

El、Scopus 收录 中文核心期刊

低频振动隔离和能量采集双功能超材料

赵 龙,陆泽琦,丁 虎,陈立群

LOW-FREQUENCY VIBRATION ISOLATION AND ENERGY HARVESTING SIMULTANEOUSLY IMPLEMENTED BY A METAMATERIAL WITH LOCAL RESONANCE

Zhao Long, Lu Zeqi, Ding Hu, and Chen Liqun

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-21-471

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

磁致伸缩主被动隔振装置中的磁机耦合效应研究

RESEARCH ON THE MAGNETO–MECHANICAL EFFECT IN ACTIVE AND PASSIVE MAGNETOSTRICTIVE VIBRATION ISOLATOR

力学学报. 2019, 51(2): 324-332

非线性被动隔振的若干进展

SOME RECENT PROGRESSES IN NONLINEAR PASSIVE ISOLATIONS OF VIBRATIONS

力学学报. 2017, 49(3): 550-564

基于能量密度等效的超弹性压入模型与双压试验方法

HYPERELASTIC INDENTATION MODELS AND THE DUAL-INDENTATION METHOD BASED ON ENERGY DENSITY EQUIVALENCE

力学学报. 2020, 52(3): 787-796

附磁压电悬臂梁流致振动俘能特性分析

ENERGY HARVESTING ANALYSIS OF A PIEZOELECTRIC CANTILEVER BEAM WITH MAGNETS FOR FLOW–INDUCED VIBRATION

力学学报. 2019, 51(4): 1148-1155

局域共振型声子晶体板缺陷态带隙及其俘能特性研究

STUDY ON THE BANDGAPS OF DEFECT STATES AND APPLICATION OF ENERGY HARVESTING OF LOCAL RESONANT PHONONIC CRYSTAL PLATE

力学学报. 2021, 53(4): 1114-1123



关注微信公众号,获得更多资讯信息

2021 年 11 月

Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics

振动能量俘获专题

低频振动隔离和能量采集双功能超材料"

赵龙陆泽琦2) 丁虎陈立群

(上海大学力学与工程科学学院,上海 200444) (上海大学上海市能源工程力学重点实验室,上海 200444) (上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

摘要 振动隔离和能量采集一体化是一种能够将有害振动隔离并转化为电能收集利用的动力学机制.本文从 局域共振超材料存在低频带隙特性出发,研究了振动隔离和能量采集双功能超材料的动力学行为.通过在球型 磁腔内放置固接了感应线圈的球摆构成具有能量采集功能的球摆型谐振器,并将其周期性的放置在基体梁中, 可以将带隙频率范围内的振动聚集在谐振器内,以实现振动隔离和能量采集双功能.建立了横向激励下双功能 超材料梁的动力学方程,应用 Bloch's 定理得到超材料的能带结构,通过有限元仿真验证了理论模型和研究方 法.研究了不同参数下超材料梁的带隙特性.进一步将一维拓展到二维,研究了二维双功能超材料板的振动隔 离和能量采集性能.最后,设计并建造了振动隔离和能量采集一体化双功能超材料动力学实验平台,解析、数 值和实验结果表明,在局域共振带隙的频率范围内,超材料梁主体的振动明显被抑制,与此同时,振动被局限在 谐振器中,使采集到的电压达到了最大值.通过对附加谐振器和没有附加谐振器的能带结构和幅频响应的对比, 发现球摆型谐振器的加入可以在低频范围内形成了一个局域共振带隙,有效提高了超材料梁在低频处的振动 隔离和能量采集性能.

关键词 球摆型谐振器,振动隔离,能量采集,双功能超材料

中图分类号: O328 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-471

LOW-FREQUENCY VIBRATION ISOLATION AND ENERGY HARVESTING SIMULTANEOUSLY IMPLEMENTED BY A METAMATERIAL WITH LOCAL RESONANCE¹⁾

Zhao Long Lu Zeqi²⁾ Ding Hu Chen Liqun

(School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)
 (Shanghai Key Laboratory of Energy Engineering Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)
 (Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China)

Abstract Integration of vibration isolation and energy harvesting is a dynamic mechanism, in which the harmful vibration could be isolated and converted into electrical energy. In this paper, the dynamic behavior of dual-functional metamaterials for vibration isolation and energy harvesting is studied based on the low frequency band gap characteristics of local resonance metamaterials. A spherical pendulum resonator with energy harvesting function is

Zhao Long, Lu Zeqi, Ding Hu, Chen Liqun. Low-frequency vibration isolation and energy harvesting simultaneously implemented by a metamaterial with local resonance. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(11): 2972-2983

²⁰²¹⁻⁰⁹⁻¹³ 收稿, 2021-10-13 录用, 2021-10-14 网络版发表.

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目 (11872037).

²⁾ 陆泽琦, 副研究员, 主要研究方向: 非线性振动隔离和能量采集. E-mail: luzeqi@shu.edu.cn

引用格式: 赵龙, 陆泽琦, 丁虎, 陈立群. 低频振动隔离和能量采集双功能超材料. 力学学报, 2021, 53(11): 2972-2983

placed in the spherical cavity by fixing the pendulum of the induction coil. The vibration in the range of band gap frequency can be harvested in the resonator, with the aiming at the dual-functions of vibration isolation and energy harvesting. The dynamic equation of dual-functional metamaterial beam under transverse excitation is established, the energy band structure of metamaterial is obtained by using Bloch's theorem, and the band gap characteristics of metamaterial beam under different parameters are studied. The theoretical model and research method are verified by finite element simulation. Furthermore, the vibration isolation and energy harvesting characteristics of dual-function metamaterial plates are studied. Finally, a dual-functional metamaterial dynamic experimental platform for vibration isolation and energy harvesting is designed and constructed. The analytical, numerical and experimental results demonstrate that the vibration of the metamaterial beam matrix is significantly suppressed in the frequency range of the local resonant band gap. Simultaneously, the vibration is sinked in the resonator, so that the harvested voltage reaches the maximum. The comparison of the energy band structure and amplitude frequency response between with and without the additional resonator reveals that the addition of the spherical pendulum resonator can generate a local resonant band gap in the low frequency range, which can effectively improve the vibration isolation and energy harvesting performance of the metamaterial beam at the low frequency.

Key words spherical pendulum resonator, vibration isolation, energy harvesting, dual-functional metamaterial

引 言

超材料是一种具有人工周期性设计的复合材 料,它具有天然材料所不具备超常物理特性^[1-4].例 如,由亚波长结构组成的声学超材料具有可以抑制 声波或弹性波传播的带隙^[5].超材料的应用主要包 括机械波衰减^[6-8]、低频隔振^[9-11]和能量采集^[12-13] 等.实际的工程中,如一些特殊工况下(飞行器帆 板、飞机机翼的支撑板等)不仅需要对特定频率范 围内的振动进行隔离,而且需要将有害振动产生的 能量转换为电能,以达到检测传感器供能的目的.因 此,本文研究的重点是设计振动隔离和能量采集相 结合的双功能超材料,在隔振的同时,把有害的振动 能量转换为可用于电力设备的更有用的电能^[14-16]. 然而到目前为止,关于振动隔离和能量采集相结合 的双功能超材料^[17-19]的研究很少.

由于低频处的振动对工程构件的损耗最大,所 以低频振动隔离问题一直是许多学者研究的热点. 最近,Yu等^[20]报道了Timoshenko梁与局部谐振器 的横向振动试验,并实现了其横向振动的隔离.EI-Borgi等^[21]对具有多个共振频率的超材料进行了试 验,扩大了隔振频率范围.Hao等^[22]设计了弯曲波激 励下的多跨超材料梁,这拓宽了带隙的频率范围,表 明隔振性能有所改善.Park和Jeon^[23]提出了一种用 于横波的具有宽低频带隙的锥形超材料梁,它改善 了宽带和低频特性.Li和Wang^[24]将多个谐振器放 置在一个双周期排列的系统中,以在低频范围内构 建具有指数纵波隔离带隙的超材料. Sharma 和 Sun^[25] 研究了低频波在具有周期性嵌入谐振器的夹层梁中的传播行为,发现了带隙之间的相互作用,从而进一步拓宽了带宽. Wang 等^[26] 在 Euler-Bernoulli 梁中放 置横向局部谐振器,以产生多个横向带隙,从而抑制 横波的传播. Hu 等^[27] 交替地将固有频率不同但质 量相同的周期谐振器连接到梁上,并通过调整频率 间隔来减少振动的传播,从而获得宽带隔离范围. 然 而,将低频振动从超材料主体上转移到谐振器之后, 振动的能量并未对其进行回收利用.

目前,对于超材料的研究,考虑到实际工程应用中的环境,许多学者设计了具有多个功能相结合的超材料. Li 等^[28]通过将非球形纳米颗粒植入圆柱形结构中,设计了一种用于热隐身和电隐身的双功能超材料. Shen 等^[29]通过将形状记忆合金和各向同性材料组装在一起,设计了一种用于热斗篷和聚光器的双功能超材料. Maldovan^[30]设计的热声超材料成功地实现了波隔离和热流导向功能. Sugino和Erturk^[31]在超材料悬臂梁振子上黏贴压电片实现了对振动的能量采集.

受上述研究的启发,为了在低频隔振的同时,对 隔离的振动能量进行采集,本文设计一种低频振动 隔离和能量采集的双功能超材料,将有害振动产生 的能量转化为电能为无线传感器等低功耗电器供 电.将固接了感应线圈的滑动球摆周期性阵列在基 体梁上的球形磁腔内,以实现振动隔离和能量采集 的统一.首先建立了双功能超材料梁在横向激励下

Ì

的动力学方程,应用 Bloch's 定理得到了超材料的能 带关系,对其进行有限元分析,并设计了横向激励超 材料的试验,验证了超材料的带隙内振动隔离特性; 最后,对二维双功能超材料的低频振动隔离和能量 采集性能进行了研究.

1 双功能超材料梁的设计

本节对双功能超材料梁进行建模和分析,通过 将带有球型空腔的梁基体与带能量采集功能的球摆 型谐振器相耦合,以实现低频隔振和能量采集的功 能性统一.双功能超材料梁的示意图如图 1(a)所示, 附加的带有能量采集功能谐振器如图 1(b)所示.将 带有能量采集功能的球摆型谐振器被放置在具有周 期性排列球形腔的超材料梁上,当弹性波在双功能 超材料中传播时,会在谐振器处产生局域共振现象, 从而阻止弹性波的传播,实现振动的隔离.当超材料 梁受到激励时,滑动小球在球腔内表面来回滑动,同 时驱动感应线圈切割磁场,产生电能.



图 1 (a) 双功能超材料模型图; (b) 带能量采集功能谐振器模型图 Fig. 1 (a) View of the dual-functional metamaterial; (b) a spherical pendulum energy harvester

本文所研究超材料的主要部分是一个无限长 梁,当高长比小于1:5 的梁受到横向激励时,需要 考虑横截面中性轴转动惯量的影响.如图2所示,超 材料梁的典型晶胞单元在本研究中可以等效为 Timoshenko 梁.

将超材料梁等效 Timoshenko 梁, *l* 为梁单元长度, *A* 为梁截面面积, *l* 为梁截面转动惯量, ρ 为梁材料的密度, *E* 为梁的拉伸弹性模量, *G* 为梁的剪切弹性模量. 如图 2 所示, 截面中性轴的横向位移随时间



图 2 超材料典型单胞的微元分析图 Fig. 2 The infinitesimal analysis of Timoshenko beams

变化 t 表示为 w(x,t),梁截面剪切角随时间 t 的变化 表示为 $\gamma(x,t)$,表示超材料梁的总弯曲变形角为 $\theta_f(x,t)$

$$\theta_f(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \gamma(x,t)$$
(1a)

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$
(1b)

$$Q(x,t) = \beta GA\gamma(x,t) \tag{1c}$$

式中, M(x,t)为作用在梁截面上的弯矩, Q(x,t)为作 用在梁截面上的剪应力, β 为剪切弹性模量 (梁截面 为矩形, 即 $\beta = \frac{5}{6}$).

根据质心运动定理和动量定理,可得梁单元的 动力学方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \beta G A \left[\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - E I \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} +$$

$$G A \left(\theta_f(x,t) - \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) = 0$$
(2)

式(2)为关于梁横向位移w(x,t)和轴线转角 $\theta(x,t)$ 的二阶偏微分方程组,对其进行化简可以得到 只用截面横向位移w(x,t)描述基体梁的动力学方 程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho IE}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} = 0$$
(3)

将球摆型谐振器附加进基体梁形心位置(x= l/2),可以看出附加的球摆型谐振器受到基体梁的水 平位移激励为 x_e = w(x,t)|_{x=l/2},如图 3 所示,利用拉格 朗日方程可以得到球摆谐振器的动力学方程.



图 3 球摆型谐振器模型 Fig. 3 A spherical pendulum resonator

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}(t)} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta(t)} = 0 \tag{4}$$

式中, L = T - U, T是动能, U是势能.

将图 3 中球腔质心 O 所在的水平面为零势能 面,则滑动小球的动能 T、势能 U 分别为

$$T = \frac{1}{2}m_1 \left[R_b^2 \frac{d\theta(t)^2}{dt} + \frac{\partial w(x,t)|_{x=l/2}^2}{\partial t} + \frac{2R_b \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{\partial w_{l/2}(x,t)}{\partial t}}{\partial t} \right]$$
(5a)

$$U = -m_1 g R_{\rm b} \cos \theta(t) \tag{5b}$$

式中, $m_1 = \frac{4\pi r^3 \rho_1}{3}$ 为滑动小球的质量, $\theta(t)$ 为滑动小球随时间转过的角度, ρ_1 为滑动小球的密度, r为滑动小球的半径, R_n 为球型空腔的半径, R_b 为滑动球质心与球型空腔球心的距离 ($R_b = R_n - r$), g为重力加速度.

将式(5)代入拉格朗日方程,得到球摆谐振器的 动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R_{\mathrm{b}}} \left[g - \frac{\partial^2 w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^2} \right] \sin\theta(t) = 0 \qquad (6)$$

将能量采集装置附加到球摆型谐振器中,可以 得到球摆型能量采集器.根据基尔霍夫定律,得到具 有能量采集功能的球摆型谐振器的动力学方程为

$$\frac{d^{2}\theta(t)}{dt^{2}} + \frac{1}{R_{b}} \left[g - \frac{\partial^{2} w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^{2}} \right] \sin \theta(t) - \frac{BL_{\text{coil}}}{m_{1}} i(t) = 0$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L_{\text{ind}}} i(t) + \frac{BL_{\text{coil}}R_{b}}{L_{\text{ind}}} \frac{d\theta(t)}{dt} = 0$$

$$(7)$$

式中, *B* 为磁感应强度; *i*(*t*) 为感应线圈中产生的电流; *R* 为能量采集线圈中的电阻; *L*_{ind} 为电感强度; *L*_{coil} 为感应线圈的长度.

基于牛顿第二定律,将基体梁中空腔质量等效

为负质量,则附加球摆谐振器的超材料梁单元的动 力学方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho IE}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} = [R_1(t) + R_2(t)]\delta(x-l)$$
(8)

式中, *R*₁(*t*) + *R*₂(*t*) 为球摆型谐振器与超材料梁单元 主体之间的相互作用力 (*R*₁(*t*) 为超材料梁球型空腔 质量的等效负质量与梁主体之间的相互作用力, *R*₂(*t*) 为谐振质量与梁主体之间的相互作用), δ(*x*-*l*) 是狄利克雷函数; 相互作用力分别为

$$R_{1}(t) = \frac{m_{1}g}{R_{b}} \sin \theta_{i}(t)$$

$$R_{2}(t) = -\frac{4\pi R_{n}^{3}\rho}{3} \frac{\partial^{2} w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^{2}}$$
(9)

式中, *θ*_i为超材料梁受到横向激励时, 球摆与单元内 平衡位置的夹角.

联立球摆型谐振器的动力学方程可得到典型超 材料单元的控制方程

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho IE}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} - \left[\frac{m_1 g}{R_b} \sin \theta_i(t) - \frac{4\pi R_n^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^2} \right] \delta\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 \theta_i(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_b} \left[g - \frac{\partial^2 w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^2} \right] \sin \theta_i(t) = 0$$
(10)

根据基尔霍夫定律,具有能量采集功能的双功 能超材料梁的动力学方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho IE}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\beta G} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} - \left[\frac{m_1 g}{R_b} \sin \theta_i(t) - \frac{4\pi R_n^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^2}\right] \delta\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 \theta_i(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_b} \left[g - \frac{\partial^2 w(x,t)|_{x=l/2}}{\partial t^2}\right] \sin \theta_i(t) - \frac{BL_{\text{coil}}}{m_1}i(t) = 0$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L_{\text{ind}}}i(t) + \frac{BL_{\text{coil}}R_b}{L_{\text{ind}}} \frac{d\theta_i(t)}{dt} = 0$$
(11)

对未知量进行 Fourier 展开, 并利用 Bloch's 定

理将其设为

 $w(x,t) = W_0 e^{j(\omega t - qx)}$ (12a)

力

$$w(t) = W_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{12b}$$

 $\theta_i(t) = \Theta_{i0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{12c}$

$$i(t) = I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{12d}$$

式中, w 为振动频率, q 为 x 方向的波矢量, 本文将一维向量 q 写成标量形式.

上述应用于简谐弯曲弹性波通过双功能超材料 梁单元的控制方程可写为

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ \rho A \frac{\partial^{2} [W_{0} e^{j(\omega t - qx)}]}{\partial t^{2}} + \frac{\rho^{2} I}{\beta G} \frac{\partial^{4} [W_{0} e^{j(\omega t - qx)}]}{\partial t^{4}} + \frac{4\pi R_{n}^{3} \rho}{3} \frac{\partial^{2} [W_{0} e^{j(\omega t - qx)}]}{\partial t^{2}} \right\} dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ EI \frac{\partial^{4} [W_{0} e^{j(\omega t - qx)}]}{\partial x^{4}} - \rho I \frac{\partial^{4} [W_{0} e^{j(\omega t - qx)}]}{\partial x^{2} \partial t^{2}} \right\} dx - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\rho IE}{\beta G} \frac{\partial^{4} [W_{0} e^{j(\omega t - qx)}]}{\partial x^{2} \partial t^{2}} dx - \frac{m_{1}g}{R_{b}} \Theta_{i0} e^{j\omega t} = 0 \\ \frac{d^{2} \Theta_{i0} e^{j\omega t}}{dt^{2}} + \frac{1}{R_{b}} \left[g - \frac{\partial^{2} w(x, t)|_{x = l/2}}{\partial t^{2}} \right] \Theta_{i0} e^{j\omega t} - \frac{BL_{coil}}{m_{1}} I_{0} e^{j\omega t} = 0 \\ \frac{dI_{0} e^{j\omega t}}{dt} + \frac{R}{L_{ind}} I_{0} e^{j\omega t} + \frac{BL_{coil}R_{b}}{L_{ind}} \frac{d\Theta_{i0} e^{j\omega t}}{dt} = 0$$
(13)

对方程(13)积分后,可以用欧拉公式化简可以得到

$$\frac{\rho A W_0 \omega^2}{q} k_{\rm T} + \frac{2I \rho^2 W_0 \omega^4}{q\beta G} k_{\rm T} + \frac{8\pi R_{\rm n}^3 \rho W_0 \omega^2}{3q} k_{\rm T} + 2EI W_0 q^3 k_{\rm T} - 2\rho I W_0 \omega^2 q k_{\rm T} - \frac{2EI \rho W_0 \omega^2 q}{\beta G} k_{\rm T} - \frac{m_{1g}}{R_{\rm b}} \Theta_{i0} = 0$$

$$\Theta_{i0} \omega^2 + \frac{1}{R_{\rm b}} (g + \omega^2 W \big|_{x=l/2}) \Theta_{i0} - \frac{BL_{\rm coil}}{m_1} I_0 = 0$$

$$I_0 \omega + \frac{R}{L_{\rm ind}} I_0 + \Theta_{i0} \omega \frac{BL_{\rm coil} R_{\rm b}}{L_{\rm ind}} = 0$$

$$(14)$$

式中, $k_{\rm T} = \sin\left(\frac{ql}{2}\right)$.

控制方程的系数矩阵可以写成

$$\begin{bmatrix} \Re k_{\rm T} & -\frac{m_1 g}{R_{\rm b}} & 0\\ 0 & \Psi & -\frac{BL_{\rm coil}}{m_1}\\ 0 & \frac{BL_{\rm coil} R_{\rm b} \omega}{L_{\rm ind}} & \frac{R}{L_{\rm ind}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0\\ \Theta_{i0}\\ I_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

式中

报

$$\Re = \frac{\rho A \omega^2}{q} + \frac{2I\rho^2 \omega^4}{q\beta G} + \frac{8\pi R_n^3 \rho \omega^2}{3q} + \frac{2EIq^3 - 2\rho I \omega^2 q}{\rho G} + \frac{2EI\rho \omega^2 q}{\rho G}$$

$$\Psi = \omega^2 + \frac{1}{R_{\rm b}}(g + \omega^2 W\big|_{x=l/2})$$

通过求解上式的系数项,使系数行列式为零,可 得到频率 ω 与波矢量 q 的关系,即本文所研究的双 功能超材料梁的能带结构关系.

2 有限元分析

本文利用有限元方法分析了附加局部谐振器的 双功能超材料梁的动力学特性. 图 4 表示了附加谐 振器单元有限元模型. 本研究计算得到了由 8 个局 部谐振腔单元组成的双功能超材料梁的能带结构和 频率响应函数曲线,有限元模型如图 5 所示. 在有限 元的环境下,对双功能超材料梁的中间位置施加恒



Fig. 5 Finite element model of metamaterial beam

定加速度的谐波激励, 在梁的另一端设置探针对端 部的响应进检测.

图 5 中五角星标记位置为激励位置,圆点标记 位置为监测点位置.

在有限元环境下,超材料的频率响应函数矩阵 表示为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\ddot{p}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\dot{p}})\boldsymbol{\dot{p}} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}$$
(16a)

$$\boldsymbol{F} = \left\{ il\rho A\omega^2 X_e \cos(\omega t), 0, 0, \\ il\rho A\omega^2 X_e \cos(\omega t), 0, 0, \cdots \right\}^{\mathrm{T}}$$
(16b)

$$\boldsymbol{p} = [-\omega^2 \boldsymbol{M} + j\omega \boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}]^{-1} \boldsymbol{F}$$
(16c)

式中, *M*, *C*, *K* 为离散有限双功能超材料梁的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵. *i* 为无限周期超材料梁中的单元数. *p* 和 *F* 分别表示位移矢量和力矢量. 采用有限元分析方法对模型进行求解, 计算超材料梁另一端的动态响应数据, 得到梁的频率响应.

3 结果和讨论

本节比较了有无附加带能量收集装置球摆型谐振器时双功能超材料梁的低频隔振性能.为了更好的控制超材料带隙的频率范围,还讨论了双功能超材料单胞参数对带隙的影响,对双功能超材料的输出电压进行了研究.表1为双功能超材料的物理参数.

Table 1 Parameters of a dual-functional metamaterial			
Item	Notation	Value	
length	<i>l/</i> m	0.1	
cross-sectional area	A/m^2	0.003 6	
density of material	$ ho/(kg \cdot m^{-3})$	1810	
Young's modulus	E/Pa	761 761	
radius of spherical cavity	<i>R</i> /m	0.02	
radius of sliding-ball	r/m	0.009	
density of sliding-ball	$ ho_{\rm b}/\left({\rm kg}\cdot{\rm m}^{-3} ight)$	7780	
magnetic flux	B/T	0.5	
inductance	$L_{\rm ind}/{ m H}$	0.5	
coil length	$L_{\rm coil}/{ m m}$	0.1	

	表 1	双功能超材料物理参数
--	-----	------------

3.1 有无附加谐振器对超材料带隙特性的影响

为了研究在超材料梁中附加谐振器对其带隙和 振动特性的影响,本节对比有无球摆型谐振器超材 料梁的能带结构和幅频响应曲线.对于有限周期数 的超材料,当周期数很大时,带隙的起始频率和结梁 频率趋向于带隙的理论值,这为用有限周期超材料 替代无限周期超材料的研究提供了基础.

图 6(a) 显示了附加谐振器超材料梁的能带结构 和幅频响应曲线. 在 0~120 Hz 范围内, 存在 Bragg 带 隙 (37~66 Hz) 和低频处的局域共振带隙 (7~9 Hz), 在幅频响应图中, 带隙相应频率范围的振动响应被 明显抑制. 图 6(b) 表示了在相同物理参数下, 没有附 加谐振器超材料梁的能带结构和幅频响应曲线. 可 以明显的看出在 0~140 Hz 的频率范围内存在一个 Bragg 带隙 (79~92 Hz), 在带隙频率范围内的响应 明显小于带隙频率外的响应, 因此只含有阵列球型 空腔的超材料也可以有效地对振动进行抑制.

通过对比图 6(a) 和图 6(b) 可以看出, 无限周期



Fig. 6 Band-gaps and amplitude-frequency response of metamaterial



数超材料的带隙频率与有限周期数超材料振动抑制 频率范围基本一致,说明振动的衰减现象是由于带 隙行为引起的.理论上,振动可以在带隙的频率范围 内被完全隔离.然而,幅频响应的结果表明,振动仍 然是传播的. 这是因为理论上超材料的周期结构是 无限的,这里通过8个单元模拟得到频率响应,所以 在实际的工程应用中,带隙内的有害振动可以显著 降低,但不会完全被隔离.一般情况下,在超材料中 附加球摆型谐振器可以明显的降低 Bragg 带隙的频 率范围,中心频率从 85.5 Hz 降为 51.5 Hz, 拓宽隔振 带宽.在较低的频率范围内,由于球摆型谐振器的共 振,会产生一个较窄的局域共振带隙(7~9Hz).综 上所述,附加球摆型谐振器可以增大隔振带隙频率 范围.同时,附加了谐振器超材料梁的响应显著减小. 通过对附加谐振器和没有附加谐振器的能带结构和 幅频响应的对比,发现球摆型谐振器的加入可以在 低频范围内形成了一个局域共振带隙,提高了超材 料梁在低频处的隔振性能.

超材料几何参数研究 3.2

本文还讨论了超材料单胞的几何参数,如图7 所示,分别为单胞的尺寸(m)、谐振小球的尺寸(本 质上是质量/kg)和球型空腔的尺寸 (m) 对超材料梁





第 11 期

隔振带隙频率范围的影响.

图 7(a) 显示了单胞尺寸对超材料带隙频率范围 的影响,当弯曲波在超材料梁中传播时,对低频处局 域共振带隙的影响不大,其中心频率保持在8Hz左 右、带隙宽度为 3 Hz; 对于高频处的 Bragg 带隙, 其 中心频率从 90 Hz 降低到 21.5 Hz, 带宽从 4 Hz 拓宽 到 23 Hz. 图 7(b) 显示了谐振质量对带隙频率范围 的影响.谐振质量对低频处局域共振带隙调节能力 更强,带隙中心频率从 37 Hz 降低到 5.5 Hz,使其具 有更好的低频隔振性能,带宽始终保持在4Hz左右; 对于高频处的 Bragg 带隙,带宽从 25 Hz 拓宽到 30 Hz, 带隙的中心频率从 67.5 Hz 降低到 49 Hz. 因此, 附 加谐振器可以降低 Bragg 带隙的中心频率并拓宽带 隙宽度,提高超材料梁的低频隔振性能.图7(c)表示 了空腔尺寸对超材料带隙频率范围的影响,超材料 的空腔尺寸对低频处的局域共振带隙影响不大,中 心频率始终为 8.3 Hz, 带隙宽度为 2.5 Hz; 对于高频 处的 Bragg 带隙, 通过增大空腔尺寸, 带宽从 34 Hz 降低为 24 Hz, 带隙的中心频率从 62 Hz 降低到 48 Hz, 削弱了 Bragg 带隙的隔振性能.

3.3 能量输出特性

本节讨论附加谐振器的双功能超材料的能量采 集特性.通过有限元计算得到了谐振器中滑动小球 的位移,根据电磁感应定律,在第 *i* 个谐振器中产生 的输出电压为

$$V_{bi}(t) = MS \left[E_i(t) \right] = MS \left[BL_{\text{coil}} \dot{x}_i(t) \right]$$
(17)

式中, *x_i(t*)为超材料中滑动小球的速度; *V_{bi}(t*)为线圈 切割磁感线所产生的电压; *MS* 为均方根.

将有限元计算得到不同位置处谐振器中滑动小球位移代入式(17),可以得到如图 8 所示的输出电压曲线.

图 8 为不同位置处谐振器的输出电压曲线, 黑 色实线为在激振点附近 (图 5 中五角星) 处谐振器的 输出电压曲线, 蓝色点划线为远离激振点 (图 5 中圆 点) 处的谐振器的输出电压曲线. 从图 8 中可以看 出, 电压输出响应在 7~10 Hz 的频率范围内产生一 个峰值, 电压值达到了 0.2806 V, 这与球摆型谐振器 的共振频率范围接近. 因此, 附加球摆型谐振器的超 材料梁由于谐振器共振产生局域共振带隙, 在局域 共振带隙的频率范围内, 超材料基体梁的振动被转 移到谐振器中球摆上, 带动线圈做切割磁感线运动,



将机械能转化为电能,同时减弱基体梁的振动强度. 在局域共振带隙的频率范围内,靠近激振点处谐振器的输出电压曲线出现了峰值,远离激振点处谐振器的电压曲线并没有出现峰值验证了激振点附近处的能量集中结论.因为超材料带隙频率内的振动隔离效果和梁基体的阻尼耗散作用,在远离激励点处的谐振器的能量输出要比激振点附近谐振器的能量输出低两个量级乃至更多.在Bragg带隙的频率范围内,振动主要局限在基体梁中,所以在谐振器中球摆的振动被抑制,采集到的电压输出响应稳定.

4 试验验证

为了验证附加谐振器超材料梁的低频局部共振 带隙和 Bragg 带隙,本文采用橡胶作为超材料梁的 基体,并将滑动球摆置于球形腔内形成球摆型谐振 器.对超材料梁进行谐波激励,以研究其在带隙频率 范围内的振动隔离特性.试验所用仪器如表2所示, 附加球摆型谐振器超材料梁的物理参数与表1一致.

图 9 为横向激励下附加球摆型谐振器超材料梁 的试验照片.在试验中,利用两根多节的长棉线将超 材料梁吊起,以模拟自由边界条件.为了避免超材料

表 2 试验仪器

Table 2	Experiment	instruments
uoie 2	Emportinente	mountin

	•	
Instruments	Version	Manufacturer
shaker	TV-51140	TIRA
accelerometer	352C03	PCB
vibration controller	SCM2E02V	SIEMENS

力

梁在振动时产生的弯矩,本文将激励点设置在超材 料梁的中间位置,以抵消弯矩的影响.超材料梁与能 产生谐波激励的激振器固接.激振器对激振位置施 加一个 *a* = 0.1*g* 的恒定加速度激励,在激振器上放 置一个反馈加速度传感器形成闭环,使谐波激励更 为稳定,激励位置和响应位置的加速度响应由两个 加速度传感器记录.

图 10 为横向激励下超材料梁的扫频曲线. 从图 中可以看出,在 6~10 Hz 的低频范围内产生了由于 谐振器共振引起的局域共振带隙,在该带隙的频率 范围内,抑制了加速度响应,抑制效果达到了 0.0311g; 在 38~47 Hz 的频率范围存在隔振带隙,该范围内 的加速度响应也明显被抑制,抑制效果达到 0.052 2g. 与超材料的能带结构对比可以发现,扫频试验中产 生的隔振带隙与有限元计算得到的带隙频率范围相 一致.

为了可以定量的反映超材料梁的隔振效率,引 入带隙内振动隔离效率



图 9 横向激励下超材料梁试验照片





图 10 横向激励下超材料梁的扫频曲线



$$\mu = \left(1 - \frac{A_{\rm R}}{A_{\rm E}}\right) \times 100\% \tag{18}$$

式中, *A*_E为激励点处的加速度; *A*_R为响应点的加速度.

图 11(a) 为横向激励下超材料梁在 7.3 Hz 时的 时域响应,试验时选取局域共振带隙频率范围内隔 振效果最好的频率 (7.3 Hz) 进行驻留,通过该频率 下时域响应可以看出,振动响应明显被抑制,且处于 一个稳定的振动隔离状态.图 11(b) 为横向激励下超 材料梁在 38.5 Hz 频率下的时域响应,在 Bragg 隔振 带隙的频率范围内选取隔振效果最好的频率 (38.5 Hz) 进行驻留,通过该频率下的时域响应可以看出端 部响应被明显抑制.表 3 为超材料隔振带隙内的振 动隔离效率,从表中可以看出横向激励下该超材料 梁在局域共振频率范围内的振动隔离效率达到了 59.54%,在 Bragg 带隙内的振动隔离效率达到了 49.39%.因此,对该附加球摆型谐振器的超材料梁的 试验显示其具有良好的振动隔离特性.





Table 3Vibration isolation effi	Vibration isolation efficiency of band gap	
Band-gaps	$\mu_{ m BGIE}$ /%	
local resonant band-gap	59.54	
Bragg band-gap	49.39	

表3 带隙内隔振效率

5 二维双功能超材料板

本节对超材料梁拓展的超材料板进行研究.将 带能量采集功能的球摆型谐振器周期性的阵列在橡 胶板基体中,探索该超材料板纵向的振动隔离特性 与能量采集性能.

5×5 双功能超材料板的有限元模型示意图如 图 12(a) 所示,图中五角星标记位置为激励位置,圆 点标记位置为监测点位置.二维单胞的几何参数与 前文一维单胞的几何参数一致;图 12(b)表示了二维 超材料单胞所对应的简约 Brillouin 区间 (*Γ*-*X*-*M*-*Γ*),用于二维超材料单胞的计算.

图 13(a) 为双功能超材料板的带能结构,从带能



(a) 5×5 超材料板有限元模型示意图 (a) Finite element model of metamaterial plate (5×5)











Fig. 13 Band gap structure and amplitude frequency response

结构中可以看出该双功能超材料板存在两个明显的 带隙 (6~10 Hz 的局域共振带隙、38.5~47 Hz 的 Bragg 带隙). 图 13(b) 为相同条件下超材料板的幅频 响应曲线, 通过与有限周期数的超材料板的幅频响 应对比发现, 在局域共振带隙与 Bragg 带隙的频率 范围内, 响应点的振动明显被抑制, 在带隙频率内具 有明显的振动隔离效果.

为了验证具有能量采集功能超材料板的能量采 集性能.通过有限元计算得到了激励点附近谐振器 中滑动小球的位移.根据电磁感应定律,在第(*i*,*j*)个 谐振器的输出电压为

$$V_{p(i,j)}(t) = MS[BL_{coil}\dot{x}_{(i,j)}(t)]$$
 (19)

式中, *x*_(*i*,*j*)(*t*)为超材料中滑动小球的速度, *V*_{*p*(*i*,*j*)}(*t*)为 线圈切割磁感线所产生的电压, *MS*为均方根, 则 不同频率下激振点附近谐振器的输出电压曲线可以 得到.

将有限元计算得到的激振点附近谐振器内滑动

小球位移代入式 (19) 可以得到其输出电压响应曲线. 图 14 为超材料板激振点附近谐振器输出电压响应曲线. 通过分析输出电压响应曲线可知, 响应曲线 在 6~10 Hz 的频率范围内产生峰值, 最大输出电压为 4.02 mV, 这与谐振单元中球摆的共振频率相近. 因此, 在低频处局域共振带隙的频率范围内, 超材料板的振动被局限在谐振器处, 通过能量采集装置将机械能转化为电能, 使得超材料板振动衰减, 起到减振作用. 在 38.5~47 Hz 的 Bragg 带隙的频率范围内, 板的振动没有传递到谐振器中, 此时谐振器中感应线圈处于一个稳定的状态, 采集到的电压较少.



Fig. 14 Output voltage curve of resonator near excitation point

6 结论

本文设计了一种低频振动隔离和能量采集的双 功能超材料,在实现低频振动隔离的同时,对振动进 行能量采集,以实现隔振和能量采集的统一.这种双 功能超材料梁是将一个固接了感应线圈的球摆周期 的放置在球型磁腔之中构成超材料,从而利用带隙 特性进行振动隔离,并在带隙内采集到更多的能量. 首先建立了双功能超材料梁在横向激励下的动力学 方程,应用布鲁赫定理得到了超材料的能带关系,并 进行有限元计算,设计了横向激励超材料的试验,验 证了超材料的带隙内振动隔离特性;最后,对二维双 功能超材料的振动隔离和能量采集性能进行了研 究.主要结论如下:

(1) 在带隙的频率范围内, 振动响应能得到有效 抑制. 控制超材料的参数可以对带隙的频率范围进 行调控;

(2) 在谐振器中球摆滑动时所产生的能量可以 转化为电能被利用, 在局域共振带隙的频率范围内 采集到输出电压相比与带隙外的输出电压更大;

(3) 增加单胞尺寸和空腔尺寸对局域共振带隙的频率范围影响较小, 但它会显著降低 Bragg 带隙的频率范围, 拓宽频带, 提高超材料的隔振性能;

(4) 增加谐振质量可以显著降低由于谐振器共振引起的局域共振带隙的频率范围,试验结果与理论结果基本一致.对于二维的双功能超材料,同样拥有较好的低频隔振性能和带隙内的振动能量采集性能.综上所述,本文所提出的双功能超材料梁在实现低频隔振的同时,可以实现对振动能量更好的采集.

参考文献

- 1 肖峰,张红艳,郭少杰等.多孔压电分流超材料及其带隙特性研究.应用力学学报,2019,38(1):136-142 (Xiao Feng, Zhang Hongyan, Guo Shaojie, et al. Study on bandgap characteristics of porous piezoelectric shunt metamaterials. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2019, 38(1):136-142 (in Chinese))
- 2 任鑫,张相玉,谢亿民. 负泊松比材料和结构的研究进展. 力学学 报, 2019, 51(3): 656-687 (Ren Xin, Zhang Xiangyu, Xie Yimin. Research progress in auxetic materials and structures. *Chinese Journal* of *Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 656-687 (in Chinese))
- 3 夏利福,杨德庆. 含负泊松比超材料肋板的双层圆柱壳声振性能 分析. 振动与冲击, 2018, 37(18): 138-144 (Xia Lifu, Yang Deqing. Acoustics and vibration analysis of a double cylindrical shell with lightweight auxetic metamaterial ribs. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(18): 138-144 (in Chinese))
- 4 刘少刚,赵跃超,赵丹.基于磁流变弹性体多包覆层声学超材料带 隙及传输谱特性.物理学报,2019,68(23):234301 (Liu Shaogang, Zhao Yuechao, Zhao Dan. Bandgap and transmission spectrum characteristics of multilayered acoustic metamaterials with magnetorheological elastomer. *ActaPhysica Sinica*, 2019, 68(23): 234301 (in Chinese))
- 5 张印, 尹剑飞, 温激鸿等. 基于质量放大局域共振型声子晶体的低频减振设计. 振动与冲击, 2016, 35(17): 26-32 (Zhang Yin, Yin Jianfei, Wen Jihong, et al. Low frequency vibration reduction design for inertial local resonance phononic crystals based on inertial amplification. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(17): 26-32 (in Chinese))
- 6 沈惠杰,李雁飞,苏永生等. 舰船管路系统声振控制技术评述与声子晶体减振降噪应用探索. 振动与冲击, 2017, 36(15): 163-170 (Shen Huijie, Li Yanfei, Su Yongsheng, et al. Review of sound and vibration control techniques for ship piping systems and exploration of photonic crystals applied in noise and vibration reduction. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(15): 163-170 (in Chinese))
- 7 许振龙, 吴福根, 黄亮国. 局域共振型磁流变隔振支座低频完全禁 带研究. 压电与声光, 2015, 37(2): 330-333 (Xu Zhenlong, Wu Fugen, Huang Liangguo. Study on low – frequency complete band gaps of local resonant magnetorheological vibration isolators. *Piezoelectrics & Acoustooptics*, 2015, 37(2): 330-333 (in Chinese))
- 8 秦浩星,杨德庆.声子晶体负泊松比蜂窝基座的减振机理研究.振

- 9 高南沙,李沛霖,周文林等.四方折叠梁声子晶体低频带隙特性研究.噪声与振动控制,2019,39(1):210-215 (Gao Nansha, Li Peilin, Zhou Wenlin, et al. Low frequency bandgap characteristics of fourfold-beam phononic crystals. *Noise and Vibration Control*, 2019, 39(1):210-215 (in Chinese))
- 10 李静茹, 黎胜. 周期新型超材料板多阶弯曲波带隙研究. 振动与冲击, 2018, 37(1): 163-171 (Li Jingru, Li Sheng. Multi-flexural wave band gaps of a new periodic metamaterial plate. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(1): 163-171 (in Chinese))
- 11 殷鸣, 江卫锋, 殷国富. 含共振单元的单相 3 维声子晶体设计及其 带隙特性研究. 工程科学与技术, 2020, 52(5): 223-229 (Yin Ming, Jiang Weifeng, Yin Guofu. Design of single phase 3D phononic crystal with resonantor and research of band gap property. Advanced Engineering Sciences, 2020, 52(5): 223-229 (in Chinese))
- 12 王伟,曹军义,林京等.一种非线性双稳态人体运动能量俘获技术.西安交通大学学报, 2015, 49(8): 58-63 (Wang Wei, Cao Junyi, Lin Jing, et al. Nonlinear bi-stable energy harvester from human motion. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2015, 49(8): 58-63 (in Chinese))
- 13 Hu G, Tang L, Liang J, et al. Acoustic-elastic metamaterials and phononic crystals for energy harvesting: A review. *Smart Materials* and Structures, 2021, 30(8): 085025
- 14 周生喜,曹军义, Erturk Alper 等. 压电磁耦合振动能量俘获系统的非线性模型研究. 西安交通大学学报, 2014, 48(1): 106-111 (Zhou Shengxi, Cao Junyi, Erturk Alper, et al. Nonlinear model for piezoelectric energy harvester with magnetic coupling. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2014, 48(1): 106-111 (in Chinese))
- 15 李魁,杨智春,谷迎松等.变势能阱双稳态气动弹性能量收集的性能增强研究.航空学报,2020,41(9):223710 (Li Kui, Yang Zhichun, Gu Yingsong, et al. Performance enhancement of variable-potential-well bi-stable aeroelasticity energy harvesting. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(9): 223710 (in Chinese))
- 16 曹军义,任晓龙,周生喜等.基于并联电感同步开关控制的振动能量回收方法研究.振动与冲击,2012,31(17):56-60 (Cao Junyi, Ren Xiaolong, Zhou Shengxi, et al. Vibration energy harvesting based on synchronized switch control of parallel inductor. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(17):56-60 (in Chinese))
- 17 卢一铭,曹东兴,申永军等. 局域共振型声子晶体板缺陷态带隙及 其俘能特性研究. 力学学报, 2021, 53(4): 1114-1123 (Lu Yiming, Cao Dongxing, Shen Yongjun, et al. Study on the bandgaps of de-

- Mechanics, 2021, 53(4): 1114-1123 (in Chinese))
 18 孙伟彬, 王婷, 孙小伟等. 新型二维三组元压电声子晶体板的缺陷 态及振动能量回收. 物理学报, 2019, 68(23): 234206 (Sun Weibin, Wang Ting, Sun Xiaowei, et al. Defect states and vibration energy recovery of novel two-dimensional piezoelectric phononic crystal plate. ActaPhysica Sinica, 2019, 68(23): 234206 (in Chinese))
- 19 Lu ZQ, Zhao L, Ding H, et al. A dual-functional metamaterial for integrated vibration isolation and energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 509(29): 116251
- 20 Yu DL, Liu YZ, Wang G, et al. Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures. *Journal of Applied Physics*, 2006, 100(12): 124901
- 21 El-Borgi S, Fernandes R, Rajendran P, et al. Multiple bandgap formation in a locally resonant linear metamaterial beam: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 488: 115647
- 22 Hao SM, Wu ZJ, Li FM, et al. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams. *Physics Letters A*, 2019, 383(36): 126029
- 23 Park S, Jeon W. Ultra-wide low-frequency band gap in a tapered phononic beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 499: 115977
- 24 Li ZW, Wang XD. Wave propagation in a dual-periodic elastic metamaterial with multiple resonators. *Applied Acoustics*, 2021, 172: 107582
- 25 Sharma B, Sun CT. Local resonance and Bragg bandgaps in sandwich beams containing periodically inserted resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 364: 133-146
- 26 Wang T, Sheng MP, Qin QH. Multi-flexural band gaps in an Euler–Bernoulli beam with lateral local resonators. *Physics Letters* A, 2016, 380(4): 525-529
- 27 Hu GB, Austin ACM, Sorokin V, et al. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 146: 106982
- 28 Li JY, Gao Y, Huang JP. A bifunctional cloak using transformation media. *Journal of Applied Physics*. 2010, 108(7): 074504
- 29 Shen XY, Li Y, Jiang CR, et al. Thermal cloak-concentrator. Applied Physics Letters, 2016, 109(3): 031907
- 30 Maldovan M. Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, 2013, 503: 209-217
- 31 Sugino C, Erturk A. Analysis of multifunctional piezoelectric metastructures for low-frequency bandgap formation and energy harvesting. Journal of Physics D: Applied Physics, 2018, 51(21): 215103