

多个椭圆柱波浪力的一种解析解

赵 密, 龙彭振, 王丕光, 张 超, 杜修力

AN ANALYTICAL SOLUTION FOR WAVE PRESSURE ON ARRAYS OF ELLIPTICAL BODIES

Zhao Mi, Long Pengzhen, Wang Piguang, Zhang Chao, and Du Xiuli

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-21-318>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

波浪破碎的一种混合湍流模拟模式

A HYBRID TURBULENCE MODEL FOR WAVE BREAKING SIMULATION

力学学报. 2019, 51(6): 1712-1719

孤立波与淹没平板相互作用的三维波面和水动力实验研究

AN EXPERIMENTAL STUDY OF 3-D WAVE SURFACE AND HYDRODYNAMIC LOADS FOR INTERACTION BETWEEN SOLITARY WAVE AND SUBMERGED HORIZONTAL PLATE

力学学报. 2019, 51(6): 1605-1613

波浪作用下柔性草本植物受力特性研究

WAVE-INDUCED FORCE ON FLEXIBLE MARSH PLANTS

力学学报. 2021, 53(4): 1018-1027

寒区非圆形隧道冻胀力的解析解

ANALYTICAL SOLUTION OF FROST HEAVING FORCE IN NON-CIRCULAR COLD REGION TUNNELS

力学学报. 2020, 52(1): 196-207

土-结构动力相互作用分析中基于人工边界子结构的地震波动输入方法

The seismic wave input method for soil-structure dynamic interaction analysis based on the substructure of artificial boundaries

力学学报. 2018, 50(1): 32-43

激波/湍流边界层干扰压力脉动特性数值研究

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF PRESSURE FLUCTUATION IN SHOCK WAVE AND TURBULENT BOUNDARY LAYER INTERACTION

力学学报. 2021, 53(7): 1829-1841



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

多个椭圆柱波浪力的一种解析解¹⁾赵 密* 龙彭振* 王丕光^{*,2)} 张 超[†] 杜修力*

* (北京工业大学城建学部建筑工程学院, 北京 100124)

† (福州大学土木工程学院, 福州 350116)

摘要 波浪在大尺寸结构表面产生不可忽略的散射波, 该散射波在多柱体体系中继续传播, 并在同体系中的其他柱体上产生高次散射波. 本文基于椭圆坐标系和绕射波理论首先推导了波浪作用下椭圆单柱体产生的散射波压力公式, 随后考虑该散射波在多柱体系中的传播, 将其视为第二次入射波, 推导出柱体上第二次散射波压力公式, 同理可以推导出高次散射波压力公式, 最后得到椭圆多柱体波浪力解析解, 并用数值解验证了本文解析方法的正确性. 本文以双柱体和四柱体体系为例, 分析了不同参数 (波数、净距、波浪入射角度等) 下, 高次散射波对柱体上波浪作用的影响. 结果表明: 波数较大的情况下, 高次散射波引起柱体上的波浪力不能忽略; 结构间距较大的情况下, 虽然高次波的作用有减小的趋势但仍然明显; 高次散射波来自多个柱体对入射波的散射, 柱体数目的增加后, 高次波的影响会增加, 结构所受的高次波作用因参数变化而起的波动会变剧烈; 高次波对上游柱体波浪力的贡献较对下游柱体的贡献大.

关键词 椭圆柱阵列, 波浪力, 多次散射波, 多柱体相互作用

中图分类号: TU311.3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-318

AN ANALYTICAL SOLUTION FOR WAVE PRESSURE ON ARRAYS OF ELLIPTICAL BODIES¹⁾Zhao Mi* Long Pengzhen* Wang Piguang^{*,2)} Zhang Chao[†] Du Xiuli*

* (College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Faculty of Architecture, Civil and Transportation Engineering, Beijing 100124, China)

† (College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China)

Abstract In an array of elliptical cylinders, upon impinging on large structure, linear incident waves are scattered by bodies; the scattered waves due to linear incident waves subsequently impinge other bodies; the higher-order scattered waves are generated in the same manner as the multiple scattering problem exists. Based on the diffraction theory and elliptic cylindrical coordinates, the analytical solution for the incident and the scattered waves, say the first-order scattered wave, on an isolated elliptical body is formulated firstly; then, with the first-order scattered wave from other bodies as the excitation source, the analytical solution for second-order scattered waves is developed; Analogously, the analytical solution for higher-order scattered waves is obtained; finally, the total wave pressure on a body in an array is obtained in a form of a sum of the incident wave pressure, the first-order scattered wave pressure due to the linear incident wave and the scattered wave pressure considering multiple scattering waves. The present method is validated by

2021-07-01 收稿, 2021-09-30 录用, 2021-10-01 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (52078010, 51421005).

2) 王丕光, 教授, 主要研究方向: 近海工程结构抗震及防灾减灾. E-mail: wangpiguang1985@126.com

引用格式: 赵密, 龙彭振, 王丕光, 张超, 杜修力. 多个椭圆柱波浪力的一种解析解. 力学学报, 2021, 53(11): 3157-3167

Zhao Mi, Long Pengzhen, Wang Piguang, Zhang Chao, Du Xiuli. An analytical solution for wave pressure on arrays of elliptical bodies. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(11): 3157-3167

a FEM and is applied to two cases in which multiple scattering problem on bodies with different parameters (wave number, separation, wave propagation direction, etc.) is discussed. It can be seen from the results that the effect of high-order scattered wave matters as the wave number is large; multiple scattering problem is reducing but still exists as the distance between bodies increasing; As the quantity of bodies growing, the multiple scattering problem is increasing and its impact is drastically undulant; the effect of high-order scattered wave on the leading structures is larger than that on the one in the downstream.

Key words elliptical bodies array, wave force, multiple scattering wave, interaction of multiple bodies

引言

近年来,中国的近海工程迅猛增加,如人工岛,跨海桥梁等,对近海结构的研究日益受到人们的重视.由于上述工程常年遭受波浪的威胁,其支撑结构可能承受着强度相当大的波浪力,而支撑结构广泛使用了多柱体,柱体截面形式不再局限于圆形,因此对非圆多柱体体系中波浪力的研究可为实际工程提供一定的理论指导.

近海工程中对波浪力的研究根据结构尺寸,可以划分为对小尺度结构所受波浪力的研究和对大尺度结构所受波浪力的研究.其中小尺度结构上的波浪力可以通过莫里森方程求解^[1];当结构截面尺寸与波长之比大于 0.2 时,大尺寸结构阻碍了波浪运动,波浪在结构表面生成不可忽略的散射波,因此波浪力的计算需要考虑波浪散射现象^[2-3]. MacCamy 和 Fuchs^[4]提出了绕射波浪理论来计算有限水域中大尺寸圆柱线性波浪力.当波陡大时,波浪中的非线性成分增多,用线性波浪理论计算的结果误差增大,国内外学者就此提出了解决波浪二阶作用的方法^[5-6]. Tao 等^[7]和 Song 等^[8]利用比例边界元法(SBFEM)分析短峰波在圆柱上绕射以及多个任意截面形状柱体和线性波浪相互作用,比例边界元对于解决波浪在柱面绕射问题较高的求解效率. Wang 等^[9]利用有限元方法,解决了倾斜圆柱的波浪绕射问题.流场中只存在单个结构的情形很少,大多数情况下近海结构的承重构件由多柱体构成. Linton 和 Evans^[10]提出了计算多个圆柱附近波浪速度势的简化公式. Kagemoto 和 Yue^[11]提出了一种精确代数方法来分析水波中多个三维物体之间的相互作用问题. Chen 等^[12]利用 Null-Field 积分方程来解决波浪在多直立圆柱体中散射问题,以免带来用格林函数分析产生的不规则频率问题. 缪国平等^[13]假设柱体表面有若干波动源,就 100 根以上的单排圆柱体系在

波浪中的响应进行了研究,得到了多柱体对流体干扰的特点. Wang 等^[14]将流场分为结构附近的有限域和无限域,用椭圆吸收边界模拟无限域,最后利用有限元方法求出波浪对群桩的影响,该方法可应用到任意光滑截面的多柱体上.

实际工程中同样存在非圆形截面柱体,如椭圆形和类椭圆等. Chen 和 Mei^[15]基于椭圆柱坐标系引入 Mathieu 函数,将椭圆形固定平台表面的波浪力分解为角向分量和径向分量,分析了结构表面绕射问题,并得到相应解. William^[16]简化了文献[15]中复杂级数展开,并得到两种近似方法,第一种适用于小曲率椭圆截面柱体,另一种利用格林函数获得了柱体表面的流体速度势. Liu 等^[17-18]利用线性绕射理论和傅里叶展开,推导了任意光滑截面的铅直柱体和截断柱体表面波浪力. Zhang 和 Williams^[19]研究了水平刚性椭圆形薄板对入射波浪的绕射效应. Bhatta^[20]推导了椭圆截面桩和圆形截面桩的波浪力计算公式,并实现了前者到后者的变换. Wang 等^[21-22]首先提出针对单根椭圆柱上地震引起的动水力的解析解,再利用有限元方法改进该发法为适用于工程的附加质量矩阵方法,并且针对短峰波浪下的椭圆柱,推导得到波浪力的解析表达式,比较短峰波和一般线性波下椭圆柱周围的波爬.

对于多个非圆形截面柱体阵列结构, Chatjigeorgiou 等^[23-25]利用 Bessel 函数和 Mathieu 函数的加法定理,依次研究了流体中椭圆截面群桩波浪散射问题,椭圆柱和圆柱间的波浪散射问题和截断椭圆群桩上的波浪散射问题. Lee^[26]则应用 Collocation Multipole 方法来解决椭圆截面多柱体间散射问题,免除了 Mathieu 函数加法定理的繁复. Liu 等^[27]利用傅里叶级数将径向函数展开,以求解任意光滑截面群桩(如余弦形截面、类椭圆截面等)上的波浪力.

上述多个柱体波浪力解析分析方法中,多数考虑了入射波及入射波引起的单柱体散射波,但没有

考虑该散射波入射其他柱体后产生的第二次散射波以及高次散射波^[25]. 本文基于椭圆坐标系和绕射波理论等, 推导得到考虑高次散射波的椭圆多柱体波浪力公式, 研究波数等参数变化时高次波对总波浪力的贡献, 以期为实际工程中估算波浪力提供参考数据.

1 问题描述

1.1 控制方法和边界条件

流场中椭圆形截面柱体的阵列如图 1 所示. 假设所有柱体刚性, a 为椭圆的半长轴, b 为椭圆的半短轴, 底端固定在深度为 h 的流体中, 流体无旋、无黏性并且不可压缩. 该多柱体系受到与 x 轴成 α , 频率为 ω , 幅值为 $H/2$ 的简谐波浪作用.

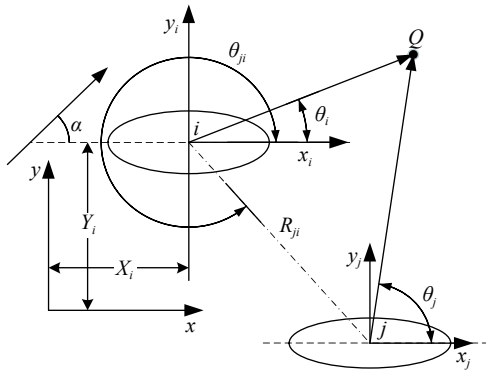


图 1 柱体布置和坐标系统

Fig. 1 Arrangement of bodies and coordinates systems

本文使用的椭圆柱坐标系 (ξ, μ, z) 中, ξ 和 μ 分别为椭圆柱坐标系的径向坐标和角向坐标, 两坐标互相正交; 坐标原点位于椭圆柱底部, z 轴沿柱体轴线向上. 椭圆坐标系和笛卡尔直角坐标系转换关系如下

$$\left. \begin{aligned} x &= \mu \cosh \xi \cos \eta \\ y &= \mu \sinh \xi \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $\mu^2 = a^2 - b^2$; ξ, μ 和 z 取值范围分别为 $0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \mu < 2\pi$ 和 $0 \leq z \leq h$.

简谐波浪下流场中波浪压力为

$$p^e = p e^{-i\omega t} \quad (2)$$

椭圆柱坐标系中, 频域下的波浪压力 p 满足如下流体控制方程

$$\frac{2}{\mu^2 [\cosh(2\xi) - \cos(2\eta)]} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

水体自由表面、刚性地面、水体与结构交界面和无穷远处的边界条件分别为

$$-\frac{\omega^2}{g} p + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Big|_{z=h} \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (6)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \sqrt{\mu \cosh \xi} \left(\frac{1}{\mu \sinh \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} - ikp \right) = 0 \quad (7)$$

式中, 波数 k 满足 $\omega^2 = gk \tanh(kh)$; ξ_0 为柱体表面在柱体局部坐标系中的径向坐标.

1.2 波场分解

根据绕射波浪理论^[4]: 当波浪入射后, 波浪会在大尺寸结构物表面产生散射波, 入射波场和散射波场叠加后, 形成的新的波场. 波浪入射后, 多柱体阵列中柱体周围的波场不同于单柱体周围的波场, 多柱体阵列中柱体上的波浪作用需要考虑入射波和散射波, 其中散射波还需考虑其在柱间多次绕射, 柱体上总的波浪力可以写为

$$p = p^{In} + p^{Sc} \quad (8)$$

式中, p^{Sc} 不仅考虑了入射波浪在该柱体上引起的散射波, 而且考虑了阵列中其他柱产生散射波、该散射波引起的高次散射波, 因此 p^{Sc} 可以写为

$$p^{Sc} = p^{S,(1)} + \sum_{q=2}^{\infty} (p^{I,(q-1)} + p^{S,(q)}) \quad (9)$$

对式 (3) 应用分离变量法, $p(\xi, \eta, z)$ 可以写为

$$p(\xi, \eta, z) = Z(z) P(\xi, \eta) \quad (10)$$

$$Z(z) = \frac{\rho g H \cosh(kz)}{2 \cosh(kh)} \quad (11)$$

因此柱体总的波浪力可以写为

$$p = Z(z) (P^{In} + P^{Sc}) \quad (12)$$

$$P^{Sc} = P^{S,(1)} + \sum_{q=2}^{\infty} (P^{I,(q-1)} + P^{S,(q)}) \quad (13)$$

1.3 入射波浪压力

如图 1 所示, 流场中任意一点 Q 的入射波浪压力可以表达为

$$P_i^{In} = e^{ik[(X_i+x_i)\cos\alpha+(Y_i+y_i)\sin\alpha]} \quad (14)$$

式中 X_i 和 Y_i 是 i 号局部坐标系原点在整体坐标系中的坐标, x_i 和 y_i 是 Q 点在 i 号局部坐标系中的坐标.

本文采用 Abramowitz 和 Stegun^[28] 提出的符号记法, 因此在椭圆柱坐标系下, 入射波浪压力可以表示为^[25]

$$P_i^{In}(\xi_i, \eta_i) = 2\Lambda_i \left[\sum_{m=0}^{\infty} i^m M c_m^{(1)}(\xi_i, q_i) c e_m(\eta_i, q_i) c e_m(\alpha, q_i) + \sum_{m=1}^{\infty} i^m M s_m^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_m(\eta_i, q_i) s e_m(\alpha, q_i) \right] \quad (15)$$

式中, $\Lambda_i = e^{ik(X_i \cos\alpha + Y_i \sin\alpha)}$, $q_i = (a_i^2 - b_i^2)k^2/4$. $M c_m^{(1)}$ 和 $M s_m^{(1)}$ 是第一类变形径向马蒂厄函数, $c e_m$ 和 $s e_m$ 是角向马蒂厄函数.

2 散射波浪压力求解

2.1 散射波浪压力

波浪入射到 i 号柱体后, 产生的第一次散射波满足式 (3)~式 (5) 和式 (7), 其一般表达式可以写为

$$P_i^{S,(1)}(\xi_i, \eta_i) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{i,m}^{S,(1)} M c_m^{(3)}(\xi_i, q_i) c e_m(\eta_i, q_i) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{i,m}^{S,(1)} M s_m^{(3)}(\xi_i, q_i) s e_m(\eta_i, q_i) \quad (16)$$

式中 $C_{i,m}^{S,(1)}$ 和 $D_{i,m}^{S,(1)}$ 是待定系数, $M c_m^{(3)}$ 和 $M s_m^{(3)}$ 是第三类变形径向马蒂厄函数.

将式 (15) 和式 (16) 代入式 (6), 求得

$$\left. \begin{aligned} C_{i,m}^{S,(1)} &= -\Lambda_i \frac{2i^m \dot{M} c_m^{(1)}(\xi_{i0}, q_i) c e_m(\alpha, q_i)}{\dot{M} c_m^{(3)}(\xi_{i0}, q_i)} \\ D_{i,m}^{S,(1)} &= -\Lambda_i \frac{2i^m \dot{M} s_m^{(1)}(\xi_{i0}, q_k) s e_m(\alpha, q_i)}{\dot{M} s_m^{(3)}(\xi_{i0}, q_i)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 $\dot{M} c_m^{(1)}$ 和 $\dot{M} s_m^{(1)}$, $\dot{M} c_m^{(3)}$ 和 $\dot{M} s_m^{(3)}$ 分别为相应径向马蒂厄函数对径向坐标的一阶导函数.

同一个流场中的其他柱产生的第一次散射波也会入射到 i 号柱体上, 表示为 $P_i^{L,(1)}$ 所有柱产

生的散射波再入射到 i 柱后, 波浪压力可以写为

$$P_i^{L,(1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_i^{L,(1)} \text{ due to } P_j^{S,(1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\sum_{m=0}^{\infty} C_{j,m}^{S,(1)} M c_m^{(3)}(\xi_j, q_j) c e_m(\eta_j, q_j) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{j,m}^{S,(1)} M s_m^{(3)}(\xi_j, q_j) s e_m(\eta_j, q_j) \right] \quad (18)$$

根据马蒂厄函数的加法定理^[29-30], 将式 (18) 中 j 号局部坐标 (ξ_j, η_j) 变换到 i 号局部坐标系 (ξ_i, η_i) 下, 如下所示. 马蒂厄函数的加法定理详见附录 1

$$P_i^{L,(1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=0}^{\infty} C_{j,m}^{S,(1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n,m}^{(3),ji} M c_n^{(1)}(\xi_i, q_i) c e_n(\eta_i, q_i) - i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{-n} Q_{-n,m}^{(3),ji} M s_n^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_n(\eta_i, q_i) \right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=1}^{\infty} D_{j,m}^{S,(1)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-n} Q_{-n,-m}^{(3),ji} M s_n^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_n(\eta_i, q_i) + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m Q_{n,-m}^{(3),ji} M c_n^{(1)}(u_i, q_i) c e_n(\eta_i, q_i) \right] \quad (19)$$

2.2 高次散射波浪压力

多柱体阵列中低次散射波在柱间传播, 并在柱体表面产生高次散射波. 其他柱产生的 $q-1$ 次散射波使 i 号柱体产生第 q 次散射波, i 号柱体 q 次散射波浪力可以表示为

$$P_i^{S,(q)}(\xi_i, \eta_i) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{i,m}^{S,(q)} M c_m^{(3)}(\xi_i, q_i) c e_m(\eta_i, q_i) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{i,m}^{S,(q)} M s_m^{(3)}(\xi_i, q_i) s e_m(\eta_i, q_i) \quad (20)$$

如式 (18), 流场中其他柱产生的 $q-1$ 次散射波传播到 i 号柱体上产生的波浪压力可以写为

$$P_i^{L,(q)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N P_i^{L,(q)} \text{ due to } P_j^{S,(q-1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\sum_{m=0}^{\infty} C_{j,m}^{S,(q-1)} M c_m^{(3)}(\xi_j, q_j) c e_m(\eta_j, q_j) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{j,m}^{S,(q-1)} M s_m^{(3)}(\xi_j, q_j) s e_m(\eta_j, q_j) \right] \quad (21)$$

将式 (21) 转换坐标到 i 柱局部坐标系下为

$$P_i^{L,(q)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=0}^{\infty} C_{j,m}^{S,(q-1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n,m}^{(3),ji} M c_n^{(1)}(\xi_i, q_i) c e_n(\eta_i, q_i) - i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{-n} Q_{-n,m}^{(3),ji} M s_n^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_n(\eta_i, q_i) \right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{m=1}^{\infty} D_{j,m}^{S,(q-1)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-n} Q_{-n,-m}^{(3),ji} M s_n^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_n(\eta_i, q_i) + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m Q_{n,-m}^{(3),ji} M c_n^{(1)}(\xi_i, q_i) c e_n(\eta_i, q_i) \right] \quad (22)$$

为求式 (20) 中的待定系数, 将式 (20) 和式 (22) 代入式 (6), 得到待定系数 $C_{i,m}^{S,(q)}$ 和 $D_{i,m}^{S,(q)}$ 如下

$$\left. \begin{aligned} C_{i,m}^{S,(q)} &= - \frac{\dot{M} c_m^{(1)}(\xi_{i0}, q_i)}{\dot{M} c_m^{(3)}(\xi_{i0}, q_i)} \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{j,n}^{S,(q-1)} Q_{m,n}^{(3),ji} + i \sum_{n=1}^{\infty} D_{j,n}^{S,(q-1)} (-1)^n Q_{m,-n}^{(3),ji} \right] \\ D_{i,m}^{S,(q)} &= - \frac{\dot{M} s_m^{(1)}(\xi_{i0}, q_i)}{\dot{M} s_m^{(3)}(\xi_{i0}, q_i)} \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\sum_{n=1}^{\infty} D_{j,n}^{S,(q-1)} (-1)^{n-m} Q_{-m,-n}^{(3),ji} - i \sum_{n=0}^{\infty} C_{j,n}^{S,(q-1)} (-1)^{-m} Q_{-m,n}^{(3),ji} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

2.3 总波浪力

多柱体体系中, i 号柱体上总的波浪压力可以写为

$$p_i = Z(z) P_i \quad (24)$$

$$P_i = P_i^{Ln} + P_i^{S,(1)} + \sum_{q=2}^{\infty} (P_i^{L,(q-1)} + P_i^{S,(q)}) \quad (25)$$

i 号柱体所受的总波浪力可以表示为

$$F_i = \sqrt{(F_i^y)^2 + (F_i^x)^2} \quad (26)$$

$$F_i^x = - \int_0^h \int_0^{2\pi} p_i b_i \cos \eta_i d\eta_i dz \quad (27)$$

$$F_i^y = - \int_0^h \int_0^{2\pi} p_i a_i \sin \eta_i d\eta_i dz \quad (28)$$

3 数值算例

3.1 方法验证

首先, 由于本方法在计算求解时会式 (25) 中高次散射波的累加进行截断, 而截断会引入一定的截断误差, 所以先讨论该截断误差对计算结果的影响; 其次, 通过 Wang 等^[14] 提出的波浪压力数值解验证本文提出的椭圆形截面柱体波浪压力的解析解. 四柱体阵列如图 2 所示, 图 2 中 D 为柱体间净距, 定义其与椭圆长轴的比值 $D_r = 1.0$, 4 个椭圆柱体具有相同的尺寸, 长轴和短轴比值 $a/b = 1.5$. 图 3 给出了图 2 布置下不同截断数 q 时, F_i^x 随波数 ka 变化的曲线, 可以看出当 $q > 12$ 时本方法获得波浪力计算结果基本稳定, 因此为使解析解求解高效且准确, 后续计算采用 $q = 15$ 为高次散射波的截断数. 图 4 为

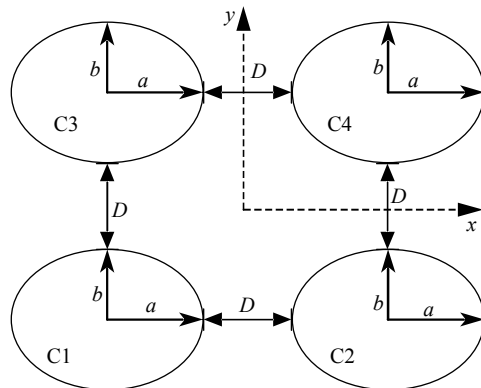


图 2 四柱体阵列图

Fig. 2 Sketch of four bodies arranged in a square form.

$ka = 1$ 时, 本文解析方法和数值方法得到的柱体上波浪压力, 图 5 为 $D_r = 1$ 时, 本文解析方法和数值方法得到的柱体上波浪力, 假设波浪以两个入射角 α 入射; 图 6 为 $ka = 1$ 时, 本文解析方法和数值方法得到的流场波浪压力云图, 图 7 为解析方法与数值方法计算得到的 C1 和 C2 柱上波浪压力的相对误差; 可以看出本文解和椭圆数值解相对误差较小, 各图中本文解结果和数值解结果吻合良好。

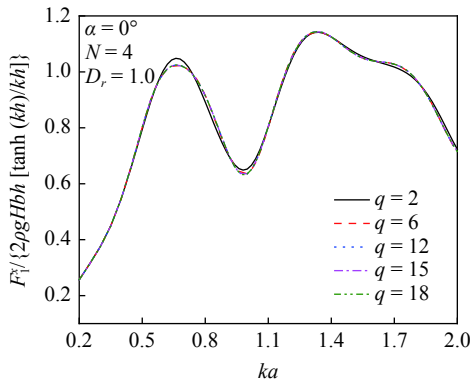
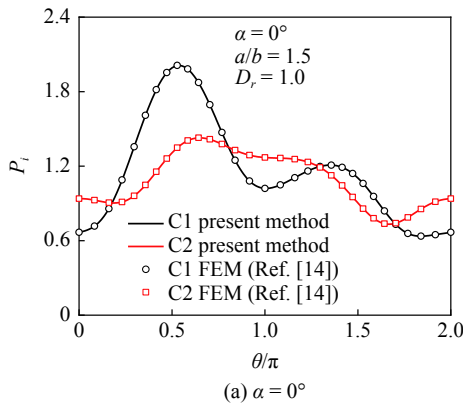
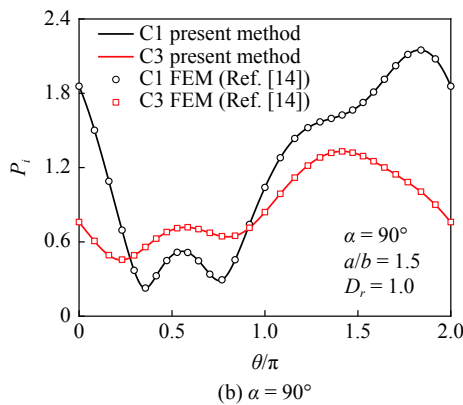


图 3 截断误差对本文解计算结果的影响

Fig. 3 Impacts of truncation error on the present method

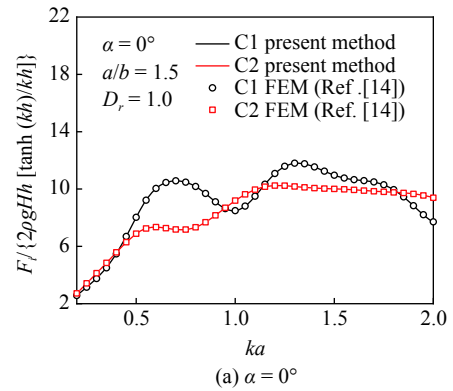


(a) $\alpha = 0^\circ$

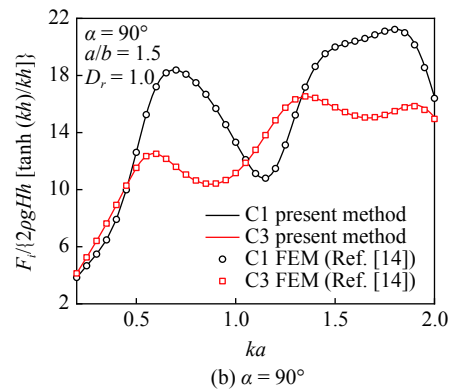


(b) $\alpha = 90^\circ$

图 4 不同入射角 ($\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$) 下数值解^[14]与本文解的对比
Fig. 4 The wave pressures on bodies P_i versus θ with $N = 4$ and $ka = 1$ obtained present method by and the FEM^[14]

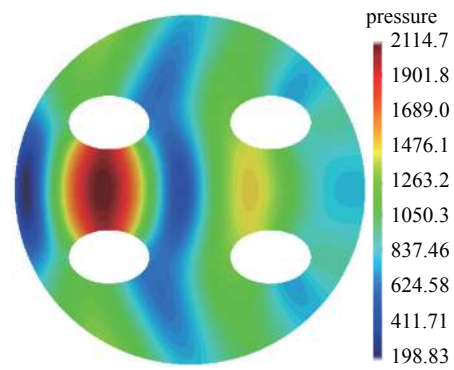


(a) $\alpha = 0^\circ$

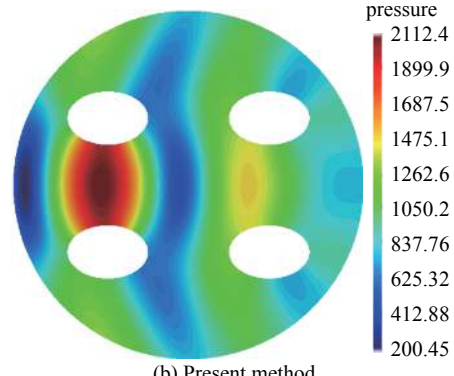


(b) $\alpha = 90^\circ$

图 5 不同入射角 ($\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$) 下数值解^[14]与本文解的对比
Fig. 5 The wave forces on bodies F_i versus ka with $N = 4$ obtained by the present method and FEM^[14]



(a) FEM



(b) Present method

图 6 入射角 $\alpha = 0^\circ$ 时数值解^[14]与本文解云图
Fig. 6 The wave fields with $N = 4$, $\alpha = 0^\circ$ and $ka = 1$ obtained by the FEM^[14] and present method

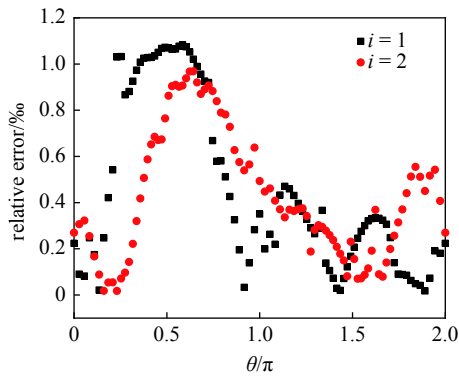


图 7 入射角 $\alpha = 0^\circ$ 时数值解与本文解的相对误差

Fig. 7 The relative error of the wave pressure between the present method and the FEM with $N = 4$, $\alpha = 0^\circ$ and $ka = 1$

3.2 方法应用

本节将讨论高次波的影响, 根据柱体排列设置了两种柱体阵列: ①双柱 (图 8)、②四柱 (图 2). 所示各工况中柱体截面尺寸相同, 长轴和短轴之比 $a/b = 1.5$. $q = 2$ 代表的曲线是不考虑高次散射波的解析解, $q = 15$ 代表的曲线是考虑高次散射波的解析解. 从图 9 可以观察到, 单柱情况下的波浪力和多柱情况下的波浪力是不同的, 该现象随着柱数的增加而显著, 且和椭圆长轴与水流方向的夹角有关.

图 10 给出了双柱阵列中, 高次散射波对柱体上波浪作用影响的结果. 图中纵坐标为波浪力比值 $F_i^{q=15}/F_i^{q=2}$, $F_i^{q=15}$ 表示各柱体上考虑高次散射波的总波浪力, $F_i^{q=2}$ 表示各柱体上不考虑高次散射波的总波浪力. 图中给出了 3 种波浪入射角度下 (0° , 45° 和 90°), ka 取值在 0.2~2.0 之间的结果. 图 9(a) 中, 因为阵列沿 x 轴对称所以 C1 和 C2 上的波浪力比值相等, 高次波的影响不明显; 从图 10(a) 和图 10(b) 中可以看出, 当 ka 小于 0.5 时, 高次波对两柱体的影响可以忽略, 当 ka 大于 0.5 后, 高次波的影响增大到

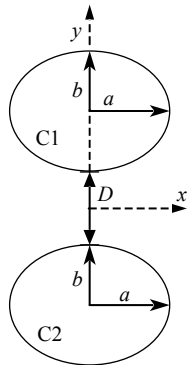
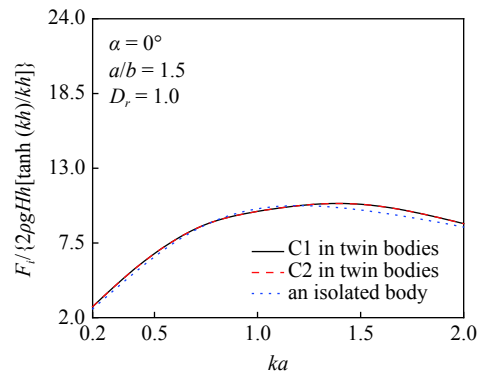
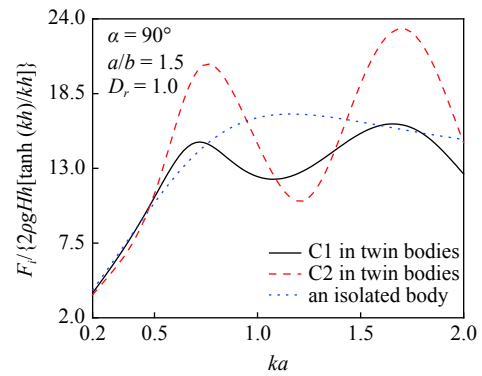


图 8 双柱体阵列图

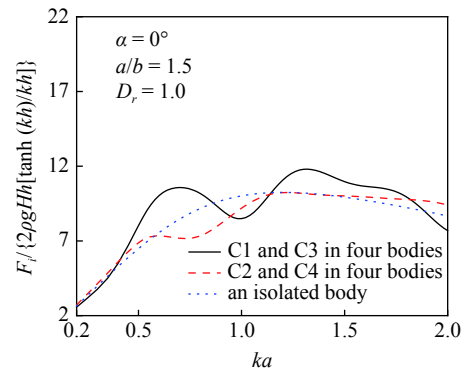
Fig. 8 Sketch of arrangement of twin bodies standing side by side



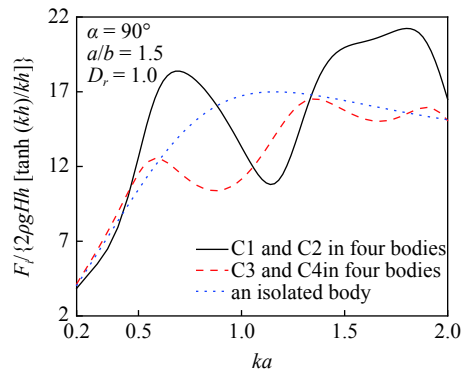
(a) $\alpha = 0^\circ$



(b) $\alpha = 90^\circ$



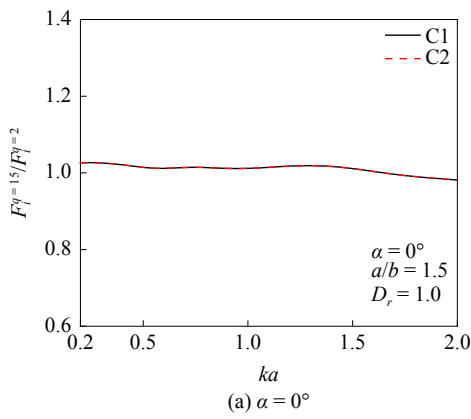
(c) $\alpha = 0^\circ$



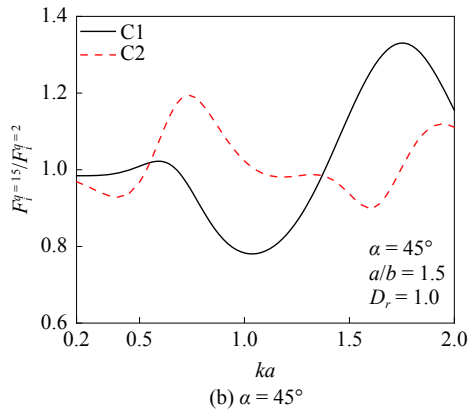
(d) $\alpha = 90^\circ$

图 9 不同入射角 ($\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$) 下两种阵列的本文解与单柱解的对比

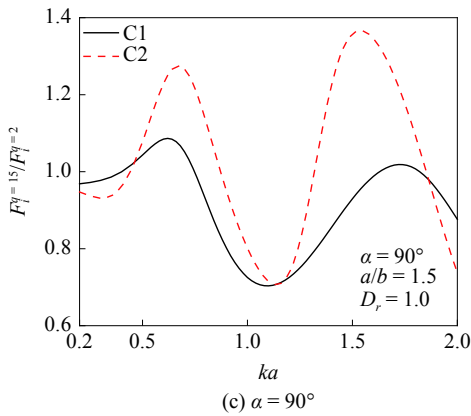
Fig. 9 The wave forces on bodies F_i versus ka with $N = 2$ and 4 compared with that of an isolated body



(a) $\alpha = 0^\circ$

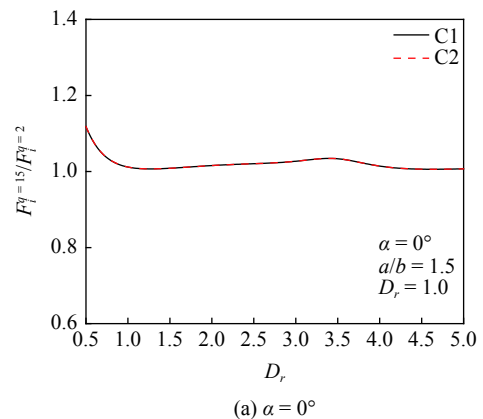


(b) $\alpha = 45^\circ$

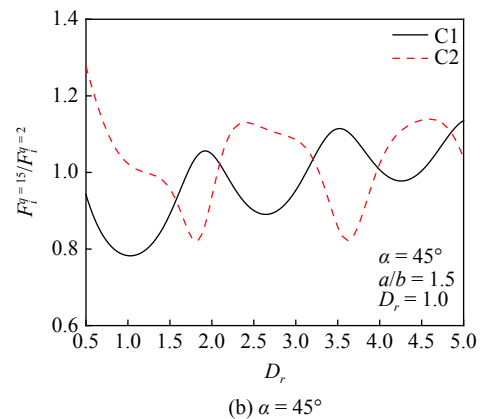


(c) $\alpha = 90^\circ$

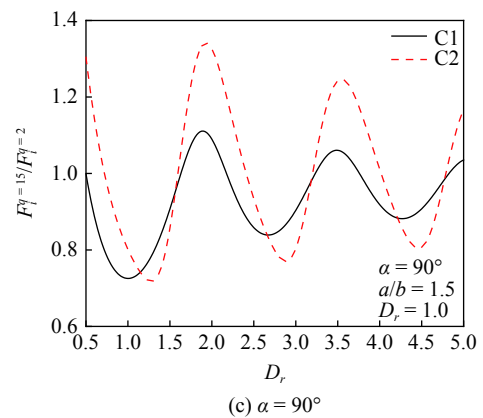
图 10 双柱阵列中各柱体总受力比值 $F_i^{q=15}/F_i^{q=2}$ on bodies versus ka as twin bodies standing side by side



(a) $\alpha = 0^\circ$



(b) $\alpha = 45^\circ$



(c) $\alpha = 90^\circ$

图 11 双柱阵列中各柱体总受力比值 $F_i^{q=15}/F_i^{q=2}$ on bodies versus D_r as twin bodies standing side by side

不可忽略. 图 11 给出了 $ka = 1$ 时 D_r 取值在 0.5~5.0 之间的结果. 图 11(b) 和图 11(c) 表明 D_r 大于 2 后, 二柱阵列的柱体受高次波的影响才会趋于减少, 但即使净距为柱体长轴两倍以上, 高次波的影响仍然明显; 图 11(c) 中, C1 受到上游柱体 C2 的保护, C1 受到高次波的影响比 C2 小.

图 12 给出了四柱阵列中, 高次散射波对柱体上波浪作用影响的结果. 由于对称性, 波浪沿 x 轴入射时 ($\alpha = 0^\circ$), C1 和 C3 计算结果相同, C2 和 C4 计算

结果相同; 同理, 波浪沿 y 轴入射时 ($\alpha = 90^\circ$), C1 和 C2 计算结果相同, C3 和 C4 计算结果相同. 比较两个入射波浪方向不同的结果, 可以发现因为柱体在 x 轴上的投影面积大于柱体在 y 轴上的投影面积, 所以波浪沿 y 轴入射时高次波对柱体所受波浪力的影响更大. 图 13 给出了 $ka = 1$ 时 D_r 取值在 0.5~5.0 之间的结果. 四柱阵列的下游柱体波浪力比值在 $0.5 < D_r < 1.0$ 间大于上游柱体的比值, 在 $D_r > 2.0$ 之后才小于上游柱体的比值并趋于减小.

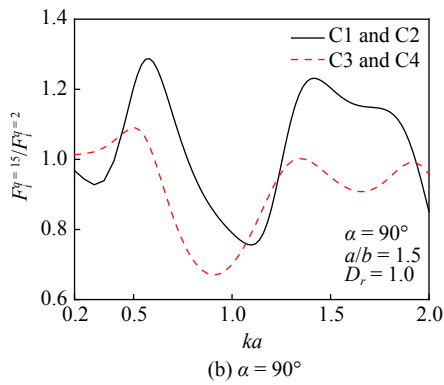
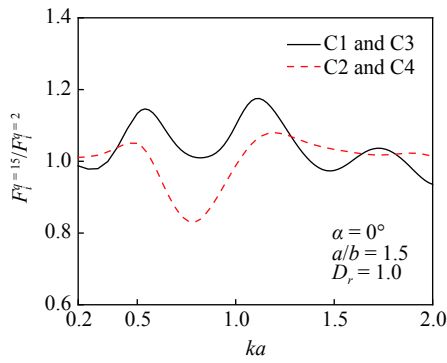


图 12 四柱阵列中各柱体总受力比值

Fig. 12 Scaling values of total wave force $F_i^{q=15}/F_i^{q=2}$ on bodies versus ka as four bodies arranged in a square form

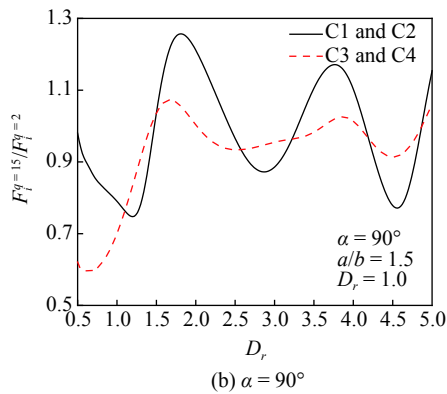
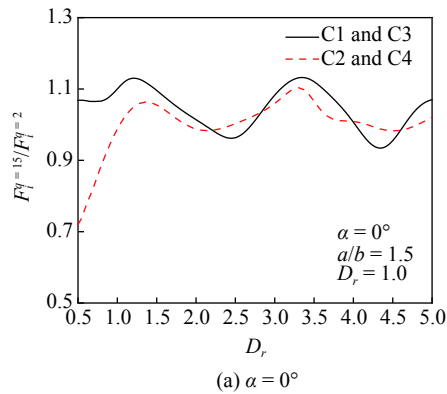


图 13 四柱阵列中各柱体总受力比值

Fig. 13 Scaling values of total wave force $F_i^{q=15}/F_i^{q=2}$ on bodies versus D_r as four bodies arranged in a square form

图 14 和图 15 给出了柱体数量不同的情况下, C1 上波浪力比值随参数 (ka, D_r) 的变化. 综合来看, 随 ka 和 D_r 增加, 四柱阵列中 C1 波浪力比值变化, 比双柱阵列情况下的比值变化要剧烈; 随着柱体数量的增多, 由于叠加效应, 高次波影响也随之增加.

表 1 对比了本文解和参考解^[14] 在 $ka = 1$ 时, 不同柱数, 不同柱间距时波浪力计算效率. 因为有限元

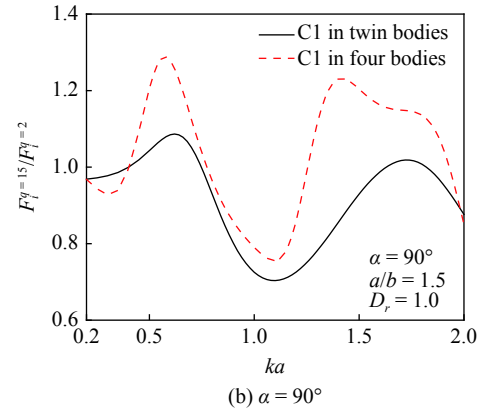
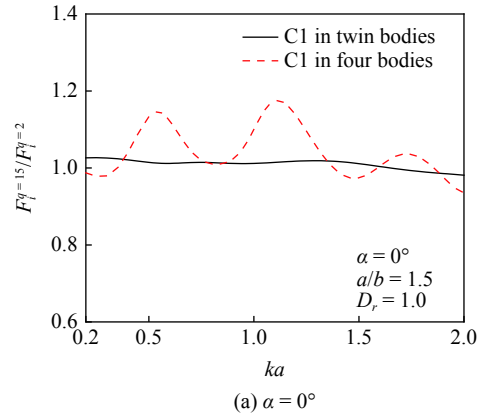


图 14 两种阵列中 C1 柱体总受力比值

Fig. 14 Scaling values $F_1^{q=15}/F_1^{q=2}$ of C1 versus ka in two arrangements

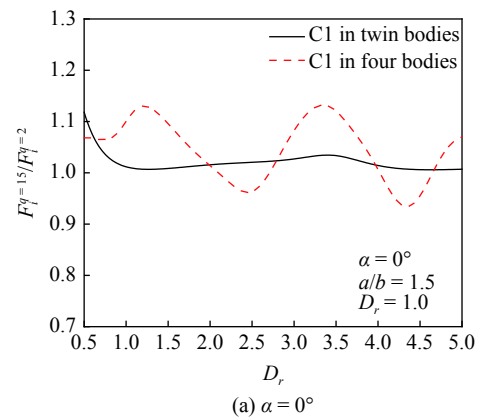


图 15 两种阵列中 C1 柱体总受力比值

Fig. 15 Scaling values $F_1^{q=15}/F_1^{q=2}$ of C1 versus D_r in two arrangements

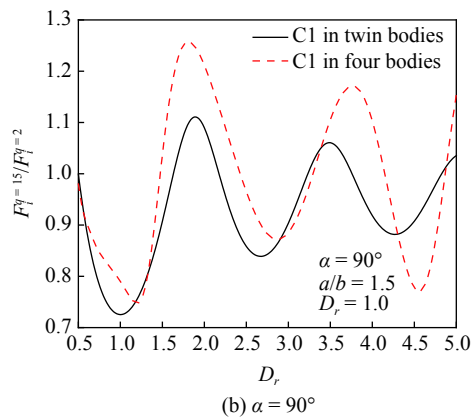


图 15 两种阵列中 C1 柱体总受力比值(续)

Fig. 15 Scaling values $F_1^{q=15}/F_1^{q=2}$ of C1 versus D_r in two arrangements (continued)

表 1 计算波浪力的用时 (s)

Table 1 The numerical costs for calculating the total wave forces (s)

N	Method	$D_r = 0.5$	$D_r = 1.0$
2	analytical	9.51	8.87
	FEM	2.94	10.54
4	analytical	52.95	48.61
	FEM	9.69	94.18

方法计算耗时和网格单元划分大小以及网格数目成正比, 所以当柱数增加或者柱间距增加后, 用来模拟水域的单元也随之增多, 所以本文解比参考解效率高。

4 结论

根据绕射波理论等, 基于椭圆柱坐标系, 首先通过求解马蒂厄方程, 得到椭圆单柱体结构波浪压力公式, 再考虑多柱体体系中高次散射波问题, 推导得到多柱体体系中椭圆柱体结构波浪力计算公式。本文方法与已有数值方法对比结果表明, 本文解和数值解吻合的较好, 而当柱数目增加或柱间距增大时, 本文解的计算效率比有限元方法的高。

将本文方法应用于计算双柱阵列和四柱阵列的波浪力, 分析了高次散射波对结构所受波浪作用的影响。结果表明: 波数 $ka < 0.5$ 时, 高次散射波影响较小, 大波数的情况下, 不能忽略高次波的影响; 随着柱体间距离的增加, 高次波的影响有减小的趋势, 但仍存在波动; 高次波对上游柱体波浪力的影响比下

游柱体大; 多柱体体系中, 柱体数量增加后, 柱体产生的高次散射波会叠加, 高次波影响也随之增加, 而结构所受的高次波作用因参数发生的波动会变剧烈。

参 考 文 献

- Morison JR, Johnson JW, Schaaf SA. The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology*, 1950, 2(5): 149-154
- 中国交通运输部. 海港水文规范. 北京: 人民交通出版社, 2013 (Ministry of Transport of the People's Republic of China. Code of Hydrology for Sea Harbour. Beijing: China Communications Press, 2013 (in Chinese))
- 刘嘉斌. 基于势流理论的大型桥墩结构波浪作用研究. [博士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2019 (Liu Jiabin. Research of wave action on large-scale bridge foundation based on potential theory. [PhD Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019 (in Chinese))
- MacCamy RC, Fuchs RA. Wave forces on piles: a diffraction theory. U.S. Army Corps of Eng. : Technical Memo, 1954
- 陶建华, 丁旭. 大尺度结构物的二阶波浪荷载. 力学学报, 1988, 20(5): 385-392 (Tao Jianhua, Ding Xu. Second order wave loads on large structures, *Acta Mechanica Sinica*, 1988, 20(5): 385-392 (in Chinese))
- Newman JN. The second-order wave force on a vertical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, 320: 417-443
- Tao L, Song H, Chakrabarti S. Scaled boundary FEM solution of short-crested wave diffraction by a vertical cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 197(1-4): 232-242
- Song H, Tao L, Chakrabarti S. Modelling of water wave interaction with multiple cylinders of arbitrary shape. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(5): 1498-1513
- Wang P, Wang X, Zhao M, et al. A numerical model for earthquake-induced hydrodynamic forces and wave forces on inclined circular cylinder. *Ocean Engineering*, 2020, 207: 107382
- Linton CM, Evans DV. The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, 215: 549-569
- Kagemoto H, Yue D. Interactions among multiple three-dimensional bodies in water waves: an exact algebraic method. *J.Fluid Mech*, 1986, 166: 189-209
- Chen JT, Lee YT, Lin YJ. Interaction of water waves with vertical cylinders using null-field integral equations. *Applied Ocean Research*, 2009, 31(2): 101-110
- 缪国平, 余志兴, 缪泉明等. 流体动力干扰对单排圆柱列波浪力的影响. 力学学报. 1998, 30(5): 2-9 (Miao Guoping, Yu Zhixing, Miao Quanming, et al. On the effects of hydrodynamic interaction upon the wave force on vertical pile array of single row, *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 30(5): 2-9 (in Chinese))
- Wang P, Zhao M, Du X, et al. A finite element solution of earthquake-induced hydrodynamic forces and wave forces on multiple circular cylinders. *Ocean Engineering*, 2019, 189: 106336
- Chen HS, Mei CC. Wave forces on a stationary platform of elliptical shape. *Journal of Ship Research*, 1973, 17(2): 61-71

16 Williams AN. Wave forces on an elliptic cylinder. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 1985, 111(2): 433-449

17 Liu J, Guo A, Li H. Analytical solution for the linear wave diffraction by a uniform vertical cylinder with an arbitrary smooth cross-section. *Ocean Engineering*, 2016, 126: 163-175

18 Liu J, Guo A, Fang Q, et al. Investigation of linear wave action around a truncated cylinder with non-circular cross section. *Journal of Marine Science and Technology*, 2018, 23(4): 866-876

19 Zhang S, Williams AN. Water scattering by submerged elliptical disk. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean*, 1996, 122: 38-45

20 Bhatta DD. Wave diffraction by circular and elliptical cylinders in finite depth water. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2005, 19(1): 67-85

21 Wang P, Zhao M, Du X, et al. Analytical solution for the short-crested wave diffraction by an elliptical cylinder. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2019, 74: 399-409

22 王丕光, 黄义铭, 赵密等. 椭圆形柱体地震动水压力的简化分析方法. *震灾防御技术*, 2019, 14(1): 24-34 (Wang Piguang, Huang Ying, Zhao Mi, et al. The simplified method for the earthquake induced hydrodynamic pressure on elliptical cylinder. *Technology for Earthquake Disaster Prevention*, 2019, 14(1): 24-34 (in Chinese))

23 Chatjigeorgiou IK. The hydrodynamics of arrays of truncated elliptical cylinders. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2013, 37: 153-164

24 Chatjigeorgiou IK. Three dimensional wave scattering by arrays of elliptical and circular cylinders. *Ocean Engineering*, 2011, 38(13): 1480-1494

25 Chatjigeorgiou IK, Mavrakos SA. An analytical approach for the solution of the hydrodynamic diffraction by arrays of elliptical cylinders. *Applied Ocean Research*, 2010, 32(2): 242-251

26 Lee W. Acoustic scattering by multiple elliptical cylinders using collocation multipole method. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(14): 4597-4612

27 Liu J, Guo A, Fang Q, et al. Wave action by arrays of vertical cylinders with arbitrary smooth cross-section. *Journal of Hydrodynamics*, 2020, 32(1): 70-81

28 Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1964

29 Særmærk K. A note on addition theorems for Mathieu functions. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1959, 10(4): 426-428

30 Meixner J, Schäfer FW. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin: Springer, 1954

附录 1

Chatjigeorgiou 等^[17] 在 Særmærk 等^[21] 的基础上化简了将马蒂厄函数的加法定理, 具体可以表示为

$$M c_n^{(l)}(\xi_j, q_j) c e_n(\eta_j, q_j) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{m,n}^{(l),ji} M c_m^{(1)}(\xi_i, q_i) c e_m(\eta_i, q_i) - i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{-m} Q_{-m,n}^{(l),ji} M s_m^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_m(\eta_i, q_i) \quad (A1)$$

$$M s_n^{(l)}(\xi_j, q_j) s e_n(\eta_j, q_j) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n-m} Q_{-m,-n}^{(l),ji} M s_m^{(1)}(\xi_i, q_i) s e_m(\eta_i, q_i) + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m Q_{m,-n}^{(l),ji} M c_m^{(1)}(\xi_i, q_i) c e_m(\eta_i, q_i) \quad (A2)$$

其中 $Q_{m,n}^{(l),ji}$ 可以表示为

$$Q_{m,n}^{(l),ji} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} d'_{m-p,p}(q_i) \times Z_{p-s}^l(k_0 R_{ji}) d_{s-n,n}(q_j) e^{i(s-p)\theta_{ji}} \quad (A3)$$

$$Z_m^l(k_0 R_{ji}) = \begin{cases} J_m(k_0 R_{ji}), & l = 1 \\ Y_m(k_0 R_{ji}), & l = 2 \\ H_m^{(1)}(k_0 R_{ji}), & l = 3 \\ H_m^{(2)}(k_0 R_{ji}), & l = 4 \end{cases} \quad (A4)$$

$$\left. \begin{aligned} d'_{m-p,p}(q_i) &= 2^{-1/2} (-1)^{(m-p)/2} A_p^m(q_i) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ d'_{-m-p,p}(q_i) &= -2^{-1/2} (-1)^{(-m-p)/2} B_p^m(q_i) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ d'_{2m,0}(q_i) &= 2^{1/2} (-1)^n A_0^{2m}(q_i) \quad (p = 0) \\ d_{s-n,n}(q_j) &= 2^{-1/2} (-1)^{(s-n)/2} A_s^n(q_j) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ d_{s+n,-n}(q_j) &= -2^{-1/2} (-1)^{(s+n)/2} B_s^n(q_j) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ d_{-2n,2n}(q_j) &= 2^{1/2} (-1)^{-n} A_0^{2n}(q_j) \quad (s = 0) \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

式中, $J_m(\cdot)$ 为第一类 m 阶贝塞尔函数, $Y_m(\cdot)$ 为第二类 m 阶贝塞尔函数, $H_m^{(1)}(\cdot)$ 为第一类 m 阶汉克尔函数, $H_m^{(2)}(\cdot)$ 为第二类 m 阶汉克尔函数. 当 $n-p$ 和 $s-m$ 为奇数时, d' 和 d 为 0.