力学学报
Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics
EI、Scopus 收录
中文核心期刊

分数阶拟周期Mathieu方程的动力学分析

郭建斌，申永军，李　航

DYNAMIC ANALYSIS OF QUASI-PERIODIC MATHIEU EQUATION WITH FRACTIONAL-ORDER DERIVATIVE

Guo Jianbin, Shen Yongjun, and Li Hang

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-21-455

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

第 53 卷 第 12 期 力 学 学 报 Vol. 53, No. 12
2021 年 12 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Dec., 2021

动力学与控制

分数阶拟周期 Mathieu 方程的动力学分析[1)]

郭建斌 [*] 申永军 [*,†,2)] 李 航 [*]

[*] (石家庄铁道大学机械工程学院, 石家庄 050043)

[†] (石家庄铁道大学交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室, 石家庄 050043)

摘要 分数阶微积分有着诸多优异的特点, 目前在动力学领域主要用来提高非线性系统振动特性研究的准确性. 本文在拟周期 Mathieu 方程的基础上, 引入分数阶微积分理论, 研究了分数阶微分项参数对方程稳定性的影响. 首先, 采用摄动法得到方程稳定区和非稳定区分界线 (即过渡曲线) 近似表达式, 利用数值方法验证了解析结果的准确性, 图像显示两者吻合较好. 随后, 通过归纳总结不同情况下的过渡曲线近似表达式, 发现在系统中分数阶微分项以等效线性刚度和等效线性阻尼的方式存在. 根据这一特点, 得到了系统等效线性阻尼和等效线性刚度的一般形式, 并且定义了非稳定区域厚度. 最后, 通过数值仿真直观地分析了分数阶微分项参数对方程稳定区域大小和过渡曲线位置的影响. 结果发现, 分数阶微分项不仅具有阻尼特性还具有刚度特性, 并且以等效线性刚度和等效线性阻尼的方式影响着方程稳定区域大小和过渡曲线位置. 合理选择分数阶微分项参数可以使其呈现不同程度的刚度特性或阻尼特性, 方程稳定区域的大小和过渡曲线的位置也因此产生了不同程度的变化.

关键词 分数阶微分, Mathieu 方程, 拟周期, 稳定性

中图分类号: O322, O313 **文献标识码**: A doi: 10.6052/0459-1879-21-455

DYNAMIC ANALYSIS OF QUASI-PERIODIC MATHIEU EQUATION WITH FRACTIONAL-ORDER DERIVATIVE[1)]

Guo Jianbin [*] Shen Yongjun [*,†,2)] Li Hang [*]

[*] (*Department of Mechanical Engineering*, *Shijiazhuang Tiedao University*, *Shijiazhuang* 050043, *China*)

[†] (*State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures*, *Shijiazhuang Tiedao University*, *Shijiazhuang* 050043, *China*)

Abstract Fractional calculus has many excellent characteristics and is mainly used to improve the research accuracy for vibration characteristics of nonlinear systems in the field of dynamics. In this paper, the fractional-order derivative is introduced into the quasi-periodic Mathieu equation and the influences of fractional-order term on the stability of the equation are studied. Firstly, the conditions of the periodic solutions are obtained by the perturbation method, and the approximate expressions of the transition curves are also gotten. The accuracy of the approximate analytical solution is verified by comparing with the numerical solution, and they are in good agreement with each other. Moreover, approximate expressions of transition curves under different conditions are summarized. By analyzing their formal

2021–09–27 收稿, 2021–11–05 录用, 2021–11–06 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (U1934201,11772206) 和石家庄铁道大学研究生创新项目 (YC2021043) 资助.

2) 申永军, 教授, 主要研究方向: 机械系统动力学与振动控制. E-mail: shenyongjun@126.com

引用格式: 郭建斌, 申永军, 李航. 分数阶拟周期 Mathieu 方程的动力学分析. 力学学报, 2021, 53(12): 3366-3375

Guo Jianbin, Shen Yongjun, Li Hang. Dynamic analysis of quasi-periodic Mathieu equation with fractional-order derivative. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(12): 3366-3375

characteristics, it is found that the fractional-order term exists in the form of equivalent linear stiffness and equivalent linear damping in the equation, the general forms of equivalent linear damping and equivalent linear stiffness are obtained, and the thickness of unstable region is defined. Finally, the effects of fractional-order parameters on the size of stability region and the position of transition curves are analyzed intuitively by numerical method. It is found that the fractional-order term has both damping and stiffness characteristics, and the fractional coefficient and fractional order affect the transition curves of the equation in the form of equivalent linear stiffness and equivalent linear damping. Even in some cases, the effect of fractional-order term is almost equal to linear damping or linear stiffness. Reasonable selection of fractional-order parameters can make it show different degrees of stiffness or damping characteristics, and have different degrees of influence on the stability region of the equation and the position of the transition curve, thus affecting the value range of the stability parameters of the equation. These results are of great significance for the study of dynamic characteristics of such systems.

Key words fractional-order derivative, Mathieu equation, quasi-periodicity, stability

引言

分数阶微积分第一次被数学家 Hospital 与 Leibnitz 提出, 至今已有 300 多年历史. 起初, 分数阶微积分因其缺乏应用背景在早期工程研究中并未得到广泛关注. 1832 年, Liouville 首次将分数阶微积分用于解决一些实际问题. 此后, 众多学者在分数阶微积分的定义、性质和计算方法等方面展开了详细的探讨[1-6]. 在这个过程中, 分数阶微积分也由数学理论研究逐步走向工程应用[7-11].

在控制工程领域, 分数阶微积分主要用来影响系统的闭环控制特性, 从而提高系统控制效果和鲁棒性. 如薛定宇和赵春娜[12] 提出了一种分数阶 PID 控制器的设计方法, 具体演示了分数阶控制器对系统优良的控制效果. 常宇健等[13] 则针对含分数阶阻尼的悬架模型进行了主动控制研究. 在动力学方面, 分数阶微积分主要集中用于描述黏弹特性材料的本构关系, 以此来提高此类非线性系统振动特性研究的准确性. 如 Cao 等[14] 采用数值积分法, 结合相图、庞加莱截面图、分岔图等分析了分数阶阻尼对系统动力学性能的影响. 申永军等[15] 通过对含分数阶线性单自由度振子的动力学分析, 首次提出等效线性阻尼和等效线性刚度概念. 申永军等[16-17] 利用平均法得到分数阶 van der Pol 振子的一次近似解, 比较了分数阶与整数阶系统并分析了分数阶微分项对系统动力特性的影响. 由上述研究可知, 相比整数阶模型, 分数阶模型的物理意义更清晰, 更能准确描述实际系统.

Mathieu 方程作为一种周期系数线性微分方程, 因其本身复杂的动力学特性, 在动力学领域得到了广泛的应用[18-20], 经常被用来处理一些参数共振现象. 如 Qian 等[21] 研究了在参数激励和强迫激励作用下的斜拉桥拉索的非线性动力学问题, 利用多尺度方法分析了 1/2 参激共振下的动力学响应. 黄建亮等[22] 对 van der Pol-Mathieu 方程的动力学特性进行了研究, 应用改进的谐波平衡法精确计算出了方程的准周期响应. 温少芳[23] 研究了分数阶参激系统的动力学特性, 分析了分数阶微分项对系统稳定性边界以及幅频响应的影响. 同时, 随着众多学者对 Mathieu 方程的深入研究, 促使其形式也得到了丰富拓展. Kovacic 等[24] 对 Mathieu 方程的推广型作了全面概述, 包含拟周期系数和椭圆系数等多种形式的 Mathieu 方程. 其中, 拟周期系数 Mathieu 方程通常被应用于一些特殊的动力系统, 如 Galeotti 和 Toni[25] 提出的含双频激励时变刚度的高速列车受电弓非线性模型. Huan 等[26] 研究了高速列车受电弓-悬链线组合系统中低频和高频参数激励对系统响应的影响等. Rand 等[27-28] 则针对拟周期 Mathieu 方程不同共振状态的稳定区域进行了深入研究.

综上所述, 在含有黏弹性器件的参激系统 (如弓网系统) 中, 分数阶模型较整数阶模型对系统描述更加准确. 因此, 本文在拟周期 Mathieu 方程中引入分数阶微积分理论, 建立了分数阶拟周期 Mathieu 方程, 利用摄动法求得了方程过渡曲线的近似解析解, 通过数值方法在系统稳定图中分析了分数阶微分项参数对方程稳定区域大小和过渡曲线位置的影响, 并验证了分数阶微分项同时含有阻尼和刚度特性的特点.

1 分数阶拟周期 Mathieu 方程

1.1 摄动分析

本文研究的分数阶拟周期 Mathieu 方程如下所示

$$\ddot{u}(t)+2\zeta\dot{u}(t)+\{\delta+\varepsilon[\cos t+\cos(\omega t)]\}u(t)+K_1\mathrm{D}^p u(t)=0 \tag{1}$$

其中, ω 是无理数; ε 为小参数, 满足$|\varepsilon|\ll 1$; 2ζ 和 $\delta+\varepsilon[\cos t+\cos(\omega t)]$ 分别为线性阻尼和时变刚度; $\mathrm{D}^p[u(t)]$ 为$u(t)$ 关于t 的p 阶导数$(0\leqslant p\leqslant 1)$; K_1 为分数阶微分项系数$(K_1>0)$.

关于分数阶微积分的定义有多种, 这里采用 Caputo 型分数阶微积分定义

$$\mathrm{D}^p[u(t)]=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t\frac{u'(s)}{(t-s)^p}\mathrm{d}s \tag{2}$$

式中Γ 为 Gamma 函数, 具有$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 的特性.

为了确定方程稳态周期解的过渡曲线, 引入$\zeta=\varepsilon\mu$, $\mu=O(1)$, $K_1=\varepsilon k$, $k=O(1)$, 式 (1) 变换为

$$\ddot{u}(t)+2\varepsilon\mu\dot{u}(t)+\{\delta+\varepsilon[\cos t+\cos(\omega t)]\}u(t)+\varepsilon k\mathrm{D}^p u(t)=0 \tag{3}$$

利用摄动法, 假设式 (3) 的解满足

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\cdots \tag{4}$$

过渡曲线在$\delta-\omega$ 平面内具有如下形式

$$\delta(\omega;\varepsilon)=\delta_0+\varepsilon\delta_1(\omega)+\varepsilon^2\delta_2(\omega)+\cdots \tag{5}$$

将式 (4) 和式 (5) 代入式 (3), 比较ε 的同次幂得到

$$O\left(\varepsilon^0\right):\ \ddot{u}_0+\delta_0 u_0=0 \tag{6a}$$

$$O\left(\varepsilon^1\right):\ \ddot{u}_1+\delta_0 u_1=-\delta_1 u_0-[\cos t+\cos(\omega t)]u_0-2\mu\dot{u}_0-k\mathrm{D}^p u_0 \tag{6b}$$

$$O\left(\varepsilon^2\right):\ \ddot{u}_2+\delta_0 u_2=-\delta_1 u_1-\delta_2 u_0-[\cos t+\cos(\omega t)]u_1-2\mu\dot{u}_1-k\mathrm{D}^p u_1 \tag{6c}$$

由式 (6a) 解得

$$u_0=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\delta_0}t}+cc \tag{7}$$

其中cc 代表前面各项的共轭, 后不赘述. 由于ω 是无理的, 拟周期 Mathieu 方程稳态周期解的过渡曲线在 $\delta-\omega$ 平面上是从$\delta_0=\dfrac{1}{4}(\alpha+\beta\omega)^2,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ 处产生[29], 下面讨论方程在$\alpha=0,1$, $\beta=-1,0,1$ 时的过渡曲线.

(1) $\delta_0=0$ (即 $\alpha=0,\beta=0$)

根据式 (6a) 解得

$$u_0=c=\text{const.} \tag{8}$$

式中c 是由初始条件确定的常量, 将其代入式 (6b) 得到

$$\ddot{u}_1=-\delta_1 c-[\cos t+\cos(\omega t)]c \tag{9}$$

为了消除永年项需$-\delta_1 c=0$, 所以有

$$\delta_1=0 \tag{10}$$

则式 (9) 的特解为

$$u_1=\left[\cos t+\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2}\right]c \tag{11}$$

这里利用公式[30] 对分数阶微分项$k\mathrm{D}^p u_1$进行处理

$$\mathrm{D}^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\approx(\mathrm{i}\lambda)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \tag{12}$$

再结合欧拉公式得到

$$\begin{aligned}k\mathrm{D}^p u_1&=k\mathrm{D}^p\left\{\left[\cos t+\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2}\right]c\right\}\\&=\frac{c}{2}\mathrm{i}^p k\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\frac{\omega^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2}+cc\right)\end{aligned} \tag{13}$$

将式 (8)、式 (10)、式 (11) 和式 (13) 代入式 (6c) 得到

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2=&-c\delta_2-\frac{c}{2}-\frac{c}{2\omega^2}-\mathrm{i}\mu c\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mu\frac{\mathrm{i}c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega}-\\&\frac{1}{4}c\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}-\frac{1}{4}c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\omega)t}-\frac{1}{4}c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\omega)t}-\frac{c\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}}{4\omega^2}-\\&\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\omega)t}}{4\omega^2}-\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\omega)t}}{4\omega^2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}^p c\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}k-\frac{ck(\mathrm{i}\omega)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{2\omega^2}+cc\end{aligned} \tag{14}$$

从上式得出消除永年项条件

$$-c\delta_2-\frac{c}{2}-\frac{c}{2\omega^2}=0$$

即

$$\delta_2=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{15}$$

此时式 (14) 的特解为

$$\begin{aligned}u_2=&\frac{1}{16}c\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+\mathrm{i}\mu c\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\frac{\mathrm{i}\mu c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^3}+\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1+\omega)t}}{4(-1+\omega)^2}+\\&\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\omega)t}}{4(1+\omega)^2}+\frac{c\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}}{16\omega^4}+\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1+\omega)t}}{4(-1+\omega)^2\omega^2}+\\&\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\omega)t}}{4(1+\omega)^2\omega^2}+\frac{c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}k(\mathrm{i}\omega)^p}{2\omega^4}+\frac{c}{2}\mathrm{i}^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}k+cc\end{aligned} \tag{16}$$

将式 (10) 和式 (15) 代入式 (5) 得到

$$\delta=-\varepsilon^2\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{17}$$

分析式 (17) 可以看出, 在 $\delta_0=0$ 附近过渡曲线的二阶近似解与方程的分数阶微分项和阻尼都没有关系, 所以进行三阶近似计算

$$\begin{aligned}O\left(\varepsilon^3\right):\quad &\ddot{u}_3+\delta_0 u_3=-\delta_3 u_0-\delta_2 u_1-\delta_1 u_2-\\ &[\cos t+\cos(\omega t)]u_2-2\mu\dot{u}_2-k\mathrm{D}^p u_2\end{aligned} \tag{18}$$

类似地, 将式 (8)、式 (10)、式 (11)、式 (15) 和式 (16) 代入式 (18) 可得到消除永年项条件

$$-c\delta_3-\frac{ck\left(\omega^4+\omega^p\right)}{2\omega^4}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)=0$$

即

$$\delta_3=-\frac{k\left(\omega^4+\omega^p\right)}{2\omega^4}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \tag{19}$$

代入方程原参数得到 $\delta_0=0$ 时过渡曲线的三阶近似解

$$\delta=-\varepsilon^2\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)-\varepsilon^2\frac{K_1\left(\omega^4+\omega^p\right)}{2\omega^4}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)+O\left(\varepsilon^4\right) \tag{20}$$

(2) $\delta_0=\frac{1}{4}\omega^2$ (即 $\alpha=0, \beta=1$)

由式 (7) 得到式 (6a) 的特解为

$$u_0=A\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}+cc \tag{21}$$

对分数阶项 $k\mathrm{D}^p u_0$ 进行处理得到

$$k\mathrm{D}^p u_0=k\mathrm{D}^p\left(A\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}+cc\right)=k\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega\right)^p A\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}+cc \tag{22}$$

将式 (21) 和式 (22) 代入式 (6b) 中得到

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1+\frac{1}{4}\omega^2 u_1=&\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}\left[-\delta_1 A-2^{-p}k(\mathrm{i}\omega)^p A-\mathrm{i}\mu\omega A-\frac{1}{2}\bar{A}\right]\\ &-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{i}\omega t}A-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}A-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}A+cc\end{aligned} \tag{23}$$

消除永年项条件为

$$-\delta_1 A-2^{-p}k(\mathrm{i}\omega)^p A-\mathrm{i}\mu\omega A-\frac{1}{2}\bar{A}=0 \tag{24}$$

为了便于求解, 记 $A=\frac{a}{2}-\mathrm{i}\frac{b}{2}$, 求解式 (24), 分离实部和虚部得

$$\left.\begin{aligned}&\left[-1-2\delta_1-2\frac{1}{2^p}\omega^p k\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]a+\\ &\qquad\left[-2\omega\mu-2\frac{1}{2^p}\omega^p k\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]b=0\\ &\left[-2\omega\mu-2\frac{1}{2^p}\omega^p k\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]a+\\ &\qquad\left[-1+2\delta_1+2\frac{1}{2^p}\omega^p k\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]b=0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

该方程有非零解的条件是

$$\det\begin{bmatrix}-1-2\delta_1-2\frac{1}{2^p}\omega^p k\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\\ -2\omega\mu-2\frac{1}{2^p}\omega^p k\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\\ -2\omega\mu-2\frac{1}{2^p}\omega^p k\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\\ -1+2\delta_1+2\frac{1}{2^p}\omega^p k\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\end{bmatrix}=0 \tag{26}$$

其中 det 为求解矩阵行列式. 计算得出

$$\delta_1=-\frac{1}{2^p}\omega^p k\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\omega\mu+\frac{1}{2^p}\omega^p k\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2} \tag{27}$$

此时式 (6b) 的特解为

$$\begin{aligned}u_1=&\frac{1}{4\omega^2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{i}\omega t}A-\frac{1}{2(\omega-1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}A+\\ &\frac{1}{2(\omega+1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega t}A+cc\end{aligned} \tag{28}$$

将式 (21)、式 (27) 和式 (28) 代入式 (6c) 得

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2+\frac{1}{4}\omega^2 u_2=&\left[-\delta_2 A+\frac{A}{4(-1+\omega)}-\frac{A}{8\omega^2}-\right.\\ &\left.\frac{A}{4(1+\omega)}\right]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\omega t}+\cdots+cc\end{aligned} \tag{29}$$

为了消除永年项, 要求

$$-\delta_2 A+\frac{A}{4(-1+\omega)}-\frac{A}{8\omega^2}-\frac{A}{4(1+\omega)}=0$$

从而得到

$$\delta_2=-\frac{1+3\omega^2}{8\omega^2(1-\omega)(1+\omega)} \tag{30}$$

将式 (27) 和式 (30) 代入式 (5), 代入原参数整理得到此时的两条过渡曲线

$$\begin{aligned}\delta=&\frac{1}{4}\omega^2-\frac{K_1}{2^p}\omega^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)-\varepsilon^2\frac{1+3\omega^2}{8\omega^2(1-\omega)(1+\omega)}\pm\\ &\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{\omega^2}{4}\left[2\zeta+\frac{K_1}{2^{p-1}}\omega^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2}+O\left(\varepsilon^3\right)\end{aligned} \tag{31}$$

根据上述类似的计算方法相应求出 $\delta_0=\dfrac{1}{4}(\alpha=1,\beta=0)$ 时方程的过渡曲线为

$$\delta=\frac{1}{4}-\frac{K_1}{2^p}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)-\varepsilon^2\frac{3+\omega^2}{8(1-\omega^2)}\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{1}{4}\left[2\zeta+K_1\frac{1}{2^{p-1}}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2}+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{32}$$

$\delta_0=\dfrac{1}{4}(1+\omega)^2$ (即 $\alpha=1,\beta=1$) 时方程的过渡曲线为

$$\delta=\frac{1}{4}(1+\omega)^2+\varepsilon^2\left[\frac{1}{2\omega}-\frac{1}{4(2+\omega)}-\frac{1}{4\omega(1+2\omega)}\right]-\frac{K_1}{2^p}(1+\omega)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\omega^2}-\frac{1}{4}(1+\omega)^2\left[2\zeta+\frac{K_1}{2^{p-1}}(1+\omega)^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2}+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{33}$$

$\delta_0=\dfrac{1}{4}(1-\omega)^2$ (即 $\alpha=1,\beta=-1$) 时方程的过渡曲线为

$$\delta=\frac{1}{4}(1-\omega)^2+\varepsilon^2\left[-\frac{1}{2\omega}-\frac{1}{4(2-\omega)}-\frac{1}{4\omega(2\omega-1)}\right]-\frac{K_1}{2^p}(1-\omega)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\omega^2}-\frac{1}{4}(1-\omega)^2\left[2\zeta+\frac{K_1}{2^{p-1}}(1-\omega)^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2}+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{34}$$

1.2 方程过渡曲线分析

选取一组参数 $\zeta=0.005$, $K_1=0.005$, $p=0.5$, $\varepsilon=0.1$, 利用式 (20) 和式 (31) ~ 式 (34) 并略去式中高阶部分绘制解析结果的过渡曲线如图 1 所示.

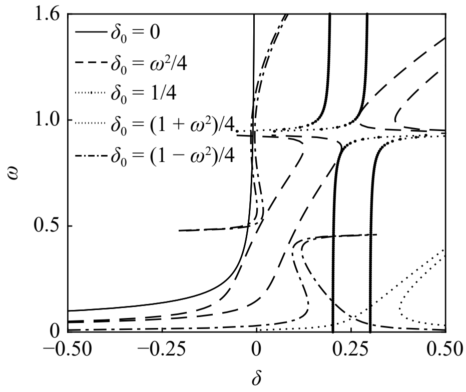


图 1 分数阶拟周期 Mathieu 方程的过渡曲线

Fig. 1 Transition curves of QP Mathieu equation with fractional-order derivative

对比不含分数阶微分项的 Mathieu 系统[31-32], 通过定义等效线性阻尼 $C(p)$ 和等效线性刚度 $K(p)$ 的方法来分析分数阶微分项对拟周期 Mathieu 方程过渡曲线的影响. δ_0 在各情况下的等效线性阻尼和等效线性刚度如表 1 所示.

通过表 1, 得到方程等效阻尼和等效刚度的一般形式

$$C(p)=2\zeta+(\sqrt{\delta_0})^{p-1}K_1\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \tag{35a}$$

$$K(p)=\delta+(\sqrt{\delta_0})^{p}K_1\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \tag{35b}$$

分析上述 5 种情况下的结果可知, 在 $\delta_0=0$ 时, 方程过渡曲线的二阶近似解与分数阶微分项无关, 分数阶微分项以等效线性阻尼和等效线性刚度的形式影响着过渡曲线的三阶近似解. 而在其他 4 种情况中, 分数阶微分项对方程二阶近似解均有影响, 并且它们的等效线性阻尼和等效线性刚度均可整理为一般形式 (35). 通过分析式 (35) 发现, 分数阶微分项的系数 K_1 和阶次 p 对方程过渡曲线有着重要影响: 当分数阶微分项系数 K_1 逐渐增大时, 等效线性阻尼和等效线性刚度都会逐渐增大; 当分数阶阶次 p 趋近于 0 时, 分数阶微分项几乎等于线性刚度; 而当 p 趋近于 1 时, 分数阶微分项几乎等于线性阻尼.

另外, 通过对比式 (31) ~ 式 (34) 发现方程过渡曲线表达式具有一定的相似性, 都是由 δ_0 开始随着

表 1 δ_0 在不同情况下的等效线性阻尼和等效线性刚度

Table 1 Equivalent linear damping and equivalent linear stiffness of different δ_0

	$\delta_0=0$	$\delta_0=\frac{1}{4}\omega^2$	$\delta_0=\frac{1}{4}$	$\delta_0=\frac{1}{4}(1+\omega)^2$	$\delta_0=\frac{1}{4}(1-\omega)^2$
$C(p)$	–	$2\zeta+\frac{K_1}{2^{p-1}}\omega^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$2\zeta+K_1\frac{1}{2^{p-1}}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$2\zeta+\frac{K_1}{2^{p-1}}(1+\omega)^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$2\zeta+\frac{K_1}{2^{p-1}}(1-\omega)^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)$
$K(p)$	$\delta+\varepsilon^2\frac{K_1\left(\omega^4+\omega^p\right)}{2\omega^4}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$\delta+\frac{K_1}{2^p}\omega^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$\delta+\frac{K_1}{2^p}\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$\delta+\frac{K_1}{2^p}(1+\omega)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$	$\delta+\frac{K_1}{2^p}(1-\omega)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$

ω 的增大逐渐分裂成两条过渡曲线组成 ($\delta=\delta_0+E\pm F$), 如方程在$\delta_0=\frac{1}{4}\omega^2$ 时过渡曲线式 (31). 根据这一特点, 可以定义此时两条过渡曲线之间的厚度 (即非稳定区域厚度) 为

$$thickness \approx 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{\omega^2}{4}\left[2\zeta+K_1\frac{1}{2^{p-1}}\omega^{p-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right]^2} \tag{36}$$

类似地, 在δ_0 为其他几种情况时也存在类似的式子来表示过渡曲线之间的厚度. 利用式 (36) 可以更加直观地显示分数阶微分项系数和阶次的变化对$\delta-\omega$ 平面上非稳定性区域大小的影响.

2　数值仿真

2.1　数值解和解析解的比较

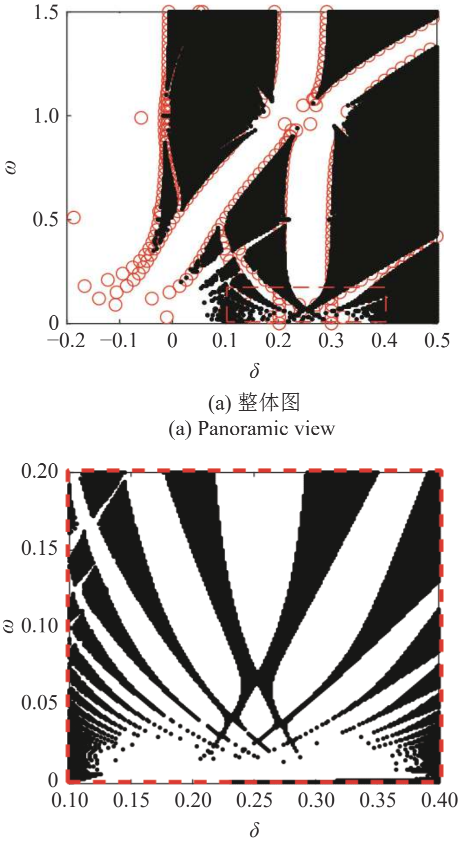
为了验证本文结果的正确性, 下面将上述过渡曲线的解析结果和数值结果进行对比. 利用文献 [5] 中介绍的数值方法研究方程 (1), 该方法的近似公式为

$$\mathrm{D}^p u(t_l) \approx h^{-p}\sum_{j=0}^{l} C_j^p u(t_{l-j}) \tag{37}$$

其中 $t_l=lh$ 为时间采样点, h 为时间步长, C_j^p 为分数阶二项式系数, 具有以下迭代关系

$$\left.\begin{aligned} &C_0^p=1\\ &C_j^p=\left(1-\frac{1+p}{j}\right)C_{j-1}^p \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

将 $\omega=0\sim1.5$ 和$\delta=-0.2\sim0.5$ 组成的$\delta-\omega$ 平面内所有的点离散处理, 分别代入式 (1) 中对方程进行数值积分, 计算一段时间后根据方程响应的振幅变化情况判断各个参数点对应的稳定性, 以此来确定式 (1) 的稳定区和非稳定区分界线. 其中δ选择间隔为 0.002, ω间隔为 0.01, 计算时间为 700 s, 计算步长选择 0.001, 所得结果如图 2 所示. 仿真过程中参数取值为: $\zeta=0.005$, $K_1=0.005$, $p=0.5$, $\varepsilon=0.1$. 图中黑色的点代表数值解稳定点, 白色是非稳定区域, 白色和黑色的分界线是数值解的稳定性边界, 红圈代表方程过渡曲线的解析结果. 从图 2 中可以看到方程在$\delta_0=\frac{1}{4}\omega^2$ 和$\delta_0=\frac{1}{4}$ 附近形成了指状的非稳定区域, 且解析结果和数值结果的稳定性边界在主要区域吻合度较好, 证明了文中所述方法和结果具有较好的准确性.



(a) 整体图
(a) Panoramic view

(b) 局部图
(b) Local view

图 2　数值解和解析解的方程过渡曲线

Fig. 2　Transition curves of numerical and analytical solutions

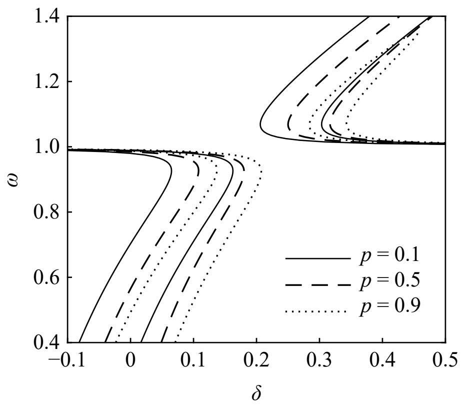
2.2　分数阶微分项对过渡曲线的影响

下面研究分数阶微分项参数对方程过渡曲线的影响. 首先选定参数ε, K_1 和ζ, 当分数阶微分项阶次 p 分别选取 0.1, 0.5 和 0.9 时, 方程在$\delta_0=\frac{1}{4}\omega^2$, $\delta_0=\frac{1}{4}$ 和$\delta_0=\frac{1}{4}(1+\omega)^2$ 时的过渡曲线如图 3 所示.

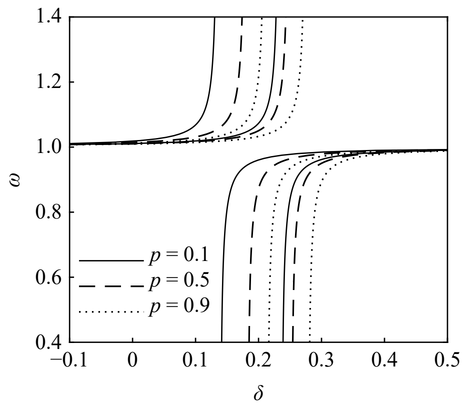
从图 3 中可以看出, 当分数阶微分项阶次 p 逐渐增大时, 由于等效线性刚度 $K(p)$ 在逐渐减小, 因此方程的过渡曲线在向右移动; 同时, 等效线性阻尼 $C(p)$ 在逐渐增大, 方程的非稳定区域在逐渐缩小. 说明分数阶阶次 p 不仅影响方程过渡曲线的位置, 而且还影响方程稳定区域的大小.

为了更好地区别分数阶微分项的阻尼和刚度特性, 分别取分数阶微分项阶次 $p=0.1$, $p=0.5$ 和 $p=0.9$, 观察不同阶次对方程过渡曲线的影响 ($\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.005$), 所得结果如图 4 ~ 图 6 所示.

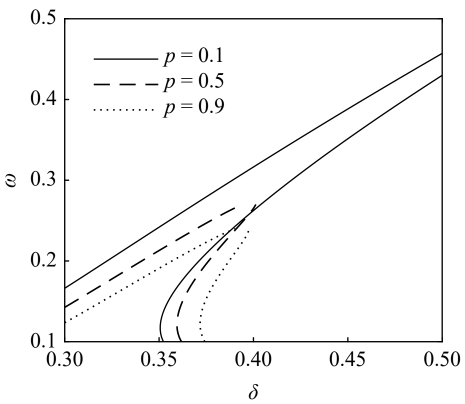
图 4 中给出了 $p=0.1$时方程过渡曲线随系数 K_1 的变化情况. 可以发现, 当 K_1 逐渐增大时, 由于等效线性刚度也在逐渐增大, 因此方程过渡曲线的位置



(a) $\delta_0 = \dfrac{1}{4}\omega^2$, $\varepsilon = 0.1$, $K_1 = 0.07$, $\zeta = 0.001$



(b) $\delta_0 = \dfrac{1}{4}$, $\varepsilon = 0.1$, $K_1 = 0.07$, $\zeta = 0.001$



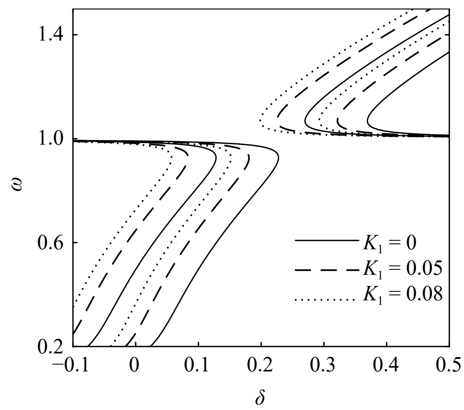
(c) $\delta_0 = \dfrac{1}{4}(1+\omega)^2$, $\varepsilon = 0.1$, $K_1 = 0.1$, $\zeta = 0.01$

图 3 分数阶微分项阶次 p 对过渡曲线的影响

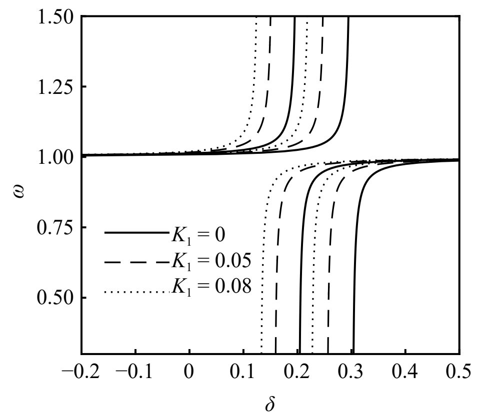
Fig. 3 Effects of the fractional order p on transition curves

发生了明显的左偏移; 但此时等效线性阻尼变化较小, 所以非稳定区域的面积未出现明显收缩. 说明 $p = 0.1$ 时分数阶微分项呈现出较强的刚度特性, 而阻尼特性相对较弱.

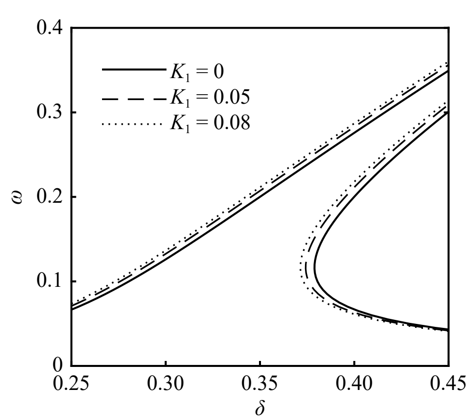
当分数阶微分项阶次 $p = 0.5$ 时, 如图 5(a) 和图 5(b) 显示, 随着分数阶微分项系数 K_1 的逐渐增大, 此时等效线性刚度和等效线性阻尼都在增大, 方程过渡曲线不仅逐渐向左偏移, 同时曲线之间的厚度也在逐渐缩小. 利用式 (36) 观察 $\delta_0 = \dfrac{1}{4}\omega^2$ 时非稳定区厚度随系数 K_1 的变化情况, 从图 5(c) 看出, 随着系数 K_1 的逐渐增大, 方程非稳定区面积在逐渐缩小, 并且当系数 K_1 增大到一定程度, 发生了局部非稳定区域消失的现象. 说明当 $p = 0.5$ 时, 分数阶微



(a) $\delta_0 = \dfrac{1}{4}\omega^2$



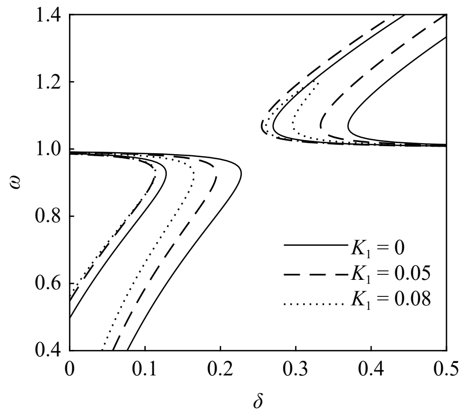
(b) $\delta_0 = \dfrac{1}{4}$



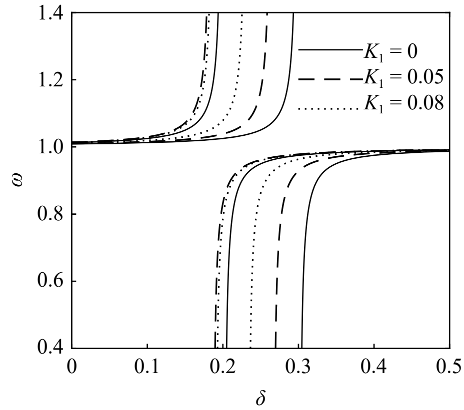
(c) $\delta_0 = \dfrac{1}{4}(1+\omega)^2$

图 4 $p = 0.1$ 时分数阶微分项系数 K_1 对过渡曲线的影响

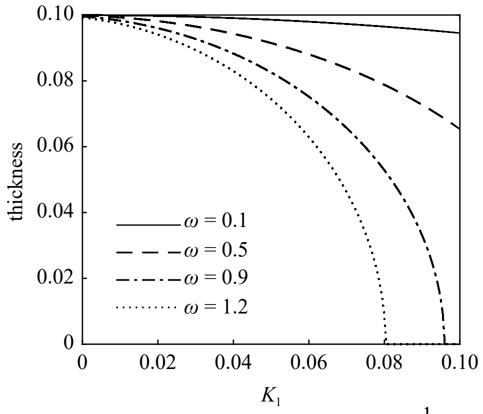
Fig. 4 Effects of the fractional coefficient K_1 on transition curves when $p = 0.1$



(a) $\delta_0 = \frac{1}{4}\omega^2$



(b) $\delta_0 = \frac{1}{4}$

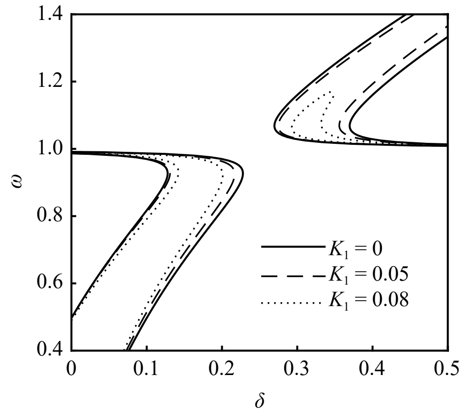


(c) K_1 对非稳定区域大小的影响 ($\delta_0 = \frac{1}{4}\omega^2$)

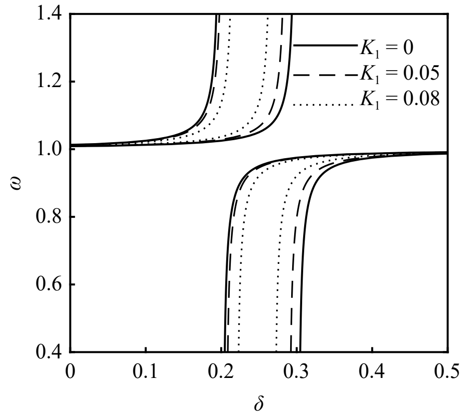
(c) Effectsof K_1 on thickness of unstable region when $\delta_0 = \frac{1}{4}\omega^2$

图 5　$p = 0.5$ 时分数阶微分项系数对过渡曲线的影响

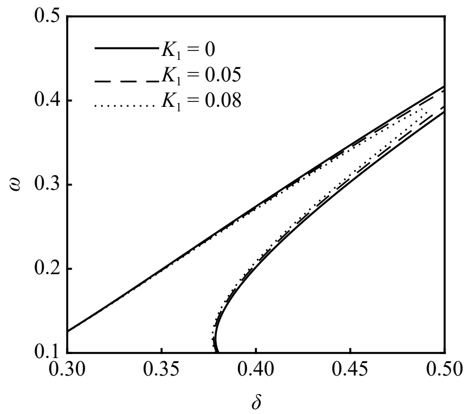
Fig. 5　Effects of the fractional coefficient on transition curves when $p = 0.5$



(a) $\delta_0 = \frac{1}{4}\omega^2$



(b) $\delta_0 = \frac{1}{4}$



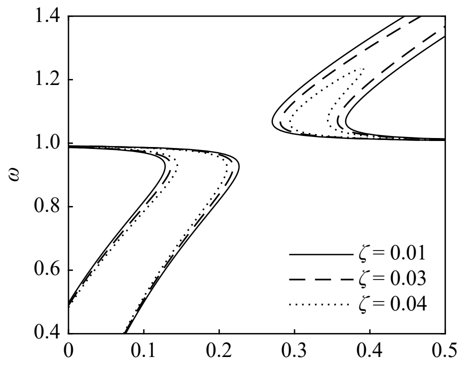
(c) $\delta_0 = \frac{1}{4}(1+\omega)^2$

图 6　$p = 0.9$ 时分数阶微分项系数 K_1 对过渡曲线的影响

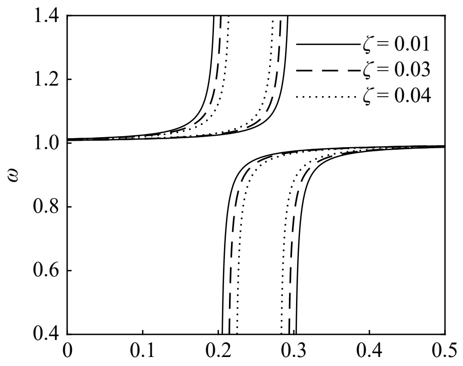
Fig. 6　Effects of the fractional coefficient K_1 on transition curves when $p = 0.9$

分项不仅具有明显的刚度特性还具有明显的阻尼特性.

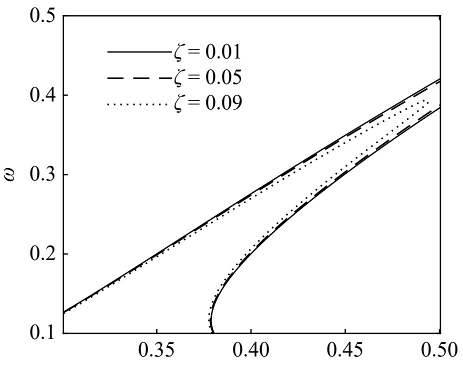
在图 6 中分析 $p = 0.9$ 时不同分数阶微分项系数 K_1 对过渡曲线的影响. 此外, 为了便于比较, 给出了 $p = 0.5, K_1 = 0.001$ 时线性阻尼系数 ζ 对方程过渡曲线的影响情况, 如图 7 所示. 由图 6 和图 7 可知, 随着系数 K_1 和 ζ 逐渐增大, 方程的非稳定区域都发生了明显的收缩, 说明此时分数阶微分项呈现出较强的阻尼特性, 系数 K_1 对系统的作用与线性阻尼系数 ζ 几乎相同.



(a) $\delta_0 = \frac{1}{4}\omega^2$



(b) $\delta_0 = \frac{1}{4}$



(c) $\delta_0 = \frac{1}{4}(1+\omega)^2$

图 7 线性阻尼系数 ζ 对过渡曲线的影响

Fig. 7 The evolutions of the transition curves due to the change of ζ

3 结论

应用摄动法研究了分数阶拟周期 Mathieu 方程,得到了方程在 $\delta-\omega$ 平面内过渡曲线的近似表达式. 借助等效线性刚度和等效线性阻尼概念, 分别分析了不同分数阶微分项系数和阶次对方程过渡曲线的影响. 结果发现, 分数阶微分项同时具有刚度特性和阻尼特性, 选取不同的分数阶微分项阶次和系数可以使其呈现不同程度的刚度特性或阻尼特性, 方程稳定区域的大小和过渡曲线的位置也因此产生了不同程度的变化. 以上结果说明分数阶微分项对拟周期 Mathieu 方程的稳定特性有着重要的影响, 对此类系统的分析和稳定状态参数的选取有着重要的意义.

参 考 文 献

1 Caputo M, Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 1971, 91(1): 134-147

2 Oldham KB, Spanier J. The Fractional Calculus. New York: Academic Press, 1974

3 Podlubny I. Fractional Differential Equations. London: Academic, 1999

4 Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006

5 Petras I. Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. Beijing: Higher Education Press, 2011: 18-19

6 林世敏, 许传炬. 分数阶微分方程的理论和数值方法研究. 计算数学, 2016, 38(1): 1-24 (Lin Shimin, Xu Chuanju. Theoretical and numerical investigation of fractional differential equations. *Mathematica Numerica Sinica*, 2016, 38(1): 1-24 (in Chinese))

7 杨建华, 朱华. 不同周期信号激励下分数阶线性系统的响应特性分析. 物理学报, 2013, 62(2): 374-380 (Yang Jianhua, Zhu Hua. The response property of one kind of factional-order linear system excited by different periodical signals, *Acta Physica Sinica*, 2013, 62 (2): 374-380 (in Chinese))

8 蔡伟, 陈文. 复杂介质中任意阶频率依赖耗散声波的分数阶导数模型. 力学学报, 2016, 48(6): 1265-1280 (Cai Wei, Chen Wen. Fractional derivative modeling of frequency-dependent dissipative mechanism for wave in complex media. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(6): 1265-1280 (in Chinese))

9 李占龙, 孙大刚, 韩斌慧. 基于分数阶导数的黏弹性减振系统时频特性. 应用基础与工程科学学报, 2017, 25(1): 187-198 (Li Zhanlong, Sun Dagang, Han Binhui. Time and frequency features of viscoelastic vibration damping system based on fractional derivative. *Journal of Basic and Science and Engineering*, 2017, 25(1): 187-198 (in Chinese))

10 姜源, 申永军, 温少芳等. 分数阶达芬振子的超谐与亚谐联合共振. 力学学报, 2017, 49(5): 1008-1019 (Jiang Yuan, Shen Yongjun, Wen Shaofang, et al. Super-harmonic and subharmonic simultaneous resonances of fractional-order Duffing oscillator. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(5): 1008-1019 (in Chinese))

11 Shen YJ, Li H, Yang SP, et al. Primary and subharmonic simultaneous resonance of fractional-order Duffing oscillator. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102: 1485-1497

12 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771-776 (Xue Dingyu, Zhao Chunna. Fractional order PID controller design for fractional order system. *Control Theory and Applications*, 2007, 24(5): 771-776 (in Chinese))

13 常宇健, 田沃沃, 金格. 基于分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的非线性分数阶主动控制悬架研究. 燕山大学学报, 2020, 44(6): 575-580 (Chang Yujian, Tian Wowo, Jin Ge. Research on nonlinear fractional active control suspension based on fractional order $PI^{\lambda}D^{\mu}$. *Journal of Yanshan Uni-*

versity, 2020, 44(6): 575-580 (in Chinese))

14 Cao J, Ma C, Xie H, et al. Nonlinear dynamics of duffing system with fractional order damping. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, 5(4): 041012-1-6

15 申永军, 杨绍普, 邢海军. 含分数阶微分的线性单自由度振子的动力学分析. 物理学报, 2012, 61(11): 158-163 (Shen Yongjun, Yang Shaopu, Xing Haijun. Dynamical analysis of linear single degree-of-freedom oscillator with fractional-order derivative. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(11): 158-163 (in Chinese))

16 韦鹏, 申永军, 杨绍普. 分数阶 van der Pol 振子的超谐共振. 物理学报, 2014, 63(1): 47-58 (Wei Peng, Shen Yongjun, Yang Shaopu. Super-harmonic resonance of fractional-order van der Pol oscillator. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(1): 47-58 (in Chinese))

17 王晓娜, 申永军, 张娜. 含分数阶微分项的 van del Pol 振子的动力学分析. 振动与冲击, 2020, 39(20): 91-96 (Wang Xiaona, Shen Yongjun, Zhang Na. Dynamical analysis of a van Del Pol oscillator with fractional-order derivative. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(20): 91-96 (in Chinese))

18 韩东颖, 时培明, 赵东伟. 板带轧机机电传动系统参激非线性扭振鲁棒控制研究. 振动与冲击, 2016, 35(12): 1-6 (Han Dongying, Shi Peiming, Zhao Dongwei. Study on robust control for parametric excitation nonlinear torsional vibration of a strip-rolling mill's mechanical and electrical drive system. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(12): 1-6 (in Chinese))

19 徐梅鹏, 李凌峰, 任双兴等. 多自由度参激系统稳定性分析的数值解法. 计算力学学报, 2020, 37(1): 48-52 (Xu Meipeng, Li Lingfeng, Ren Shuangxing, et al. Numerical method for stability analysis of multiple-degree-of-freedom parametric dynamic systems. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, 37(1): 48-52 (in Chinese))

20 丛戎飞, 叶友达, 赵忠良. 吸气式高超声速飞行器耦合运动数值模拟. https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0313. 2021-09-05 (Cong Rongfei, Ye Youda, Zhao Zhongliang. Numerical simulation of coupling motion of air-breathing hypersonic vehicle. https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0313. 2021-09-05 (in Chinese))

21 Qian CZ, Chen CP, Zhou GW. Nonlinear dynamical analysis for the cable excited with parametric and forced excitation. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014: 183257-1-6

22 黄建亮, 王腾, 陈树辉. 含外激励 van der Pol-Mathieu 方程的非线性动力学特性分析. 力学学报, 2021, 53(2): 496-510 (Huang Jianliang, Wang Teng, Chen Shuhui. Nonlinear dyanamic analysis of a van der Pol-Mathieu equation with external excitation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(2): 496-510 (in Chinese))

23 温少芳. 分数阶参激系统的动力学与控制研究. [博士论文]. 石家庄: 石家庄铁道大学, 2018: 22-37 (Wen Shaofang. Dynamics and control of fractional-order parametrically excited system. [PhD Thesis]. Shijiazhuang: Shijiazhuang Tiedao University, 2018: 22-37 (in Chinese))

24 Kovacic I, Rand R, Mohamed SS. Mathieu's equation and its generalizations: overview of stability charts and their features. *Applied Mechanics Reviews*, 2018, 70: 020802-12-14

25 Galeotti G, Toni P. Nonlinear modeling of a railway pantograph for high speed running. *Transactions on Modelling and Simulation*, 1993, 5: 422-436

26 Huan RH, Zhu WQ, Ma F, et al. The effect of high-frequency parametric excitation on a stochastically driven pantograph-catenary system. *Shock and Vibration*, 2014, 2014: 1-8

27 Rand R, Morrison T. 2∶1∶1 Resonance in the quasiperiodic Mathieu equation. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 40: 195-203

28 Rand R, Kamar G. 2∶2∶1 Resonance in the quasiperiodic Mathieu equation. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31: 367-374

29 Zounes RS, Rand RH. Transition curves in the quasi-periodic Mathieu equation. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 1998, 58(4): 1094-1115

30 Rossikhin YA, Shitikova MV. On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivative for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator. *Mechanics Research Communications*, 2012, 45: 22-27

31 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1973

32 胡海岩. 应用非线性动力学. 北京: 航空工业出版社, 2000: 80-92 (Hu Haiyan. Applied Nonlinear Dynamics. Beijing: Aviation Industry Press, 2000: 80-92 (in Chinese))