

# 可压缩两相流固耦合模型的间断 Galerkin 有限元方法<sup>1)</sup>

马天然<sup>\*,†</sup> 沈伟军<sup>\*\*,††,2)</sup> 刘卫群<sup>\*,†</sup> Xu Hao<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>(中国矿业大学力学与土木工程学院, 江苏徐州 221116)

<sup>†</sup>(中国矿业大学深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏徐州 221116)

<sup>\*\*</sup>(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

<sup>††</sup>(中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

<sup>\*\*\*</sup>(劳伦斯伯克利国家实验室地球科学部, 美国伯克利 94720)

**摘要** 认识多孔介质内多相流动和固体变形耦合特征是地下资源开发利用的关键问题. 针对这一问题, 首先建立了考虑毛细压力和重力作用的可压缩两相渗流与孔隙介质变形耦合方程. 在此基础上, 推导了流体方程的非对称内罚 Galerkin 弱形式和固体变形方程的非完全内罚 Galerkin 弱形式. 其次, 通过对比一维 Terzaghi 固结问题的理论解和数值解, 验证了间断 Galerkin 方法在计算流固耦合问题方面的可行性和准确性. 然后, 针对性开展了二维平面算例和考虑重力效应作用的三维算例, 分析了加罚因子  $\delta_s$  和  $\delta_f$  对数值结果的影响. 结果表明, 随着气体的持续注入, 气体饱和度和孔压增加, 有效应力降低, 继而引发多孔介质膨胀变形; 气体在重力影响下上浮聚集于顶部边界;  $\delta_s$  和  $\delta_f$  的降低会导致流体和力学信息在局部出现不同程度的波动, 提高加罚因子可以有效抑制有限元函数在跨越单元时的不连续性.

**关键词** 两相流, 固体变形, 流固耦合, 加罚因子, 数值模拟, 间断伽辽金有限元

中图分类号: O359+.1, TE312 文献标识码: A doi: [10.6052/0459-1879-21-177](https://doi.org/10.6052/0459-1879-21-177)

## DISCONTINUOUS GALERKIN FEM METHOD FOR THE COUPLING OF COMPRESSIBLE TWO-PHASE FLOW AND POROMECHANICS<sup>1)</sup>

Ma Tianran<sup>\*,†</sup> Shen Weijun<sup>\*\*,††,2)</sup> Liu Weiqun<sup>\*,†</sup> Xu Hao<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>(School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, Jiangsu, China)

<sup>†</sup>(State Key Laboratory for GeoMechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, Jiangsu, China)

<sup>\*\*</sup>(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

<sup>††</sup>(School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

<sup>\*\*\*</sup>(Earth Sciences Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley 94720, USA)

**Abstract** Understanding the coupled multiphase flow and solid deformation processes in porous media is a significant issue in the area of developing and utilizing underground resources. This study first established the coupled modeling of

2021-03-23 收稿, 2021-07-30 录用, 2021-07-31 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助(U1762216, 11802312), 江苏省自然科学基金(BK20180636) 资助项目.

2) 沈伟军, 副研究员, 主要研究方向: 渗流流体力学和油气田开发工程. E-mail: wjshen763@imech.ac.cn

引用格式: 马天然, 沈伟军, 刘卫群, Xu Hao. 可压缩两相流固耦合模型的间断 Galerkin 有限元方法. 力学学报, 2021, 53(8): 2235-2245

Ma Tianran, Shen Weijun, Liu Weiqun, Xu Hao. Discontinuous Galerkin FEM method for the coupling of compressible two-phase flow and poromechanics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(8): 2235-2245

compressible two-phase flow and deformation of porous media, which considers capillarity and gravity. Meanwhile, the strong form and the corresponding weak form of coupled multiphase flow and solid deformation model were presented. Then, the capacity of the proposed DG method for the coupled hydromechanical model was verified by comparison with analytical and numerical results of the one-dimensional Terzaghi consolidation problem. Subsequently, the two- and three-dimensional cases were performed to study the flow behaviors and deformation characteristics, respectively. In addition, the effects of the penalty factors  $\delta_s$  and  $\delta_f$  on the stability of the numerical results were analyzed. The simulation results show that gas saturation and pore pressure continually increase with the injection of gas. The increment of pore pressure reduces the effective stress, which results in deformation and expansion of the porous medium. The gas floats up and gathers at the top boundary due to gravity. The decrease of the penalty factors  $\delta_s$  and  $\delta_f$  trends to cause the fluctuation of saturation, pressure, effective stress, and displacement. The increases in penalty factors are beneficial to suppress the discontinuity of the finite element function crossing the elements.

**Key words** two-phase flow, solid deformation, coupled hydro-mechanical, penalty factor, numerical simulation, discontinuous Galerkin FEM

## 引言

深入探索多孔介质中多相流动和固体变形特征对精准认识地下资源开发利用,例如石油勘探开发、煤层气和页岩气开采、二氧化碳地质封存等领域,具有重要的工程意义<sup>[1-4]</sup>.在流体输送过程中局部压力和饱和度梯度下的渗流作用改变了孔隙结构特征,打破了储层内部的水力平衡;固体空间结构的变化影响了储层内部流体的运移路径和流通能力,具体表现为多孔介质孔隙度和渗透率等物性参数的动态响应.发展和建立两相渗流与固体变形耦合模型及其相应的数值方法是准确描述和阐明储层内水力行为的有效手段<sup>[5-7]</sup>.

针对两相渗流和固体变形耦合模型的数值方法主要包括有限元法<sup>[8-10]</sup>、有限体积法<sup>[11-12]</sup>以及混合计算方法<sup>[13-14]</sup>等.对于两相流问题的离散和数值求解,传统有限元能够确保流体域内整体的质量平衡,但是无法实现流体在跨越单元间的局部质量平衡,因此不适用于求解对流占主导的非线性不混溶问题;有限体积法在确保局部流量平衡的同时,具有较高的计算效率,因此在工业界和工程尺度模拟中得到了广泛应用.在通常情况下,有限体积法的计算结果仅能满足低阶有效精度;混合计算方法是指对流体和力学控制方程分别利用不同的数值方法进行求解,该方法集成了各种数值方法的优势.Rutqvist<sup>[15]</sup>在耦联流体软件 TOUGH2 和固体变形软件 FLAC3D 的基础上,开发了在油气、地热、可燃冰开采以及二氧化碳地质封存等领域广泛使用的 TOUGH-FLAC

耦合模拟器.在此模拟器中,负责流体计算的 TOUGH2 软件采用的是有限体积法,FLAC3D 采用有限差分法计算固体变形,此方法在网格划分和数据传递效率等方面具有一定的局限性.

间断伽辽金有限元 (discontinuous Galerkin finite element method, DG-FEM) 结合了有限体积与有限元两种方法的优点,具有高阶精度和局部单元物理守恒性的特点,容易实现局部网格加密和各单元多项式的单独选取<sup>[16-19]</sup>.近些年来, DG-FEM 在流体和弹性力学领域得到了广泛的关注和持续的发展<sup>[20-22]</sup>.Klieber 和 Riviere<sup>[23]</sup>在解耦两相渗流微分方程组的基础上,提出了不可压缩两相流自适应间断有限元方法. Epshteyn 和 Riviere<sup>[24]</sup>提出了多孔介质不可压缩两相流完全隐式方程的不连续伽辽金方法,该方法在结构化和非结构化网格计算中都具有较好的鲁棒性.李子然和吴长春<sup>[25]</sup>、陈韵骋等<sup>[26]</sup>建立了基于线弹性力学问题的局部间断有限元方法.在流固耦合方面, Liu 等<sup>[27-28]</sup>提出了连续和间断伽辽金耦合框架,利用自适应加罚方法提高间断伽辽金有限元方法在模拟大型多孔弹性问题时的适用性和计算效率,并将此方法推广至多孔介质水力压裂模拟中.目前关于间断伽辽金有限元方法在计算可压缩两相流固模型方面的研究鲜有报道,还有待进一步深入研究.

基于上述认识,本文首先建立可压缩两相流固耦合控制方程,其中包括考虑毛细压力和重力作用的可压缩两相渗流方程以及线性多孔弹性方程.在此基础上,推导出流固耦合方程的间断伽辽金弱形

式; 然后, 通过一维 Terzaghi 流固问题验证模型的准确性; 最后, 分别开展二维平面应变条件下和考虑重力效应的三维流固数值算例, 分析流体压力、饱和度以及固体应力、位移的分布特征, 探讨加罚因子对模拟结果的影响。

## 1 两相流固耦合控制方程

### 1.1 两相渗流方程

假设模型中湿润相和非湿润相为不混溶流体, 两者在多孔介质中的流速满足达西定律. 在考虑毛细压力、重力效应和固体变形的基础上, 等温可压缩两相渗流控制方程可表示为<sup>[2, 29]</sup>

$$\phi S_{nw} \rho_{nw} C_{nw} \frac{\partial p_{nw}}{\partial t} - \phi \rho_{nw} \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_{nw} \rho_{nw} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ -\rho_{nw} \frac{\mathbf{k}k_{r_{nw}}}{\mu_{nw}} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \right] = Q_{nw} \quad (1)$$

$$\phi S_w \rho_w C_w \frac{\partial p_{nw}}{\partial t} + (\phi \rho_w - \phi S_w \rho_w C_w |p_c|) \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ -\rho_w \frac{\mathbf{k}k_{r_w}}{\mu_w} (\nabla p_{nw} - |p_c| \nabla S_w + \rho_w \mathbf{g}) \right] = Q_w \quad (2)$$

式中, 下标  $\beta$  为 w 和 nw 分别表示湿润相和非湿润相,  $S_\beta$  为饱和度,  $\rho_\beta$  和  $\mu_\beta$  分别为流体密度和黏度,  $C_\beta$  为流体压缩系数,  $p_\beta$  为流体压力,  $\mathbf{k}$  为多孔介质绝对渗透率张量,  $k_{r\beta}$  为相对渗透率,  $Q_\beta$  为源汇项,  $\varepsilon_v$  为体应变,  $p_c$  和  $|p_c|$  分别为毛细压力和毛细压力对湿润相饱和度的导数。

为了求解方程, 需要补充如下辅助公式

$$S_w + S_{nw} = 1 \quad (3)$$

$$p_c = p_{nw} - p_w = p_e (S_e)^{-\frac{1}{\lambda}} \quad (4)$$

$$S_e = \frac{S_w - S_{r_{nw}}}{1 - S_{r_w} - S_{r_{nw}}} \quad (5)$$

式中,  $p_e$  为毛细管吸入压力,  $S_e$  为有效饱和度,  $\lambda$  为孔径分布指数,  $S_{r_w}$  和  $S_{r_{nw}}$  分别为湿润相和非湿润相的残余饱和度。

此外, 选取 Genuchten–Mualem 相对渗透率模型描述湿润相和非湿润相的流通能力, 表达式如下所示<sup>[30]</sup>

$$k_{r_w} = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left[ 1 - (1 - S_e^{1/\omega})^\omega \right]^2, & \text{if } S_w < 1 \\ 1, & \text{if } S_w \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$k_{r_{nw}} = \begin{cases} 1 - k_{r_w}, & \text{if } S_{r_{nw}} = 0 \\ (1 - S_e)^2 (1 - S_e^2), & \text{if } S_{r_{nw}} > 0 \end{cases} \quad (7)$$

模型的初始条件为

$$p_{nw}(x, t = 0) = p_{nw0} \quad (8)$$

$$S_w(x, t = 0) = S_{w0} \quad (9)$$

模型中 Dirichlet 和 Neumann 边界条件如下所示

$$p_{nw}(x, t) = p_{nw}^b \quad (10)$$

$$S_w(x, t) = S_w^b \quad (11)$$

$$\lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = g_{nw} \quad (12)$$

$$\lambda_w (\nabla p_{nw} - |p_c| \nabla S_w + \rho_w \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = g_w \quad (13)$$

式中,  $\lambda_{nw} = -\rho_{nw} \frac{\mathbf{k}k_{r_{nw}}}{\mu_{nw}}$ ,  $\lambda_w = -\rho_w \frac{\mathbf{k}k_{r_w}}{\mu_w}$ ,  $\mathbf{n}$  为单位法向量,  $p_{nw0}$  和  $p_{nw}^b$  分别为初始和边界上非湿润相孔隙压力,  $S_{w0}$  和  $S_w^b$  分别为初始和边界上湿润相饱和度,  $g_w$  和  $g_{nw}$  分别为边界上湿润相和非湿润相的流量。

### 1.2 两相渗流方程的间断伽辽金弱形式

图 1 为模拟几何区域、边界条件和网格示意图. 在计算域  $\Omega$  中, 边界  $\partial\Omega$  由不与内部单元接触的外边界  $\partial\Omega_o$  和内部相邻单元共享的内边界  $\partial\Omega_i$  两部分组成. 由图 1 可知, 内边界  $\partial\Omega_i$  为相邻单元  $E^+$  和  $E^-$  共同拥有; 外边界  $\partial\Omega_o$  由 Dirichlet 边界  $\partial\Omega_{oD}$  和 Neumann 边界  $\partial\Omega_{oN}$  两者构成, 即  $\partial\Omega_o = \partial\Omega_{oD} \cup \partial\Omega_{oN}$ . 设  $\mathcal{T}_h$  为  $\cup\{E\}$ , 是区域  $\Omega$  的正则剖分,  $\partial E = \partial\Omega_o \cup \partial\Omega_i$  表示为所有边界的集合, 则间断有限元空间定义为

$$Q(\mathcal{T}_h) = \{V \in L_2(\Omega) : V|_E \in p_r(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\} \quad (14)$$

式中, 离散空间  $p_r(E)$  为单元  $E$  上不超过  $r$  次的多项式的集合。

为了推导两相渗流方程的间断伽辽金弱形式,

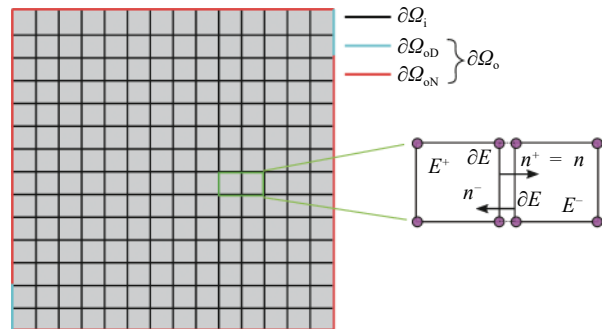


图 1 几何区域、边界条件和网格示意图

Fig. 1 Domain with boundary conditions and mesh skeleton

首先在式 (1) 等号的两侧乘以试函数  $\widetilde{p}_{nw}$ , 并在单元计算域  $E$  内进行积分, 可得到

$$\int_E \left( \phi S_{nw} \rho_{nw} C_{nw} \frac{\partial p_{nw}}{\partial t} - \phi \rho_{nw} \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \widetilde{p}_{nw} dV + \int_E \nabla \cdot [\lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g})] \widetilde{p}_{nw} dV = \int_E Q_{nw} \widetilde{p}_{nw} dV \quad (15)$$

利用分部积分和散度定理, 式 (15) 中等号左侧第二项可表示为

$$\int_E \nabla \cdot [\lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g})] \widetilde{p}_{nw} dV = \int_{\partial E} \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \widetilde{p}_{nw} dS - \int_E \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \nabla \widetilde{p}_{nw} dV \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (15), 累加所有单元区域, 可得

$$\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \left( \phi S_{nw} \rho_{nw} C_{nw} \frac{\partial p_{nw}}{\partial t} - \phi \rho_{nw} \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \widetilde{p}_{nw} dV - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \nabla \widetilde{p}_{nw} dV + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \widetilde{p}_{nw} dS = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E Q_{nw} \widetilde{p}_{nw} dV \quad (17)$$

在间断伽辽金方法中, 变量在单元内边界  $\partial \Omega_i$  处满足不连续设定, 因此式 (17) 中等号左侧第三项可以改写为

$$\sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_{nw} \nabla p_{nw} \cdot \mathbf{n} \widetilde{p}_{nw} dS = \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_{nw}^+ (\nabla p_{nw}^+ + \rho_{nw}^+ \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}^+ \widetilde{p}_{nw}^+ + \lambda_{nw}^- (\nabla p_{nw}^- + \rho_{nw}^- \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}^- \widetilde{p}_{nw}^- dS = \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \llbracket \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \widetilde{p}_{nw} \rrbracket dS \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (17) 中, 结合稳定项、加罚函数项以及相应边界条件, 可得

$$\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \left( \phi S_{nw} \rho_{nw} C_{nw} \frac{\partial p_{nw}}{\partial t} - \phi \rho_{nw} \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \widetilde{p}_{nw} dV - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \nabla \widetilde{p}_{nw} dV + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_{nw} \langle (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \rangle \llbracket \widetilde{p}_{nw} \rrbracket dS + \omega_f \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_{nw} \langle \nabla \widetilde{p}_{nw} \rangle \llbracket p_{nw} \rrbracket dS +$$

$$\sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \frac{\delta_f}{h} \llbracket p_{nw} \rrbracket \llbracket \widetilde{p}_{nw} \rrbracket dS + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \lambda_{nw} (\nabla p_{nw} + \rho_{nw} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \widetilde{p}_{nw} dS + \omega_f \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \lambda_{nw} \nabla \widetilde{p}_{nw} \cdot \mathbf{n} (p_{nw} - p_{nw}^b) dS + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \frac{\delta_f}{h} (p_{nw} - p_{nw}^b) \widetilde{p}_{nw} dS = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E Q_{nw} \widetilde{p}_{nw} dV - \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oN}} \int_{\partial E} g_{nw} \widetilde{p}_{nw} dS \quad (19)$$

式中,  $\langle X \rangle = \frac{1}{2} (X \cdot \mathbf{n}^+ - X \cdot \mathbf{n}^-)$  和  $\llbracket X \rrbracket = X \cdot \mathbf{n}^+ + X \cdot \mathbf{n}^-$  分别为  $X$  在相邻单元共同边界上的平均和跳跃,  $h$  为单元尺寸,  $\delta_f$  为加罚因子,  $\omega_f$  的选取决定了间断有限元方法的类型.  $\omega_f = 1$ , 表示为非对称内罚伽辽金法 (non-symmetric interior penalty Galerkin method, 简称 NIPG);  $\omega_f = 0$ , 表示为非完全内罚伽辽金法 (incomplete interior penalty Galerkin method, 简称 IIPG);  $\omega_f = -1$ , 表示为对称内罚伽辽金法 (symmetric interior penalty Galerkin method, SIPG). 在本文中, 选取  $\omega_f = 1$  [23], 则式 (19) 为流体方程的非对称内罚伽辽金弱形式.

利用上述类似的推导过程和方式, 可以得到式 (2) 的间断伽辽金弱形式, 如下所示

$$\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \left[ \phi S_w \rho_w C_w \frac{\partial p_{nw}}{\partial t} + (\phi \rho_w - \phi S_w \rho_w C_w |p_c|) \frac{\partial S_w}{\partial t} \right] \widetilde{S}_w dV + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \lambda_w (|p_c| \nabla S_w - \nabla p_{nw} - \rho_w \mathbf{g}) \cdot \nabla \widetilde{S}_w dV - \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_w |p_c| \langle \nabla S_w \rangle \llbracket \widetilde{S}_w \rrbracket dS + \omega_f \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_w |p_c| \langle \nabla \widetilde{S}_w \rangle \llbracket S_w \rrbracket dS + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \frac{\delta_f}{h} \llbracket S_w \rrbracket \cdot \llbracket \widetilde{S}_w \rrbracket dS + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_w \langle (\nabla p_{nw} + \rho_w \mathbf{g}) \rangle \llbracket \widetilde{S}_w \rrbracket dS + \omega_f \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \lambda_w \langle \nabla \widetilde{S}_w \rangle \llbracket p_{nw} \rrbracket dS + \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \frac{\delta_f}{h} \llbracket p_{nw} \rrbracket \cdot \llbracket \widetilde{S}_w \rrbracket dS - \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \lambda_w |p_c| \nabla S_w \cdot \mathbf{n} \widetilde{S}_w dS +$$

$$\begin{aligned}
 & \omega_f \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \lambda_w |p_c| \nabla \widetilde{S}_w \cdot \mathbf{n} (S_w - S_w^b) dS + \\
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \frac{\delta_f}{h} (S_w - S_w^b) \widetilde{S}_w dS + \\
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \lambda_w (\nabla p_{nw} + \rho_w \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \widetilde{S}_w dS + \\
 & \omega_f \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \lambda_w \nabla \widetilde{S}_w \cdot \mathbf{n} (p_{nw} - p_{nw}^b) dS + \\
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \frac{\delta_f}{h} (p_{nw} - p_{nw}^b) \widetilde{S}_w dS = \\
 & \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E Q_w \widetilde{S}_w dV - \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oN}} \int_{\partial E} g_w \widetilde{S}_w dS \quad (20)
 \end{aligned}$$

式 (19) 和式 (20) 为考虑固体变形作用下可压缩两相渗流方程的间断伽辽金有限元方法的弱表达形式。

### 1.3 固体变形方程及其弱形式

假设多孔介质固体变形满足弹性小变形条件, 那么固体变形的平衡方程、几何方程、本构方程以及边界条件如下所示

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \text{ on } \Omega \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \text{ on } \Omega \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ on } \Omega \quad (23)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^b, \text{ on } \partial \Omega_{oD} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ on } \partial \Omega_{oN} \quad (25)$$

式中, 总应力  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \mathbf{I}p$ , 则式 (21) 可改写

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \alpha \mathbf{I}p) + \mathbf{f} = 0 \quad (26)$$

式中,  $\boldsymbol{\sigma}'$  为有效应力张量,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为应变张量,  $\mathbf{u}$  为位移张量,  $\mathbf{f}$  为体积力张量,  $\alpha$  为 Biot 常数,  $\mathbf{D}$  为 4 阶弹性张量,  $\mathbf{I}$  为单位张量, 平均孔隙压力  $p = S_{nw}p_{nw} + S_w p_w$ .

利用类似式 (19) 和式 (20) 的推导过程, 结合相应的边界条件, 可以得到固体变形方程的弱形式, 如下所示

$$\begin{aligned}
 & \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) dV - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \alpha \mathbf{I}p : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) dV - \\
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \langle \boldsymbol{\sigma}' - \alpha \mathbf{I}p \rangle \cdot \mathbf{n} [[\bar{\mathbf{u}}]] dS + \\
 & \omega_s \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \langle \boldsymbol{\sigma}'(\bar{\mathbf{u}}) - \alpha \mathbf{I}p \rangle \cdot \mathbf{n} [[\mathbf{u}]] dS +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_i} \int_{\partial E} \frac{G \delta_s}{h} [[\mathbf{u}]] \cdot [[\bar{\mathbf{u}}]] dS - \\
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} [\boldsymbol{\sigma}'(\bar{\mathbf{u}}) - \alpha \mathbf{I}p] \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \\
 & \omega_s \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} [\boldsymbol{\sigma}'(\bar{\mathbf{u}}) - \alpha \mathbf{I}p] \cdot \mathbf{n} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^b) dS + \\
 & \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oD}} \int_{\partial E} \frac{G \delta_s}{h} \bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^b) dS = \\
 & \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}} dV - \sum_{\partial E \in \partial \Omega_{oN}} \int_{\partial E} \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{u}} dS \quad (27)
 \end{aligned}$$

式中,  $\bar{\mathbf{u}}$  为试函数,  $G$  为剪切模量,  $\delta_s$  为加罚因子. 本文选取  $\omega_s = 0$  [26], 则式 (27) 为固体变形方程的非完全内罚伽辽金弱形式。

### 1.4 数值方法的实现

方程式 (19), 式 (20) 和式 (27) 是多孔介质中可压缩两相渗流和固体变形的弱形式. 本文利用通用有限元软件 COMSOL Multiphysics 内置的 Weak Form PDE 模块求解可压缩两相流固耦合模型. 基于二次不连续拉格朗日形函数构建对解域的间断伽辽金有限元逼近, 选取向后差分公式 (backward differentiation formula, BDF) 隐式求解器. 其中, BDF 求解器采用自适应时间步长算法和可变离散化阶数, 离散化的 BDF 精度从 1 ~ 5 不等. 基于 LU 分解, 采用 MUMPS (multifrontal massively parallel sparse) 直接求解器对线性系统进行求解, 并选取完全耦合的求解器 (fully coupled solver) 将线性求解器应用于牛顿单步法的非线性问题. 默认情况下, 初始时间步长设置为结束时间的 0.1%, 相对容差为 0.01.

## 2 模型验证

图 2 描述了一维 Terzaghi 固结问题的几何示意图以及相应的边界条件. 为了确保孔隙压力沿上下两端保持为零, 设置模型上下两端为排水边界. 在模型上边界瞬间施加均布载荷  $q = -5.00$  MPa. 本模型长度  $2h = 10.00$  m, 其他参数的具体取值如下 [2]: 剪切模量为 30.00 GPa, 压缩模量为 50.00 GPa, 多孔介质渗透率为  $1.00 \times 10^{-12}$  m<sup>2</sup>, 孔隙度为 0.25, 流体压缩系数为  $1.00 \times 10^{-12}$  Pa<sup>-1</sup>, 流体黏度为  $1.00 \times 10^{-3}$  Pa·s, 加罚因子  $\delta_f$  和  $\delta_s$  分别设置为 1.00 和 10.00 [31].

图 3 为 Terzaghi 固结问题的理论解 [32] 和 DG 有限元数值解的比较. 结果显示, DG 有限元计算得到的数值解与理论解吻合较好, 进而验证了间断伽辽金方法在求解流固耦合方程时的可行性和有效性.

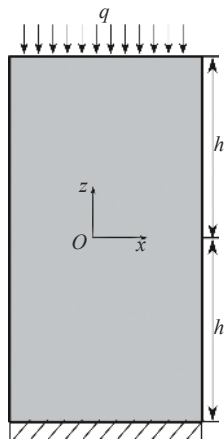


图 2 Terzaghi 固结问题几何示意图

Fig. 2 Sketch of Terzaghi's consolidation problem

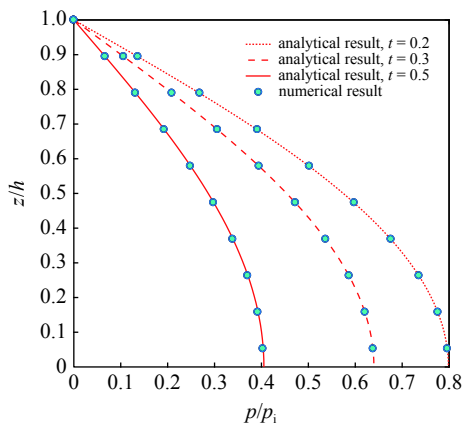


图 3 Terzaghi 固结问题理论解和数值解的比较

Fig. 3 Comparison of the analytical and numerical results for Terzaghi's consolidation problem

### 3 算例分析

#### 3.1 二维平面两相流固算例

本节利用间断伽辽金方法开展在二维平面应变条件下两相渗流和固体变形耦合数值计算. 在本算例中, 分别选取水和氢气作为湿润相和非湿润相. 模型的几何尺度、初始条件、边界条件和监测线如图 4 所示. 模型的长度和宽度均设置为 10.00 m. 多孔介质的弹性模量和泊松比分别为 10.00 GPa 和 0.30; 渗透率和孔隙度分别设定为  $1.00 \times 10^{-14} \text{ m}^2$  和 0.20. 模拟区域的初始气体压力为 4.00 MPa, 初始水饱和度为 0.80. 模拟左边界和下边界为位移约束, 在上边界和右边界分别施加  $-1.00 \times 10^7 \text{ MPa}$  (负号表示压应力方向) 的垂直和水平应力. 模型左下角为注入边界, 设置注入的氢气压力和水饱和度分别为 5.00 MPa 和 0.80; 右上角为出口边界, 出口气体压力

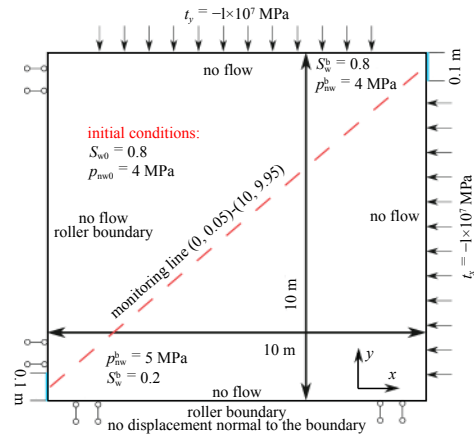


图 4 模拟几何尺度、初始和边界条件

Fig. 4 Simulation geometrical configuration with boundary and initial conditions

和水饱和度设置为 4.00 MPa 和 0.20.

数值模拟分两个阶段开展. 首先, 开展储层力学和流体平衡的稳态计算. 然后, 将第一步计算得到的应力和孔压等水力信息作为含水层氢气注入模拟算例的初始条件. 整个模拟时间为 1500 s, 其他变量的具体数值如表 1 所示.

表 1 两相流固数值模拟的属性参数

Table 1 Parameters for two-phase flow simulation

Parameter	Value	Unit
elastic modulus, $E$	30.00	GPa
poisson's ratio, $\nu$	0.25	—
permeability, $k$	$1.00 \times 10^{-14}$	$\text{m}^2$
porosity, $\phi$	0.20	—
water density, $\rho_{w0}$	1000.00	$\text{kg}/\text{m}^3$
water viscosity, $\mu_w$	$1.00 \times 10^{-3}$	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
water compressibility <sup>[32]</sup> , $c_w$	$3.84 \times 10^{-10}$	$\text{Pa}^{-1}$
hydrogen density, $\rho_{nw0}$	3.18	$\text{kg}/\text{m}^3$
hydrogen viscosity, $\mu_{nw}$	$9.02 \times 10^{-6}$	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
hydrogen compressibility <sup>[32]</sup> , $c_{nw}$	$7.71 \times 10^{-7}$	$\text{Pa}^{-1}$
entry pressure, $p_e$	$1.00 \times 10^4$	Pa
distribution index, $\lambda$	0.46	—
relative permeability variable, $\omega$	2.00	—
variable, $\omega_f$	1.00	—
penalty factor <sup>[27]</sup> , $\delta_f$	1.00	—
variable, $\omega_s$	0.00	—
penalty factor <sup>[27]</sup> , $\delta_s$	10.00	—

图 5 和图 6 分别给出了注气第 1500 s 气体压力  $p_{nw}$ 、水饱和度  $S_w$ 、水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  的空间分布云图以及变量沿监测线的分布图. 由图 5

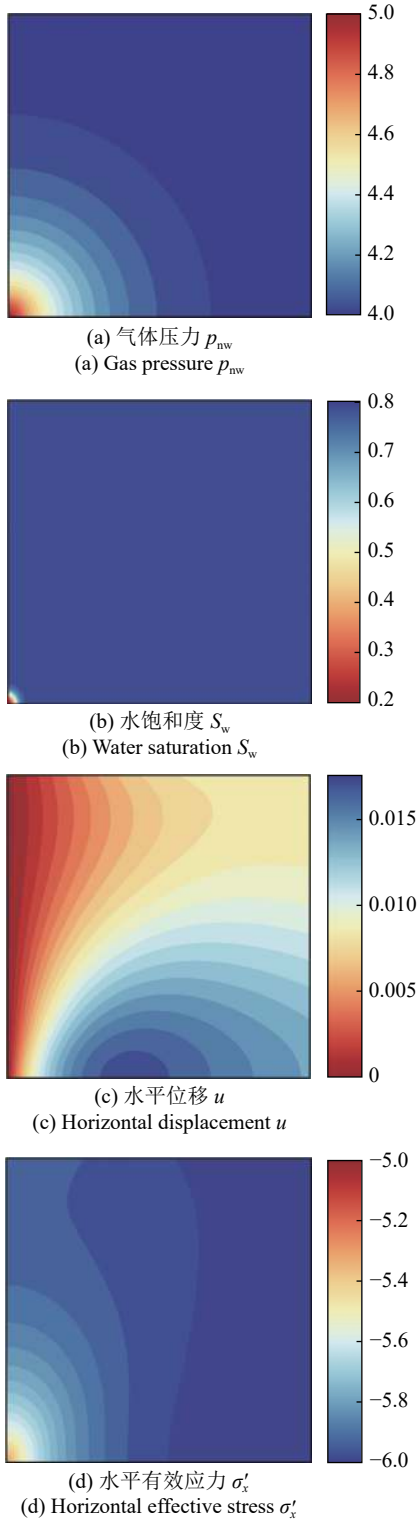


图 5 第 1500 s 气体压力  $p_{nw}$ 、水饱和度  $S_w$ 、水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  的分布云图

Fig. 5 The distribution of gas pressure  $p_{nw}$ , water saturation  $S_w$ , horizontal displacement  $u$  and horizontal effective stress  $\sigma'_x$  at  $t = 1500$  s

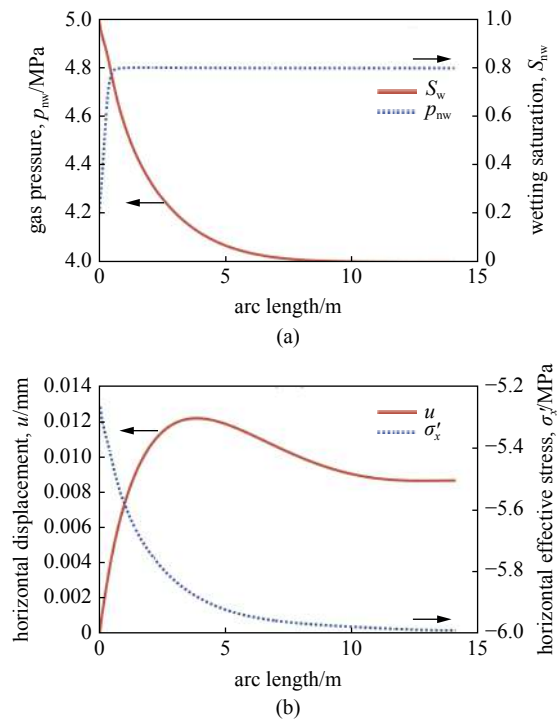


图 6 第 1500 s 时气体压力  $p_{nw}$ 、水饱和度  $S_w$ 、水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  沿监测线的分布

Fig. 6 The profiles of gas pressure  $p_{nw}$ , water saturation  $S_w$ , horizontal displacement  $u$  and horizontal effective stress  $\sigma'_x$  along the monitoring line at  $t = 1500$  s

和图 6 可知, 随着氢气的持续注入, 气体压力影响范围扩大至距注入边界 7 m 左右, 并引起固体膨胀变形且变形影响范围扩散至边界处. 究其原因是因为在多孔弹性介质中位移或者应变可传播到压力前沿之前. 受毛细压力和气水两相物理属性差异的共同影响, 氢气主要聚集于注入边界附近. 在多孔介质内孔压在远离注入边界的过程中呈现递减趋势, 而有效应力沿监测线增加.

### 3.2 加罚因子的影响

图 7 给出了  $\delta_s = 0.10, 1.00$  和  $10.00$  时水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  沿监测线的分布. 图 8 给出了  $\delta_s = 0.10$  时水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  的分布云图. 图 9 给出了  $\delta_f = 0.01, 0.10, 1.00$  和  $10.00$  时气体压力  $p_{nw}$ 、水饱和度  $S_w$  沿监测线的分布. 结果表明, 不同加罚因子条件下, 变量  $u, \sigma'_x, p_{nw}$  和  $S_w$  沿着监测线的变化趋势大体保持一致. 在计算固体变形时, 计算结果对加罚因子的选取更为敏感. 当  $\delta_s = 0.10$  时, 应力和位移均在局部出现明显的波动; 当  $\delta_f = 0.01$  时, 饱和度在小范围内发生轻微浮动. 这主要是由于加罚因子  $\delta_s$  和  $\delta_f$  的降低减少了自变量位移、压力以及饱和度在单元处弱连续性的约束, 造成了变量

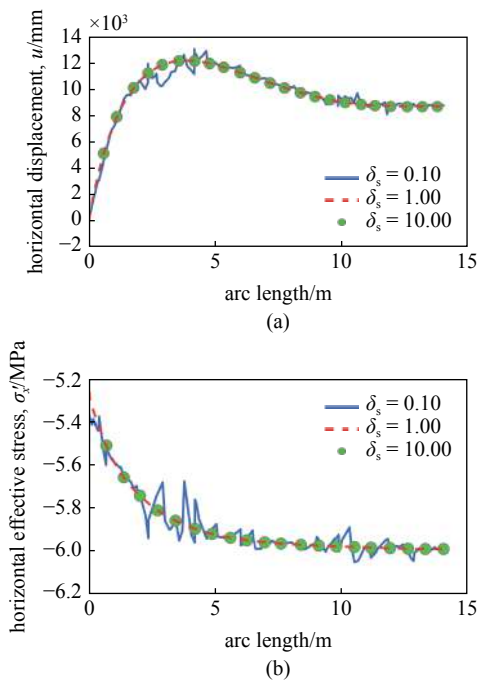


图 7 第 1500 s 时不同加罚因子  $\delta_s$  条件下水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  沿监测线的分布

Fig. 7 The profiles of horizontal displacement  $u$  and horizontal effective stress  $\sigma'_x$  along the monitoring line at  $t = 1500$  s with different values of penalty parameter  $\delta_s$

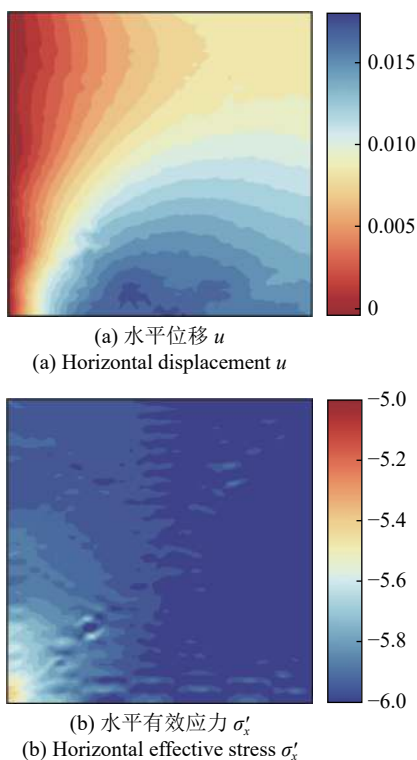


图 8 第 1500 s 时  $\delta_s = 0.01$  水平位移  $u$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  分布云图  
Fig. 8 The distribution of horizontal displacement  $u$  and horizontal effective stress  $\sigma'_x$  with  $\delta_s = 0.01$  at  $t = 1500$  s

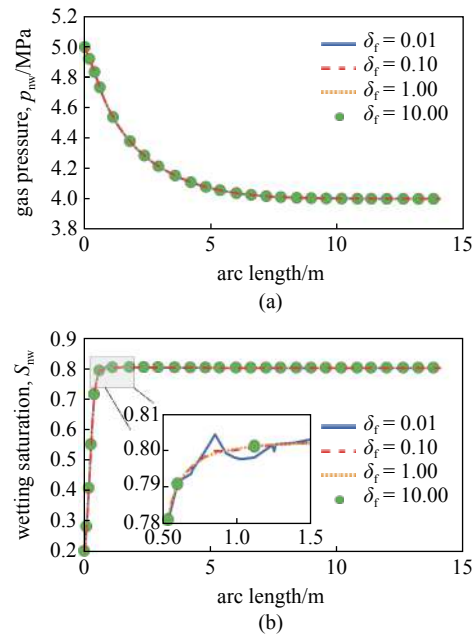


图 9 第 1500 s 时不同加罚因子  $\delta_f$  条件下气体压力  $p_{nw}$ 、水饱和度  $S_w$  沿监测线 (0, 0.05)–(10, 9.95) 的分布

Fig. 9 The profiles of gas pressure  $p_{nw}$  and water saturation  $S_w$  along monitoring line at  $t = 1500$  s with different values of  $\delta_f$

局部波动的现象。通过适当提高加罚因子可以加强变量在跨越单元交界面处的连续性,但是较高的加罚值会引发病态条件矩阵的可能性。

值得注意的是,受流体边界条件、初始条件以及流体方程的非线性特征等因素的影响,传统有限元方法在求解本节流体模型时无法收敛,此情况在一定程度上体现了间断伽辽金有限元在求解可压缩两相流固方程上的优越性。本节将传统有限元的计算结果作为基准方案,通过比较间断伽辽金有限元和传统有限元两者计算得到的水平位移和水平有效应力之间的相对误差,分析加罚因子  $\delta_s$  对计算结果的影响。水平位移和水平有效应力的计算误差  $err_u$  和  $err_s$  的表达式为<sup>[33]</sup>

$$err_u = \sqrt{\frac{1}{|l|(\Delta u_{CG})^2} \sum_E |h| (u_{DG} - u_{CG})^2} \quad (28)$$

$$err_s = \sqrt{\frac{1}{|l|(\Delta \sigma'_{xCG})^2} \sum_E |h| (\sigma'_{xDG} - \sigma'_{xCG})^2} \quad (29)$$

式中,  $l$  为几何模型尺度,  $u_{CG}$  和  $\sigma'_{xCG}$  分别为有限元方法计算得到的水平位移和水平有效应力,  $\Delta u_{CG}$  和  $\Delta \sigma'_{xCG}$  分别为  $u_{CG}$  和  $\sigma'_{xCG}$  极差,  $u_{DG}$  和  $\sigma'_{xDG}$  分别为间断有限元方法计算得到的水平位移和水平有效应力。

图 10 给出了不同加罚因子  $\delta_s$  条件下间断伽辽金



有限元和传统有限元方法计算得到的水平位移和水平有效应力的比较. 结果表明, 随着  $\delta_s$  的增加, 间断有限元与传统有限元计算得到的水平方向的变形和应力的相对误差随之减少, 这说明了加罚项的增加可以有效抑制有限元函数在跨越单元时的不连续性.

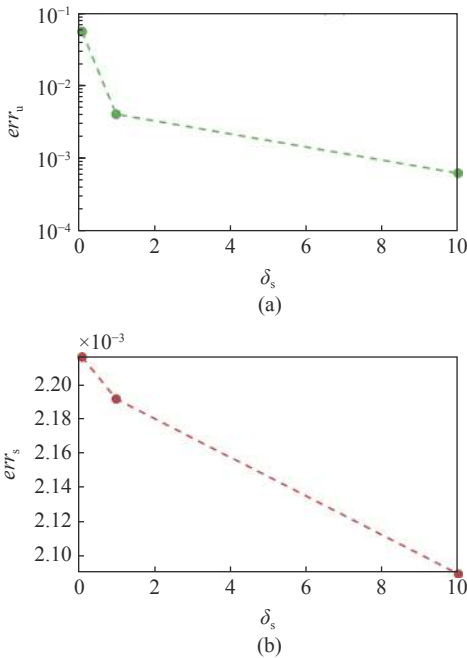


图 10 不同加罚因子  $\delta_s$  条件下间断有限元和传统有限元方法计算水平位移和水平有效应力的比较

Fig. 10 Comparison of the horizontal displacement and horizontal effective stress between DG and the CG results with different values of penalty parameter  $\delta_s$

### 3.3 考虑重力效应的两相流固三维算例

在本节中, 将开展含水层注氢气的三维数值模拟. 在此算例中, 侧重分析流体重力效应对模拟结果的影响. 如图 11 所示, 三维算例的几何尺度为  $100.00 \text{ m} \times 2.00 \text{ m} \times 10.00 \text{ m}$ . 模拟上边界和右边界为应力边界且  $t_x = t_z = -1.00 \times 10^7 \text{ MPa}$ , 其余边界均设定为位移约束. 氢气从左侧边界注入, 注入率  $g_{nw} =$

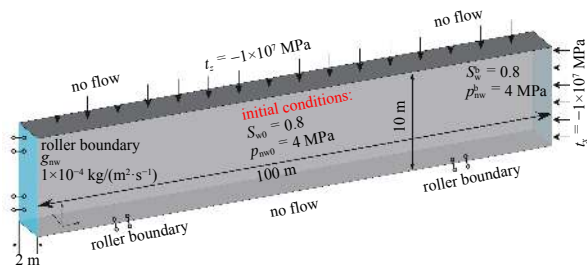


图 11 三维模型几何尺度以及模拟初始和边界条件

Fig. 11 Geometrical configuration with boundary and initial conditions of 3D case

$1.00 \times 10^{-4} \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)}$ , 右侧为出口边界, 边界上的气体压力和水饱和度分别为  $4.00 \text{ MPa}$  和  $0.20$ , 其余边界则为不流动边界. 整个注气过程持续  $1 \text{ d}$ , 其他变量的数值如表 1 所示.

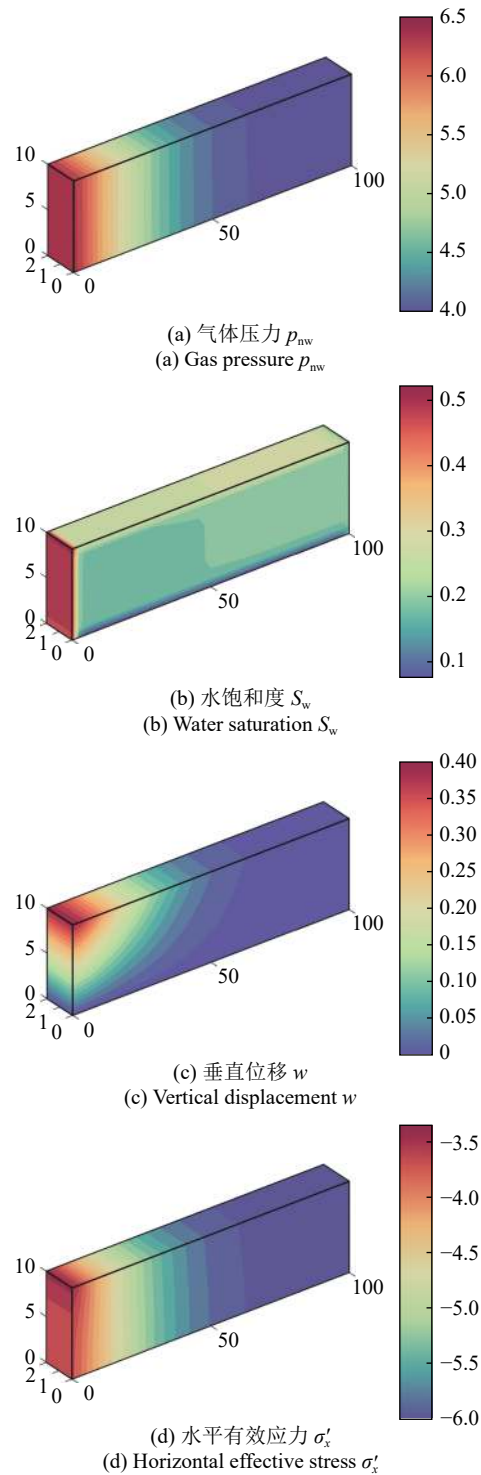


图 12 注气 1 d 后气体压力  $p_{nw}$ 、气体饱和度  $S_{nw}$ 、垂直位移  $w$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  的分布图

Fig. 12 The distribution of gas pressure  $p_{nw}$ , gas saturation  $S_{nw}$ , vertical displacement  $w$  and horizontal effective stress  $\sigma'_x$  after 1 day of injection

图 12 给出了注气 1 d 后气体压力  $p_{nw}$ 、气体饱和度  $S_{nw}$ 、垂直位移  $w$  和水平有效应力  $\sigma'_x$  的分布云图. 图 13 为在考虑和不考虑重力效应两种情况下点  $a$ 、 $b$  和  $c$  处气饱和度  $S_{nw}$  随时间变化图. 由图 12 可知, 氢气注入 1 d 后, 孔压沿着水平  $x$  方向传播至距左边界约 70.00 m 处, 储层边界处气体饱和度和孔隙压力分别增加至约 0.52 和 6.50 MPa, 孔压的增加引起垂直位移的提高和水平有效应力的降低. 在注入过程中, 由于氢气和水两者密度的差异, 引起气体上浮且聚集于模型顶部, 造成顶部点  $c$  处气体饱和度要明显高于底部点  $a$  处气体饱和度.

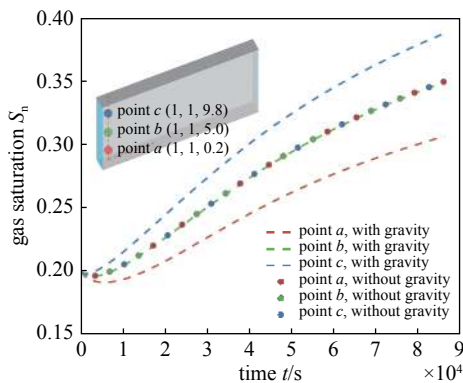


图 13 考虑和不考虑重力效应算例中点  $a$ 、 $b$  和  $c$  处气饱和度  $S_{nw}$  随时间变化图

Fig. 13 The temporal evolution of gas saturation  $S_{nw}$  at points  $a$ ,  $b$  and  $c$  in the cases with and without gravity

## 4 结论

本文建立了考虑毛细压力和重力效应的可压缩两相渗流与孔隙介质变形耦合作用的力学模型. 在此基础上, 分别推导出变形孔隙介质中两相渗流方程的非对称内罚伽辽金弱形式以及固体变形方程的非完全内罚伽辽金弱形式. 主要结论如下:

(1) 通过对比一维 Terzaghi 固结问题的解析解和数值解, 验证了间断伽辽金有限元方法在求解流固耦合问题方面的可行性和准确性;

(2) 开展了二维平面应变条件下和考虑重力效应作用的三维两相流固数值算例. 结果显示, 随着气体的注入, 气体饱和度和孔压随之增加, 导致多孔介质膨胀变形和有效应力降低. 由于重力的影响, 气体会上浮聚集于顶部边界;

(3) 在二维平面算例中, 讨论了加罚因子对计算结果的影响. 结果表明, 在相同网格条件下, 加罚因子  $\delta_f$  和  $\delta_s$  的降低会导致流体和固体信息在局部出现

不同程度的波动. 固体变形参量对加罚因子  $\delta_s$  更为敏感, 提高加罚因子  $\delta_s$  可以有效抑制位移和应力在跨越单元时的不连续性.

## 参 考 文 献

- 李熙喆, 卢德唐, 罗瑞兰等. 复杂多孔介质主流通道定量判别标准. *石油勘探与开发*, 2019, 46(5): 943-949 (Li Xizhe, Lu Detang, Luo Ruilan, et al. Quantitative criteria for identifying main flow channels in complex porous media. *Petroleum Exploration and Development*, 2019, 46(5): 943-949 (in Chinese))
- Ma TR, Rutqvist J, Oldenburg CM, et al. Fully coupled two-phase flow and poromechanics modeling of coalbed methane recovery: Impact of geomechanics on production rate. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2017, 45: 474-486
- 沈伟军, 李熙喆, 鲁晓兵等. 基于等温吸附的页岩水分传输特征研究. *力学学报*, 2019, 51(3): 932-939 (Shen Weijun, Li Xizhe, Lu Xiaobing, et al. Study on moisture transport characteristics of shale based on isothermal adsorption. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 932-939 (in Chinese))
- Rutqvist J, Vasco DW, Myer L. Coupled reservoir-geomechanical analysis of CO<sub>2</sub> injection and ground deformations at In Salah, Algeria. *International Journal of Greenhouse Gas Control*, 2010, 4(2): 225-230
- Jha B, Juanes R. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics. *Acta Geotechnica*, 2007, 2(3): 139-153
- Kim J, Tchepeli HA, Juanes R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2011, 200(23-24): 2094-2116
- Lu X, Wheeler MF. Three-way coupling of multiphase flow and poromechanics in porous media. *Journal of Computational Physics*, 2020, 401: 109053
- Bjornara TI, Nordbotten JM, Park J. Vertically integrated models for coupled two - phase flow and geomechanics in porous media. *Water Resources Research*, 2016, 52(2): 1398-1417
- Dong Y, Li P, Tian W, et al. An equivalent method to assess the production performance of horizontal wells with complicated hydraulic fracture network in shale oil reservoirs. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2019, 71: 102975
- Khoei AR, Hosseini N, Mohammadnejad T. Numerical modeling of two-phase fluid flow in deformable fractured porous media using the extended finite element method and an equivalent continuum model. *Advances in Water Resources*, 2016, 94: 510-528
- Gläser D, Helmig R, Flemisch B, et al. A discrete fracture model for two-phase flow in fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 2017, 110: 335-348
- Salinas P, Pavlidis D, Xie Z, et al. A discontinuous control volume finite element method for multi-phase flow in heterogeneous porous media. *Journal of Computational Physics*, 2018, 352: 602-614
- 王理想, 唐德泓, 李世海等. 基于混合方法的二维水力压裂数值模拟. *力学学报*, 2015, 47(6): 973-983 (Wang Lixiang, Tang Dehong, Li Shihai, Wang Jie, Feng Chun. Numerical simulation of hydraulic fracturing by a mixed method in two dimensions. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(6): 973-983 (in

- Chinese))
- 14 Jha B, Juanes R. Coupled multiphase flow and poromechanics: A computational model of pore pressure effects on fault slip and earthquake triggering. *Water Resources Research*, 2014, 50(5): 3776-3808
  - 15 Rutqvist J. Status of the TOUGH-FLAC simulator and recent applications related to coupled fluid flow and crustal deformations. *Computers & Geosciences*, 2011, 37(6): 739-750
  - 16 Arnold DN, Brezzi F, Marini BCD. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 2002, 39(5): 1749-1779
  - 17 贺立新, 张来平, 张涵信. 间断 Galerkin 有限元和有限体积混合计算方法研究. *力学学报*, 2007, 23(1): 15-22 (He Lixin, Zhang Laiping, Zhang Hanxin. A finite element/finite volume mixed solver on hybrid grids. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 23(1): 15-22 (in Chinese))
  - 18 刘冬欢, 郑小平, 刘应华. 不连续温度场问题的间断 Galerkin 方法. *力学学报*, 2010, 42(1): 74-82 (Liu Donghuan, Zheng Xiaoping, Liu Yinghua. Discontinuous Galerkin method for discontinuous temperature field problems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(1): 74-82 (in Chinese))
  - 19 Cockburn B, Karniadakis GE, Shu CW. *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*. Springer, 2000
  - 20 Shu CW. A brief survey on discontinuous Galerkin methods in computational fluid dynamics. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(6): 541-553
  - 21 Capanera L, Rivière B. Discontinuous Galerkin method for solving the black-oil problem in porous media. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2019, 35(2): 761-89
  - 22 Dedner A, Kane B, Kloforn R, et al. Python framework for hp-adaptive discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 67(3): 179-200
  - 23 Klieber W, Riviere B. Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 196(1-3): 404-419
  - 24 Epshteyn Y, Rivière B. Fully implicit discontinuous finite element methods for two-phase flow. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, 57(4): 383-401
  - 25 李子然, 吴长春. 弹性力学问题中的间断 Galerkin 有限元法. *上海交通大学学报*, 2003(5): 770-773 (Li Ziran, Wu Changchun. Local discontinuous Galerkin method in elastic mechanics. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2003(5): 770-773 (in Chinese))
  - 26 陈韵骋, 黄建国, 徐一峰. 线弹性力学问题局部间断有限元方法的后验误差估计. *上海交通大学学报*, 2011, 45(12): 1857-1862 (Chen Yuncheng, Huang Jianguo, Xu Yifeng. A posteriori error estimates for local discontinuous galerkin methods of linear elasticity. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2011, 45(12): 1857-1862 (in Chinese))
  - 27 Liu R, Wheeler MF, Dawson CN, et al. On a coupled discontinuous/continuous Galerkin framework and an adaptive penalty scheme for poroelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(41-44): 3499-3510
  - 28 Liu R, Liu Z, Wheeler MF. A DG-based interface element method for modeling hydraulic fracturing in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 370: 113284
  - 29 Cusini M, White JA, Castelletto N, et al. Simulation of coupled multiphase flow and geomechanics in porous media with embedded discrete fractures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2021, 45: 563-584
  - 30 Pruess K, Oldenburg CM, Moridis GJ. TOUGH2 user's guide version 2. Office of Scientific & Technical Information Technical Reports, 1999
  - 31 Linstrom PJ, Mallard WG. The NIST chemistry webbook: A chemical data resource on the internet. *Journal of Chemical & Engineering Data*, 2001, 46(5): 1059-1063
  - 32 Wang HF. *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton University Press, 2000
  - 33 Flemisch B, Berre I, Boon W, et al. Benchmarks for single-phase flow in fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 2018, 111: 239-258