

一种含惯容和接地刚度的动力吸振器参数优化¹⁾隋 鹏* 申永军^{*,†,2)} 杨绍普^{*,†}

*(石家庄铁道大学机械工程学院, 石家庄 050043)

[†](石家庄铁道大学省部共建交通工程结构力学行为与系统安全国家重点实验室, 石家庄 050043)

摘要 大多数机械振动属于有害振动, 不仅会产生噪声还会降低设备的使用寿命和工作性能. 接地刚度和惯容这两种器件均能改变系统的固有频率, 在振动控制领域中有着良好的效果. 但目前的大部分研究仅着眼于单一元件对系统产生的影响, 而此类吸振器逐渐难以满足设备对振动控制需求的增长. 在 Voigt 型动力吸振器模型的基础上, 提出了一种含有惯容和接地刚度的新型动力吸振器模型, 详细研究了该模型的最优设计参数, 推导出最优设计公式的解析解. 首先通过牛顿第二定律建立起二自由度系统的运动微分方程, 计算出系统解析解, 发现系统存在 3 个与阻尼比无关的固定点, 利用固定点理论得到了动力吸振器的最优频率比. 为保证系统稳定性, 筛选最优接地刚度比时, 发现不恰当的惯容系数会导致系统产生失稳现象, 进而推导出惯容最佳工作范围, 最终得到了最优接地刚度比和近似最优阻尼比. 分析了惯容系数取值在最佳范围以外时系统的工作情况, 并给出了实际应用中的建议. 通过数值仿真验证了推导得到解析解的正确性. 与多种已有的动力吸振器在简谐激励和随机激励的工况下进行对比, 说明了该模型能够大幅降低主系统振幅, 拓宽减振频带, 为设计新型吸振器提供了理论依据.

关键词 动力吸振器, 惯容, 接地刚度, 参数优化

中图分类号: O328, TH113.1 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-058

PARAMETERS OPTIMIZATION OF A DYNAMIC VIBRATION ABSORBER
WITH INERTER AND GROUNDED STIFFNESS¹⁾Sui Peng* Shen Yongjun^{*,†,2)} Yang Shaopu^{*,†}

*(Department of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

[†](State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures,
Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract Most mechanical vibrations are detrimental that not only generate noise but also reduce the service life and operating performance of the equipment. As two common components, grounded stiffness and inerter can change the natural frequency of the system, which has good effect in the field of vibration control. However, most of the current research only focuses on the impact of a single component on the system, and the vibration absorber is gradually difficult to meet the growth of performance demand for vibration control. Based on the typical Voigt-type dynamic vibration absorber, a novel dynamic vibration absorber model with inerter and grounded stiffness is presented. The optimal parameters of the

2021-02-22 收稿, 2021-03-23 录用, 2021-03-23 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (U1934201, 11772206).

2) 申永军, 教授, 主要研究方向: 机械系统的动力学与振动控制. E-mail: shenyongjun@stdu.edu.cn

引用格式: 隋鹏, 申永军, 杨绍普. 一种含惯容和接地刚度的动力吸振器参数优化. 力学学报, 2021, 53(5): 1412-1422

Sui Peng, Shen Yongjun, Yang Shaopu. Parameters optimization of a dynamic vibration absorber with inerter and grounded stiffness.

Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(5): 1412-1422

presented model are studied in detail, and the analytical solution of the optimal design formula is derived. First of all, the motion differential equation of the two degree-of-freedom system is established through Newton's second law, and from the system analytical solution it is found that the system has three fixed points unrelated to the damping ratio. The optimal frequency ratio of the dynamic vibration absorber is obtained based on the fixed-point theory. When screening the optimal grounded stiffness ratio, it is found that the inappropriate inerter coefficient will cause the system to generate instability. Then the best working range of the inerter is derived, and finally the optimal grounded stiffness ratio and approximate optimal damping ratio are also obtained. The working condition when the inerter coefficient is not within the best range is discussed, and the suggestions in practical application are given. The correctness of the analytical solution is verified by numerical simulation. Compared with other dynamic vibration absorbers under harmonic and random excitations, it is verified that the presented DVA can greatly reduce the amplitude of the primary system, widen the vibration reduction frequency band, and provide a theoretical basis for the design of new type of DVAs.

Key words dynamic vibration absorber, inerter, grounded stiffness, parameter optimization

引 言

动力吸振器 (dynamic vibration absorber, DVA) 是一种通过附加在主系统上的控制结构吸收主系统的振动能量, 降低主振动系统振动的装置. Frahm^[1] 于 1909 年发明了世界上第一种动力吸振器, 这种最初的 DVA 为无阻尼吸振器, 其减振频带有限, 亦称为窄带吸振器. Ormondroyd 等^[2-3] 在无阻尼 DVA 中加入阻尼设计出减振效果更好、适用范围更广的 Voigt 式 DVA, 首次提出了固定点理论, 并在专著中整理汇总了 DVA 最优参数的设计方法. Liu 等^[4] 设计了一种接地式 DVA 并计算了相应的最优参数. 申永军等^[5-7] 设计了多种半主动 on-off 控制 DVA, 通过平均法进行了参数优化和控制效果比较, 并分析了时滞特性对半主动控制的影响. 邢子康等^[8] 设计出一种新型接地式三要素型动力吸振器, 发现系统存在局部最优参数并分析了其性能. 李涵等^[9] 利用 H_2 优化原理对随机激励下的新型滚珠式动力吸振器进行了参数最优设计. 白世鹏等^[10] 研究了布置在不同位置处动力吸振器对车辆垂向振动耗散功率及悬架性能的影响. 张卫华等^[11] 采用牵引电机作为动力吸振器来控制转向架蛇行运动稳定性和蛇行频率, 从而避免引起车体弹性模态共振. 刘兴天等^[12] 提出了一种几何非线性摩擦阻尼模型用于分析隔振系统的动力学特性. 张婉洁等^[13] 研究了 3 种基于相对速度反馈的含立方刚度的单自由度非线性半主动隔振系统, 通过平均法得到了其主共振响应的近似解析解.

负刚度元件因其承载能力大、变形小、可控性好的优点, 近年来被广泛应用于系统减振之中. Acar

等^[14] 提出了可以有效降低主系统振幅的含负刚度无阻尼 DVA. 申永军等^[15-18] 将负刚度元件接地并应用到多种吸振器之中, 证明了含合理负刚度元件的吸振器有着良好的减振性能, 特别是文献 [18] 发现在放大比和质量比耦合项达到一定值后, 最优接地刚度比为正值且系统具有更好的吸振特性. 邢昭阳等^[19] 将放大机构应用于含负刚度弹簧元件的动力吸振器模型, 对该模型的最优参数进行了研究. 李昊等^[20] 提出了一种新型准零刚度隔振装置, 并对其隔振效果进行了仿真和试验分析. Zhou 等^[21] 提出了两种含负刚度元件的动力吸振器模型, 使用 H_∞ 准则和稳定性最大化准则进行了优化.

惯容是一种与两端点加速度相关的新型结构控制元件, 在减振控制领域有着较为广泛的应用. Chen 等^[22] 研究了惯容对隔振系统频率的影响. 杨晓峰等^[23] 研究了含惯容的 DVA 与主系统的连接方法与耦合关系, 提出了车辆 ISD 悬架结构设计方法. Hu 等^[24-25] 将惯容应用到隔振、吸振系统中, 证明了惯容有着良好的减振隔振特性. Wang 等^[26-27] 设计了多种含惯容的动力吸振器并推导出其对应的最优参数设计公式. 陈杰等^[28] 提出了两种用于抑制梁振动的含惯容和负刚度动力吸振器模型. Gioacchino 等^[29] 将菱形支架和惯容组合, 提出了一种改进的惯容式动力吸振器. 王勇等^[30] 提出了一种相对加速度-相对速度控制策略调节的半主动惯容器, 并将其应用到隔振器中.

惯容可以在基本不改变结构物理质量的前提下改变系统的惯性特征, 接地刚度可以调整系统的刚度特性, 这两种器件均可改变系统固有频率, 进而提高

吸振器性能. 但目前的大多数研究仅仅是在吸振器中单独引入惯容或接地刚度结构. 而随着设备对抑制振动需求的增加, 此类吸振器的性能难以满足工程实践需求的增长. 少部分同时含有两种元件的吸振器也仅是将惯容接地, 相当于增加了子系统质量, 并不能体现惯容的两端点惯性特征. 本文旨在研究惯容和接地刚度的共同作用对系统稳定性和吸振特性产生的影响, 提高吸振器的减振特性.

通过在经典 Voigt 型动力吸振器中附加惯容和接地弹簧元件, 设计出一种新型动力吸振器模型. 利用固定点理论对该模型的刚度和阻尼进行了参数优化, 发现惯容和接地刚度共同作用时, 惯容存在最佳工作范围. 通过与其他类型动力吸振器模型进行对比, 证明了含惯容和接地刚度的模型在减振方面有着很大优势, 能够极大地降低主系统振幅, 同时拓宽了减振频带, 为工程实践中设计新型有效的动力吸振器提供参考.

1 动力吸振器模型及参数优化

图 1 为本文所提出的动力吸振器模型, 其中 m_1 和 m_2 分别表示主系统质量和动力吸振器质量, k_1 和 k_2 分别表示主系统和吸振器刚度, k_3 表示接地弹簧刚度系数, c 表示吸振器阻尼系数, b 表示惯容系数, F_0 与 ω 分别代表激振力的振幅与频率.

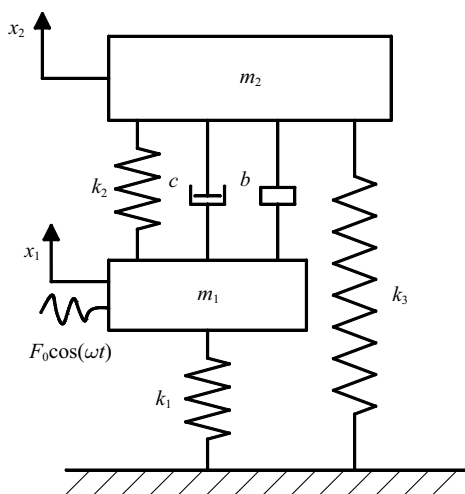


图 1 含惯容和接地刚度的动力吸振器模型

Fig. 1 Dynamic vibration absorber model with inerter and grounded stiffness spring

根据牛顿第二定律可得该系统的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \\ b (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = F_0 \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \\ b (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

引入以下参数

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \xi = \frac{c}{2m_2\omega_2}$$

$$f = \frac{F_0}{m_1}, \quad \alpha = \frac{k_3}{k_1}, \quad \beta = \frac{b}{m_1}$$

式 (1) 可化为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \mu \omega_2^2 (x_1 - x_2) + 2\mu \omega_2 \xi (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \\ \beta (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = f \cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{\mu} \omega_1^2 x_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) + 2\omega_2 \xi (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \\ \frac{\beta}{\mu} (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1.1 解析解

设式 (1) 解的形式为

$$x_1 = X_1 e^{j\omega t}, \quad x_2 = X_2 e^{j\omega t} \quad (3)$$

其中 j 为虚数单位. 将式 (3) 代入式 (2) 得

$$X_1 = \frac{f(jA_1 + B_1)}{jC_1 + D_1}, \quad X_2 = \frac{f(jA_2 + B_2)}{jC_1 + D_1} \quad (4)$$

式中参数如下

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2\mu\omega\omega_2\xi \\ B_1 &= -\omega^2(\beta + \mu) + \alpha\omega_1^2 + \mu\omega_2^2 \\ C_1 &= 2\omega^3\omega_2\mu\xi(1 + \mu) - 2\omega_1^2\omega\omega_2\mu\xi(1 + \alpha) \\ D_1 &= \omega^4[\mu + (1 + \mu)] - \omega^2\omega_1^2(\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu) + \\ &\quad \alpha\omega_1^4 + \mu\omega_2^2[-\omega^2(1 + \mu) + \omega_1^2(1 + \alpha)] \\ A_2 &= 2\mu\omega\omega_2\xi \\ B_2 &= \mu\omega_2^2 - \omega^2\beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

引入参数

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad v = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad X_{st} = \frac{F_0}{k_1}$$

定义主系统振幅放大因子 A

$$A^2 = \left| \frac{X_1}{X_{st}} \right|^2 = \frac{\xi^2 A_3^2 + B_3^2}{\xi^2 C_2^2 + D_2^2} \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= 2v\mu\lambda \\ B_3 &= \alpha + v^2\mu - \lambda^2(\beta + \mu) \\ C_2 &= 2\mu v\lambda[1 + \alpha - \lambda^2(1 + \mu)] \\ D_2 &= \alpha - \lambda^2(\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu) + \lambda^4(\beta + \mu + \beta\mu) + \\ &\quad v^2\mu[1 + \alpha - \lambda^2(1 + \mu)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

令式 (6) 的分母等于 0 可得到系统的固有频率为

$$\omega_{1,2}' = \frac{(\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu)\omega_1^2 + \mu(1 + \mu)\omega_2^2 \mp \sqrt{\gamma}}{2(\beta + \mu + \beta\mu)} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma &= [2\alpha(-1 + \beta)\beta + \alpha^2(1 + \beta)^2 - 2\alpha\mu(1 + \beta) + \\ &\quad (\mu + \beta)^2]\omega_1^4 - 2\mu[\beta + \mu + (\beta - \mu)\mu + \\ &\quad \alpha(-1 + \beta + \mu + \beta\mu)]\omega_1^2\omega_2^2 + \mu^2(1 + \mu)^2\omega_2^4 \end{aligned}$$

1.2 最优参数

式 (6) 经简单推导, 可证明其归一化位移幅频曲线通过 3 个独立于阻尼比的点, 分别为频率比 $\lambda = 0$ 处的 Z 点、 $\lambda = 1$ 左右两侧的 P 和 Q 两点, 这 3 个点即为本吸振器模型主系统幅频曲线的固定点。为验证本模型的固定点同时便于进行后续优化, 现任取阻尼比分别为 0.3, 0.5 和 0.7, 绘制归一化位移幅频曲线如图 2 所示, 从图中可以清楚地观察到曲线均通过 Z、P 和 Q 三点。

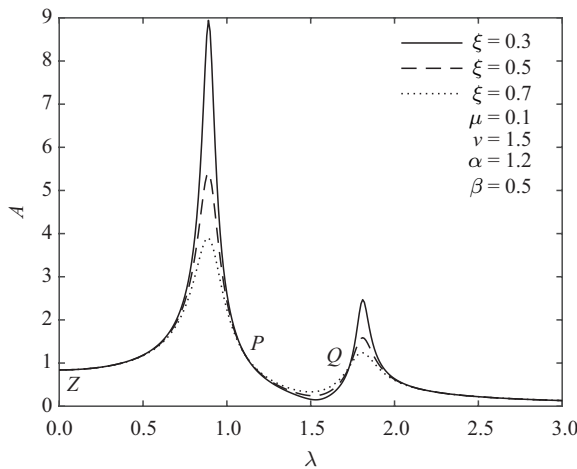


图 2 不同阻尼比下的归一化幅频响应曲线

Fig. 2 Normalized amplitude frequency response curves under different damping ratios

根据固定点理论, 为了使两固定点处纵坐标相等, 只需使阻尼比趋于零和无穷时的响应值相等, 即

$$\left| \frac{A_3}{C_2} \right| = \left| \frac{B_3}{D_2} \right| \quad (9)$$

代入可得

$$\frac{2v\lambda\mu}{2v\lambda\mu[1 + \alpha - \lambda^2(1 + \mu)]} = -\frac{[\alpha + v^2\mu - \lambda^2(\beta + \mu)]}{\{\alpha - \lambda^2(\alpha + \beta + \alpha\beta + \mu) + \lambda^4(\beta + \mu + \beta\mu) + v^2\mu[1 + \alpha - \lambda^2(1 + \mu)]\}} \quad (10)$$

化简得

$$\begin{aligned} 2\alpha + \alpha^2 + 2v^2\mu + 2v^2\alpha\mu + \lambda^4[2\beta(1 + \mu) + \\ \mu(2 + \mu)] + \lambda^2[-2\beta - 2\mu - 2v^2\mu(1 + \mu) - \\ 2\alpha(1 + \beta + \mu)] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

假设式 (11) 存在 2 个实根 λ_P 和 λ_Q , 由韦达定理可得

$$\lambda_P^2 + \lambda_Q^2 = \frac{2[\beta + \mu + v^2\mu(1 + \mu) + \alpha(1 + \beta + \mu)]}{2\beta(1 + \mu) + \mu(2 + \mu)} \quad (12)$$

同时根据固定点理论, 为使两固定点等高且幅频峰值位于两固定点处, 令 λ_P 和 λ_Q 处的响应值相等可得

$$\frac{1}{1 + \alpha - (1 + \mu)\lambda_P^2} = \frac{1}{1 + \alpha - (1 + \mu)\lambda_Q^2} \quad (13)$$

化简得

$$\frac{-2(1 + \alpha) + (1 + \mu)\lambda_P^2 + (1 + \mu)\lambda_Q^2}{[1 + \alpha - (1 + \mu)\lambda_P^2][1 + \alpha - (1 + \mu)\lambda_Q^2]} = 0 \quad (14)$$

联立式 (12) 和式 (14) 并化简可得

$$\begin{aligned} 2\beta(1 + \mu) + 2\alpha(-1 + \beta + \beta\mu) - \\ 2\mu[-1 + v^2(1 + \mu)^2] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

由式 (15) 解得最优频率比为

$$v_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{\beta + \mu + \beta\mu + \alpha(-1 + \beta + \beta\mu)}}{(1 + \mu)\sqrt{\mu}} \quad (16)$$

将最优频率比代入式 (10) 可得两个固定点处的横坐标

$$\lambda_P^2 = \frac{1 + \alpha}{1 + \mu} - \frac{\alpha - \mu}{1 + \mu} \sqrt{\frac{1}{2\beta(1 + \mu) + \mu(2 + \mu)}} \quad (17a)$$

$$\lambda_Q^2 = \frac{1 + \alpha}{1 + \mu} + \frac{\alpha - \mu}{1 + \mu} \sqrt{\frac{1}{2\beta(1 + \mu) + \mu(2 + \mu)}} \quad (17b)$$

当频率比取最优值时, P 和 Q 两个固定点处响应的纵坐标均为

$$A|_{(\lambda_P, \lambda_Q)} = \frac{\sqrt{2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)}}{\alpha - \mu} \quad (18)$$

根据式 (18), 当质量比 μ 和惯容比 β 为常数时, 接地刚度比 α 也会影响系统的控制性能, 图 2 中 $\omega = 0$ 处的 Z 点也与阻尼比无关. 为使幅频曲线的峰值最小, 可进一步将 3 个固定点 P , Q 和 Z 调整到同一高度, 于是令

$$A^2|_{\lambda=0} = A^2|_{(\lambda_P, \lambda_Q)} \quad (19)$$

即

$$\begin{aligned} & [\mu + (1+\alpha)\beta(1+\mu) + \alpha\mu(2+\mu)]^2 / [\beta + \mu + \beta\mu + \\ & 2\alpha\beta(1+\mu) + \alpha\mu(3+\mu) + \alpha^2(-1+\beta+\beta\mu)]^2 = \\ & \frac{2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)}{(\alpha - \mu)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

求解式 (20) 所有可能的最优刚度比

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} = & \left[-2\beta(1+\mu) - \mu(3+\mu) \pm (1+\mu) \cdot \right. \\ & \left. \sqrt{2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)} \right] / \\ & [-1 + 2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)] \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{3,4} = & \left[\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu) \pm (1+\mu) \cdot \right. \\ & \left. \sqrt{2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)} \right] / \\ & [2 + \mu - \beta(1+\mu)] \end{aligned} \quad (21b)$$

经计算可知, 当惯容比取不恰当的值时, 上述 4 个可能的最优解均会引起系统失稳, 故推知在动力吸振器的最优设计过程中, 在保证系统稳定性的前提下, 惯容存在最佳工作范围. 现有惯容元件的惯容系数均为正且质量比为正, 由式 (17)、式 (18) 和式 (21) 表达式易知式中根号下部分均大于 0, 故现将上述每个刚度比分别代入式 (16) 中并令其大于 0 求解惯容比 β , 可初步得到每个可能最优刚度比所对应的惯容工作范围. 进而将上述求得的刚度比分别代入式 (8) 中, 在满足各自对应的惯容工作范围内, 发现只有 α_3 能保证系统的固有频率均为正值, 所以本文模型的最优接地刚度比为 α_3 , 即

$$\alpha_{\text{opt}} = \alpha_3 = \left[\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu) + (1+\mu) \cdot \sqrt{2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)} \right] / [2 + \mu - \beta(1+\mu)] \quad (22)$$

至此, 已经得到了最优频率比与最优接地刚度比, 固定点 P 和 Q 已经被调整到同一高度. 由于 P 和 Q 两固定点的坐标与阻尼比 ξ 的取值无关, 为了达到最优的减振效果, 须使两固定点成为位移幅频曲线的最高点或近似最高点. 由极值条件可知, 幅频曲线在两固定点处的导数为零, 即

$$\frac{\partial A^2}{\partial \lambda_P^2} = 0, \quad \frac{\partial A^2}{\partial \lambda_Q^2} = 0 \quad (23)$$

由式 (23) 可以得到使 P 和 Q 两固定点成为或近似成为幅频曲线最高点时 ξ_1 和 ξ_2 的值, 进而得到最优阻尼比 $\xi_{\text{opt}} = (\xi_1 + \xi_2) / 2$, 但是这种方法有时难以得到解析结果. 因此使用文献 [4] 中的方法求出阻尼比的近似值.

为了使幅频曲线水平通过 P 点, 先假设其通过邻近点 P' , P' 点的坐标为 $(\lambda_{P'}, A_{P'})$, 令

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{P'}^2 &= \lambda_P^2 + \delta \\ A_{P'} &= A = \frac{\sqrt{2\beta(1+\mu) + \mu(2+\mu)}}{\alpha - \mu} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中 $\delta \rightarrow 0$.

将式 (24) 代入式 (6) 可得到关于 ξ_1^2 的表达式

$$\xi_1^2 = -\frac{(a+b+c)(d+e+g)}{h} \quad (25)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu \left\{ \left[-1 + A_{P'} \left(-1 + \lambda_{P'}^2 \right) \right] \left(v^2 - \lambda_{P'}^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. A_{P'} v^2 \lambda_{P'}^2 \mu \right\} \\ b &= \alpha \left[-1 + A_{P'} \left(-1 + \lambda_{P'}^2 + \beta \lambda_{P'}^2 - v^2 \mu \right) \right] \\ c &= \beta \lambda_{P'}^2 \left[1 - A_{P'} \left(-1 + \lambda_{P'}^2 + \lambda_{P'}^2 \mu \right) \right] \\ d &= \alpha + A_{P'} \alpha \left(-1 + \lambda_{P'}^2 + \beta \lambda_{P'}^2 - v^2 \mu \right) \\ e &= \mu \left\{ \left[1 + A_{P'} \left(-1 + \lambda_{P'}^2 \right) \right] \left(v^2 - \lambda_{P'}^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. A_{P'} v^2 \lambda_{P'}^2 \mu \right\} \\ g &= -\beta \lambda_{P'}^2 \left[1 + A_{P'} \left(-1 + \lambda_{P'}^2 + \lambda_{P'}^2 \mu \right) \right] \\ h &= 4v^2 \lambda_{P'}^2 \mu^2 \left\{ -1 + A_{P'}^2 \left[1 + \alpha - \lambda_{P'}^2 (1 + \mu) \right]^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

将式 (25) 展开后, 可得

$$\xi_1^2 = \frac{a_0 + a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + \cdots}{b_0 + b_1 \delta + b_2 \delta^2 + b_3 \delta^3 + \cdots} \quad (27)$$

如果 $\delta = 0$, 式 (25) 为 0/0 形式的不定式, 于是得到 $a_0 = b_0 = 0$. 由于 δ 是一个非常小的量, 在式 (27) 中可以忽略其高次项, 此时的阻尼比为

$$\xi_1^2 = \frac{a_1}{b_1} \quad (28)$$

因此只需要找到式 (27) 的分子与分母中所有 δ 的一次项系数

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2\left\{ -(\beta + \mu)(\alpha + v^2\mu) + (\beta + \mu)^2 \lambda_p^2 + \right. \\ &\quad A_p^2[\beta + \alpha(1 + \beta) + \mu + v^2\mu(1 + \mu) - \\ &\quad 2(\beta + \mu + \beta\mu)\lambda_p^2]\{\alpha + v^2(1 + \alpha)\mu - \\ &\quad [\beta + \alpha(1 + \beta) + \mu + v^2\mu(1 + \mu)]\lambda_p^2 + \\ &\quad (\beta + \mu + \beta\mu)\lambda_p^4\} \\ b_1 &= 4v^2\mu^2\left\{ -1 + A_p^2[(1 + \alpha)^2 - 4(1 + \alpha) \cdot \right. \\ &\quad \left. (1 + \mu)\lambda_p^2 + 3(1 + \mu)^2\lambda_p^4\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

将式 (16)~式 (18) 及式 (22) 代入式 (28), 得到使幅频曲线水平通过 P 点时的阻尼比

$$\xi_1^2 = \frac{1}{4\Delta} \left\{ -(\beta + \mu) - \frac{(-2 + \Delta)\mu}{(1 + \mu)[-1 + 2\beta(1 + \mu)]} \cdot \frac{\beta[3\beta(1 + \Delta - \mu)(1 + \mu) + \mu[5 - 2\mu + 2\Delta(1 + \mu)]]}{\mu[-1 + 2\beta(1 + \mu)]} \right\} \quad (30)$$

同理可得到使幅频曲线水平通过 Q 点时的阻尼比

$$\xi_2^2 = \frac{1}{4\Delta} \left\{ -(\beta + \mu) - \frac{\mu\Delta}{(1 + \mu)[-1 + 2\beta(1 + \mu)]} + \frac{\beta[\beta(1 + \Delta - \mu)(1 + \mu) + \mu(1 + 2\Delta\mu)]}{\mu[-1 + 2\beta(1 + \mu)]} \right\} \quad (31)$$

通过上述推导, 最终求得本模型的近似最优阻尼比为

$$\xi_{opt}^2 \cong \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{\Delta}{1 + \mu} + \frac{\beta}{\mu} \left[1 + \frac{1 + \Delta - \mu}{-1 + 2\beta(1 + \mu)} \right] + \frac{1}{(1 + \mu)[-1 + 2\beta(1 + \mu)]} \right\} \quad (32)$$

其中

$$\Delta = \sqrt{2\beta(1 + \mu) + \mu(2 + \mu)}$$

1.3 惯容最佳工作范围

在筛选最优接地刚度比 α_{opt} 时, 已经验证过其满足系统的固有频率大于 0. 考虑各最优参数及其计算过程, 惯容的工作范围应同时满足各表达式分母不等于 0, 根号下部分大于 0, 最优频率比 v_{opt} 和最优阻尼比 ξ_{opt}^2 大于 0.

将最优接地刚度比 α_{opt} 代入最优频率比 v_{opt} 中可得

$$v_{opt} \Big|_{\alpha=\alpha_{opt}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}(1 + \mu)} \cdot \left\{ \beta + \mu + \beta\mu + \frac{(-1 + \beta + \beta\mu)[(\beta + \Delta)(1 + \mu) + \mu(2 + \mu)]}{2 + \mu - \beta(1 + \mu)} \right\}^{1/2} \quad (33)$$

因此惯容比 β 应该满足

$$\left. \begin{aligned} v_{opt} \Big|_{\alpha=\alpha_{opt}} &> 0 \\ 2\beta(1 + \mu) + \mu(2 + \mu) &> 0 \\ \mu &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

求解式 (34) 得

$$\frac{1}{2 + 2\mu} < \beta < \frac{2 + \mu}{1 + \mu} \quad (35)$$

2 数值仿真

2.1 数值解与解析解对比

为了验证求解过程的正确性, 选取质量比 $\mu = 0.1$, 此时惯容最佳工作范围为 (0.454 5, 1.909 1), 选取惯容比 $\beta = 0.5$, 激励幅值 $F_0 = 1000$ N, 根据前面的优化结果得到最优参数分别为 $\alpha = 1.302 6$, $v = 0.726 3$, $\xi = 5.391 6$. 使用四阶龙格库塔法, 选取计算时间为 500 s, 可以得到在给定简谐激励下的数值解. 略去瞬态响应, 选取稳态解的最大值为响应幅值并进行归一化处理, 从而可以得到归一化的幅频曲线. 图 3 给出了系统的解析解与数值解曲线, 黑色实线为系统的解析解, 黑色圆圈绘制的曲线为系统的数值解. 从

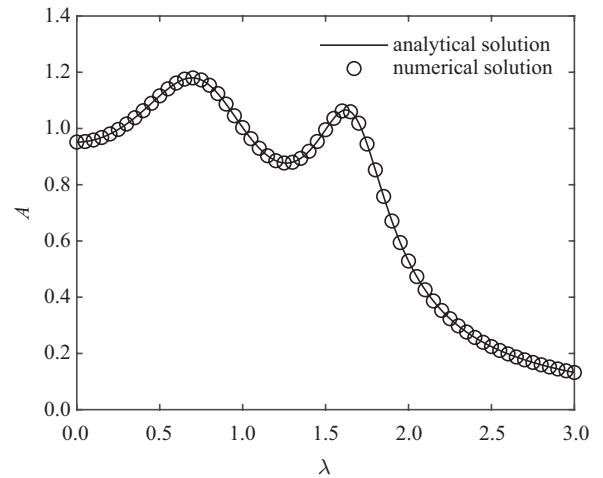


图 3 系统解析解与数值解对比

Fig. 3 Comparison between the analytical solution and numerical solution of the system response

图中可以看出, 解析解与数值解完全吻合, 验证了本文求解过程和各最优参数的正确性, 并且证实了最优参数的良好控制效果.

2.2 惯容对主系统响应的影响

2.2.1 最佳工作范围内惯容比对主系统振幅放大因子的影响

选取质量比 $\mu = 0.1$, 此时惯容最佳工作范围为 $(0.454\ 5, 1.909\ 1)$. 进一步选取 $\beta = 0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 1.8$, 相应的系统最优参数值详见表 1, 并绘制幅频响应曲线如图 4. 由图 4 可知, 在惯容最佳工作范围内, 惯容比 β 越大, 主系统归一化位移振幅放大因子越小, 两个纵坐标峰值高度越接近, 峰值对应的横坐标相隔越远. 即惯容系数越大, 系统共振区振幅越小, 减振频带越宽. 由表 1 数据可知, 在惯容最佳工作范围内, 惯容比 β 越大, 系统最优频率比 ν_{opt} 越大, 最优刚度比 α_{opt} 越大, 最优

阻尼比 ξ_{opt} 先减小后增大; 且越接近惯容最佳范围上限, 理论最优频率比和刚度比增大的趋势越大.

2.2.2 最佳工作范围外惯容比对主系统振幅放大因子的影响

当惯容比取值为最佳工作范围外的值时, 使用前面的优化结果会得到不合理的最优值, 如负的频率、阻尼等, 因此这些优化结果便不再适用. 在工程实践中, 如因某些不可避免的因素导致惯容系数无法取最优范围内的数值, 可采取折中的设计. 当惯容比小于最佳工作范围时, 可按照惯容比略大于下限时对应的最优参数进行吸振器的设计和使用. 例如当质量比为 $\mu = 0.1$ 而惯容比分别为 $\beta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 时, 均取略大于最佳范围下限的值 $\beta = 0.454\ 6$. 此时对应的最优设计参数为 $\alpha = 1.200\ 1, \nu = 0.024\ 4, \xi = 144.351\ 2$. 激励幅值取 $F_0 = 1000\ \text{N}$, 在 Matlab 软件中进行仿真模拟, 得到图 5. 由图 5 可以观察到, 如此设计吸振器, 仍具有良好的减振效果.

表 1 惯容比取不同值时系统各最优参数取值

Table 1 Specific parameters of the system in different cases of inerter-to-mass ratio

β	ν_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}
0.5	0.726 3	1.302 6	5.391 6
0.8	2.440 9	2.159 0	2.879 6
1.0	3.523 0	3.017 7	2.774 1
1.2	4.818 6	4.342 3	2.782 0
1.5	7.827 4	8.713 0	2.862 7
1.8	17.793 5	36.968 9	2.972 4

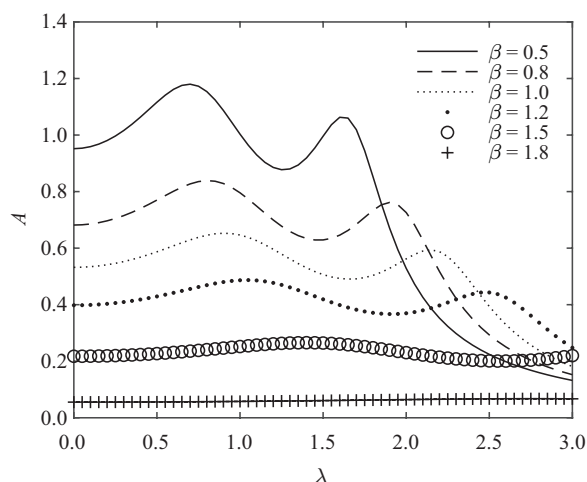


图 4 惯容比对归一化位移振幅放大因子的影响

Fig. 4 Comparison of the normalized amplitude magnification factors of the primary systems for different inerter-to-mass ratios

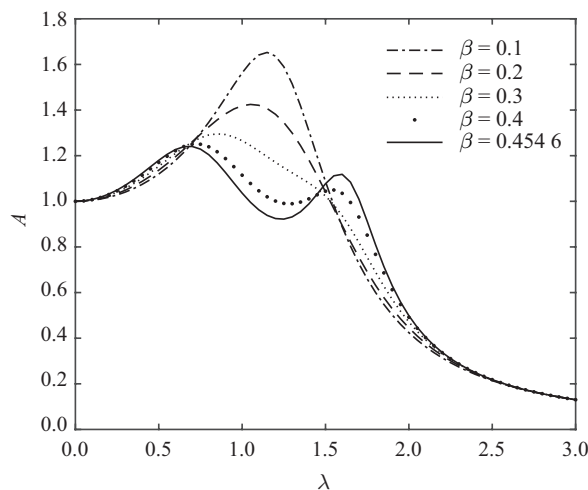


图 5 惯容比小于最佳范围下限时主系统响应情况

Fig. 5 Response of primary systems when the inerter-to-mass ratio is less than the lower limit of the optimal range

当惯容比大于最佳工作范围时, 质量比 $\mu = 0.1$, 略小于最佳范围上限的惯容比值 $\beta = 1.909\ 0$, 对应的理想最优设计参数为 $\alpha = 46\ 198.476\ 2, \nu = 648.048\ 0, \xi = 3.015\ 1$. 显然此时接地弹簧刚度系数过大, 在实际应用中难以实现, 故应尽量避免惯容系数取值过大的情况.

3 与其他动力吸振器模型对比

为验证本文提出的动力吸振器模型的减振效果, 将该模型 (后文称之为 IG-Voigt 模型) 与经典 Voigt

型动力吸振器、接地型动力吸振器^[2-4] 及文献 [13] 中附加负刚度元件的 Voigt 型动力吸振器 (后文称之为 N-Voigt 模型) 进行了对比, 3 种对比吸振器模型如图 6 所示, 各模型对应的最优参数公式详见表 2。

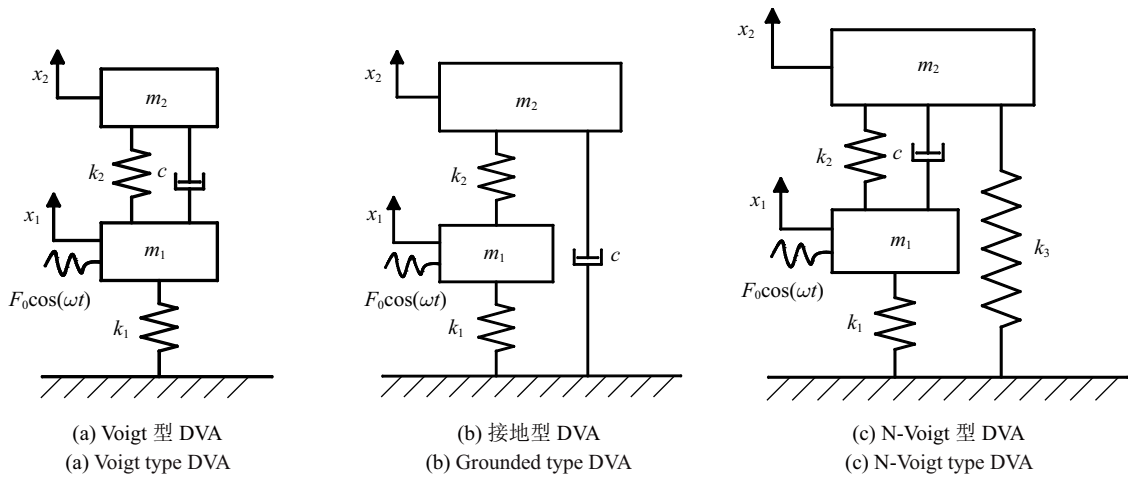


图 6 现有动力吸振器模型

Fig. 6 Existing models of dynamic vibration absorbers

表 2 吸振器模型参数最优设计公式

Table 2 Optimal design formula for model parameters of DVAs

Model of DVA	ν_{opt}	ξ_{opt}	α'_{opt}
Voigt DVA	$1/(1+\mu)$	$\sqrt{3\mu/[8(1+\mu)]}$	—
Grounded DVA	$\sqrt{1/(1-\mu)}$	$\sqrt{3\mu/[8(1-0.5\mu)]}$	—
N-Voigt DVA	$\sqrt{1/[\alpha' + (1+\mu)^2]}$	$\frac{1}{2}\sqrt{[\mu + \sqrt{\mu(2+\mu)}]/(1+\mu)}$	$-1 - \mu(2+\mu) + (1+\mu)\sqrt{\mu(2+\mu)}$

注: N-Voigt 模型中刚度比定义为 $\alpha' = k_3/k_2$

3.1 简谐激励下的响应对比

工程中很多设备尤其是旋转机械经常受到简谐激励, 因此首先比较不同激励频率下各模型的减振效果. 各模型均取质量比 $\mu = 0.1$, 本文模型惯容比取 $\beta = 0.5$, 并按照前面推出和表 2 中已有的最优参数设计公式, 计算相关参数, 仿真不同频率简谐激励下主系统的位移响应, 得到各模型归一化位移幅频曲线如图 7 所示。

从图 7 中可以看出, 在质量比相同的情况下, 本文模型相对于其他类型的动力吸振器可大幅降低主系统振幅, 并且产生的两个共振峰值的间距更大, 峰谷也更低, 从而同时拓宽了减振频带。

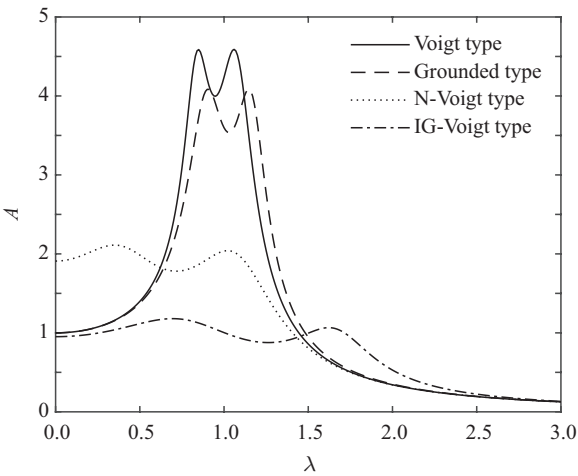


图 7 与其他形式吸振器模型对比

Fig. 7 Comparison with other DVA models

3.2 随机激励下的响应对比

在土木和建筑工程中系统所受的激励多为随机激励, 因此本文进一步研究了宽频随机噪声激励下的主系统响应情况. 设主系统受到均值为零、功率谱密度为 $S(\omega) = S_0$ 的白噪声激励, 则前述 4 种模型主系统位移响应的功率谱密度函数分别为

$$\left. \begin{aligned} S_V(\omega) &= |X_{V1}|^2 S_0, S_R(\omega) = |X_{R1}|^2 S_0 \\ S_N(\omega) &= |X_{N1}|^2 S_0, S_{IG}(\omega) = |X_{IG1}|^2 S_0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中下标 V, R, N, IG 分别代表 Voigt 式动力吸振器模型、接地型动力吸振器模型、N-Voigt 型动力吸振器模型以及本文模型. 这 4 种动力吸振器模型的主系统位移均方值为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_V^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_V(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |X_{V1}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 Y_1}{2\omega_1^3 \mu \xi v} \\ \sigma_R^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_R(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |X_{R1}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 Y_2}{2\omega_1^3 \mu \xi v^5} \\ \sigma_N^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |X_{N1}|^2 d\omega = \\ &\quad \frac{\pi S_0 Y_3}{2\omega_1^3 \mu \xi v (-1 + v^2 \alpha')^2 (1 + \alpha' + v^2 \alpha' \mu)} \\ \sigma_{IG}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{IG}(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |X_{IG1}|^2 d\omega = \\ &\quad \frac{\pi S_0 Y_4}{2\omega_1^3 \mu \xi v (\alpha - \mu)^2 [\alpha + v^2 (1 + \alpha) \mu]} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= 1 + v^4 (1 + \mu)^2 + v^2 [-2 - \mu + 4\xi^2 (1 + \mu)] \\ Y_2 &= 1 + v^4 + v^2 (-2 + 4\xi^2 + \mu) \\ Y_3 &= (1 + \alpha') \left\{ [-1 + v^2 (1 + \alpha')]^2 + 4v^2 \xi^2 \right\} + \\ &\quad v^4 \mu^2 (1 + 4\alpha' \xi^2) + v^2 \mu [-1 + 4(1 + \alpha') \xi^2 + \\ &\quad 2v^2 (1 + \alpha' + 2\alpha' \xi^2)] \\ Y_4 &= \alpha^3 + \alpha^2 \{ (-2 + \beta) \beta + [-2 + v^2 (3 + \\ &\quad (-2 + \beta) \beta)] \mu \} + v^2 \mu \{ \beta^2 - 2\beta \mu [-1 + \\ &\quad v^2 (1 + \mu)] \} + \mu^2 \{ 1 + v^4 (1 + \mu)^2 + \\ &\quad v^2 [-2 - \mu + 4\xi^2 (1 + \mu)] \} + \\ &\quad \alpha \{ \beta^2 (1 + 2v^2 \mu) - 2\beta \mu [-1 + 2v^2 + \\ &\quad v^4 \mu (1 + \mu)] \} + \mu^2 + \{ 1 + 4v^2 [-1 + \\ &\quad \xi^2 (1 + \mu)] \} + v^4 [3 + 2\mu + 4\xi^2 \mu (1 + \mu)] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

假设 4 种动力吸振器中质量比均取 $\mu = 0.1$, 本模型惯容比取 $\beta = 0.5$, 根据相应优化公式得到各自的均方值分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_V^2 &= \frac{6.401\pi S_0}{\omega_1^3}, \sigma_R^2 = \frac{5.780\pi S_0}{\omega_1^3} \\ \sigma_N^2 &= \frac{3.302\pi S_0}{\omega_1^3}, \sigma_{IG}^2 = \frac{1.316\pi S_0}{\omega_1^3} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

结果表明, 当初始参数相同时, 在随机激励情况下本文模型仍具有良好的减振效果.

为了更真实地模拟工程实际, 本文构建了 50 s 均值为 0、方差为 1 的随机激励, 其时间历程如图 8 所示. 由于系统振动能量可由主系统位移方差衡量, 选取主系统质量 $m_1 = 1 \text{ kg}$, 主系统刚度 $k_1 = 100 \text{ N/m}$, 在表 3 中总结了主系统位移方差及其衰减比.

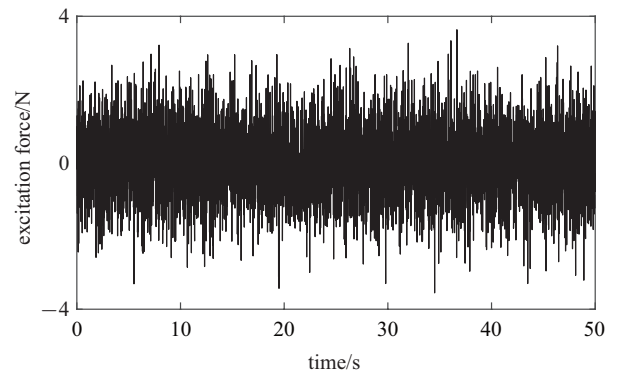


图 8 随机激励时间历程

Fig. 8 Time history of the random excitation

表 3 主系统响应方差及其衰减比

Table 3 Variances and decrease ratios of the displacements of the primary systems

Model of DVA	Displacement variances/ m^2	Reduction ratio/%
No DVA	2.0083×10^{-4}	—
Voigt DVA	3.1235×10^{-5}	84.45
Grounded DVA	2.8560×10^{-5}	85.78
N-Voigt DVA	1.3596×10^{-5}	93.23
IG-Voigt DVA	5.5609×10^{-6}	97.23

由表 3 可以看出, 虽然已有模型和本文模型都是依据 H_∞ 优化准则进行设计的, 但是本文模型仍然能够在整个频率范围内大幅降低主系统的振动能量, 比其他 3 种模型具有更良好的减振性能.

4 结论

提出了一种含惯容和接地刚度的动力吸振器模型, 对该模型进行了参数优化, 得到了最优频率比、最优刚度比和近似最优阻尼比。发现惯容和接地刚度共同作用时, 在最优设计过程中, 不恰当的惯容系数会使系统出现失稳现象, 由此得到了惯容的最佳工作范围。分析了惯容比取其最佳工作范围内外值时吸振器的减振效果, 为实际生产中设计新型吸振器提供参考。通过与其它类型的动力吸振器对比, 说明了合理惯容和接地刚度的引入能够大幅降低主系统振幅, 拓宽减振频率, 带来良好的减振效果。

参 考 文 献

- 1 Frahm H. Device for damping vibrations of bodies. U.S. Patent 089958, 1909-10-30
- 2 Ormondroyd J, Den Hartog JP. The theory of the dynamic vibration absorber. *Journal of Applied Mechanics*, 1928, 50: 9-22
- 3 Den Hartog JP. *Mechanical Vibrations*. New York: McGraw-Hall Book Company, 1947: 112-132
- 4 Liu KF, Liu J. The damped dynamic vibration absorbers: Revisited and new result. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 284(3): 1181-1189
- 5 Shen YJ, Wang L, Yang SP, et al. Nonlinear dynamical analysis and parameters optimization of four semi-active on-off dynamic vibration absorbers. *Journal of Vibration and Control*, 2013, 19(1): 143-160
- 6 Shen YJ, Ahmadian M. Nonlinear dynamical analysis on four semi-active dynamic vibration absorbers with time delay. *Shock and Vibration*, 2013, 20(4): 649-663
- 7 郎君, 申永军, 杨绍普. 一种半主动动力吸振器参数优化及性能比较. *振动与冲击*, 2019, 38(17): 172-177 (Lang Jun, Shen Yongjun, Yang Shaopu. Parametric optimization and performance comparison for 2 semi-active Voigt DVAs. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(17): 172-177 (in Chinese))
- 8 邢子康, 申永军, 李向红. 接地式三要素型动力吸振器性能分析. *力学学报*, 2019, 51(5): 1466-1475 (Xing Zikang, Shen Yongjun, Li Xianghong. Performance analysis of grounded three-element dynamic vibration absorber. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(5): 1466-1475 (in Chinese))
- 9 李涵, 张小龙, 张凯等. 随机激励下新型滚珠式吸振器的参数最优设计. *噪声与振动控制*, 2020, 40(6): 41-45, 72 (Li Han, Zhang Xiaolong, Zhang Kai, et al. Optimal parameters design of a ball type dynamic vibration absorber under random excitation. *Noise and Vibration Control*, 2020, 40(6): 41-45, 72 (in Chinese))
- 10 白世鹏, 侯之超. 动力吸振器对车辆垂向振动能量及悬架性能的影响. *振动与冲击*, 2020, 39(22): 169-174 (Bai Shipeng, Hou Zhichao. Impact of dynamic vibration absorbers on vehicle vertical vibration energy and suspension performances. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(22): 169-174 (in Chinese))
- 11 张卫华, 罗仁, 宋春元等. 基于电机动力吸振的高速列车蛇行运动控制. *交通运输工程学报*, 2020, 20(5): 125-134 (Zhang Weihua, Luo Ren, Song Chunyuan, et al. Hunting control of high-speed train using traction motor as dynamic absorber. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2020, 20(5): 125-134 (in Chinese))
- 12 刘兴天, 陈树海, 王嘉登等. 几何非线性摩擦阻尼隔振系统动力学行为研究. *力学学报*, 2019, 51(2): 371-379 (Liu Xingtian, Chen Shuhai, Wang Jiadeng, et al. Analysis of the dynamic behavior and performance of a vibration isolation system with geometric nonlinear friction damping. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 371-379 (in Chinese))
- 13 张婉洁, 牛江川, 申永军等. 一类阻尼控制半主动隔振系统的解析研究. *力学学报*, 2020, 52(6): 1743-1754 (Zhang Wanjie, Niu Jiangchuan, Shen Yongjun, et al. Dynamical analysis on a kind of semi-active vibration isolation systems with damping control. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(6): 1743-1754 (in Chinese))
- 14 Acar MA, Yilmaz C. Design of an adaptive-passive dynamic vibration absorber composed of a string-mass system equipped with negative stiffness tension adjusting mechanism. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(2): 231-245
- 15 彭海波, 申永军, 杨绍普. 一种含负刚度元件的新型动力吸振器的参数优化. *力学学报*, 2015, 47(2): 320-327 (Peng Haibo, Shen Yongjun, Yang Shaopu. Parameter optimization of a new type of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(2): 320-327 (in Chinese))
- 16 王孝然, 申永军, 杨绍普等. 含负刚度元件的三要素型动力吸振器的参数优化. *振动工程学报*, 2017, 30(2): 177-184 (Wang Xiaoran, Shen Yongjun, Yang Shaopu, et al. Parameter optimization of three-element type dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Journal of Vibration Engineering*, 2017, 30(2): 177-184 (in Chinese))
- 17 Shen YJ, Peng HB, Li XH, et al. Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 85: 192-203
- 18 Shen YJ, Xing ZY, Yang SP, et al. Parameters optimization for a novel dynamic vibration absorber. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 133: 106282
- 19 邢昭阳, 申永军, 邢海军等. 一种含放大机构的负刚度动力吸振器的参数优化. *力学学报*, 2019, 51(3): 894-903 (Xing Zhaoyang, Shen Yongjun, Xing Haijun, et al. Parameters optimization of a dynamic vibration absorber with amplifying mechanism and negative stiffness. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 894-903 (in Chinese))
- 20 李昊, 赵发刚, 周徐斌. 基于混杂双稳定层合板的准零刚度隔振装置. *力学学报*, 2019, 51(2): 354-363 (Li Hao, Zhao Fagang, Zhou Xubin. A quasi-zero stiffness vibration isolator based on hybrid bistable composite laminate. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 354-363 (in Chinese))
- 21 Zhou SY, Claire JM, Simon C, et al. Closed-form solutions to optimal parameters of dynamic vibration absorbers with negative stiffness under harmonic and transient excitation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 157-158: 528-541
- 22 Chen MZQ, Hu Y, Huang L, et al. Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems. *Journal of Sound & Vibration*, 2014, 333(7): 1874-1887
- 23 杨晓峰, 沈钰杰, 陈龙等. 基于动力吸振理论的车辆 ISD 悬架设计与性能分析. *汽车工程*, 2014, 36(10): 1262-1266, 1277 (Yang

- Xiaofeng, Shen Yujie, Chen Long, et al. Design and performances analysis of vehicle ISD suspension based on dynamic vibration absorber theory. *Automotive Engineering*, 2014, 36(10): 1262-1266, 1277 (in Chinese))
- 24 Hu Y, Chen M ZQ. Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 99: 297-307
- 25 Hu Y, Chen M ZQ, Shu Z, et al. Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 346(1): 17-36
- 26 Wang XR, Liu XD, Shan YC, et al. Analysis and optimization of the novel inerter-based dynamic vibration absorbers. *IEEE Access*, 2018, 6: 2844086
- 27 Wang XR, He T, Shen YJ, et al. Parameters optimization and performance evaluation for the novel inerter-based dynamic vibration absorbers with negative stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 463: 114941
- 28 陈杰, 孙维光, 吴杨俊等. 基于惯容负刚度动力吸振器的梁响应最小化. *振动与冲击*, 2020, 39(8): 15-22 (Chen Jie, Sun Weiguang, Wu Yangjun, et al. Minimization of beam response using inerter-based dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(8): 15-22 (in Chinese))
- 29 Gioacchino A, Giuseppe F. Improved inerter-based vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 192: 106087
- 30 王勇, 汪若尘, 孟浩东等. 基于相对加速度-相对速度控制的半主动惯容隔振器动态特性研究. *振动与冲击*, 2019, 38(21): 194-201, 228 (Wang Yong, Wang Ruochen, Meng Haodong, et al. Dynamic characteristics of semi active inerter-based vibration isolator with relative acceleration-relative velocity control. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(21): 194-201, 228 (in Chinese))