and timing belt. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, 45(16): 1401-1406
- 30 Shi ZG, Li YJ, Liu GJ. Adaptive torque estimation of robot joint with harmonic drive transmission. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 96: 1-15
- 31 Han XJ, Bi QS. Bursting oscillations in Duffing's equation with slowly changing external forcing. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16: 4146-4152
- 32 Rinzel J. Bursting oscillations in an excitable membrane model// Sleeman BD, Jarvis RJ. *Ordinary and Partial Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1985: 304-316
- 33 Han XJ, Bi QS, Ji P, et al. Fast-slow analysis for parametrically and externally excited systems with two slow rationally related excitation frequencies. *Physical Review E*, 2015, 92(1): 012911
- 34 陈娅妮, 孟文静, 钱有华. 一类 Duffing 型系统的不动点混沌和 Fold/Fold 簇发现象及机理分析. *力学学报*, 2020, 52(5): 1475-1484 (Chen Yani, Meng Wenjing, Qian Youhua. Fixed point chaos and Fold/Fold bursting of a class of duffing systems and the mechanism analysis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(5): 1475-1484 (in Chinese))
- 35 武世江, 张继业, 隋皓等. 轮对系统的 Hopf 分岔研究. *力学学报*, 2021, 53(9): 2570-2582 (Wu Shijiang, Zhang Jiye, et al. Hopf bifurcation study of wheelset system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(9): 2570-2582 (in Chinese))
- 36 张毅, 韩修静, 毕勤胜. 串联式叉型滞后簇发振荡及其动力学机制. *力学学报*, 2019, 51(1): 228-236 (Zhang Yi, Han Xiuqing, Bi Qinsheng. Series-mode pitchfork-hysteresis bursting oscillations and their dynamical mechanisms. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 228-236)
- 37 Wei MK, Han XXJ, Zhang XF, et al. Bursting oscillations induced by bistable pulse-shaped explosion in a nonlinear oscillator with multiple-frequency slow excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(2): 1301-1312
- 38 Han XJ, Xia FB, Zhang C, et al. Origin of mixed-mode oscillations through speed escape of attractors in a Rayleigh equation with multiple-frequency excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88: 2693-2703