

# 多层地基条带基础动力刚度矩阵的精细积分算法<sup>1)</sup>

林 皋<sup>\*,2)</sup> 韩泽军<sup>\*</sup> 李伟东<sup>†</sup> 李建波<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>(大连理工大学建设工程学部, 大连 116024)

<sup>†</sup>(中南电力设计院, 武汉 430071)

**摘要** 提出应用精细积分算法计算多层地基的动力刚度问题. 精细积分是计算层状介质中波传播的高效而精确的数值方法. 利用傅里叶积分变换将层状地基的波动方程转换为频率-波数域内的两点边值问题的常微分方程组, 运用精细积分方法求解格林函数, 最后再将得到的频率-波数域内地基表面的动力刚度矩阵转换到频率-空间域内, 进而得到刚性条带基础频率域的动力柔度或刚度矩阵. 所建议的精细积分算法, 可以避免一般传递矩阵计算中的指数溢出问题, 对各种情况有广泛的适应性, 计算稳定, 在高频段可以保障收敛性, 并能达到较高的计算精度.

**关键词** 精细积分, 层状地基, 频率-波数域, 动力柔度, 动力刚度

**中图分类号:** O302 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2012)03-0557-11

## 引 言

基础动力刚度(柔度)的求解在机械振动以及结构-地基动力相互作用分析中都扮演着重要的角色, 成为核电结构、大坝、桥梁以及高层建筑等抗震设计的重要内容. 但由于计算比较复杂, 现有文献中主要假定地基为均质半无限空间来寻求近似的基础动力刚度解法. 而实际上, 许多大型土木建筑以及海洋工程建筑都是坐落在层状地基之上的, 因此, 研究层状地基的动力特性对于结构的地震响应及其抗震安全性评价具有十分重要的意义.

半无限空间上基础动力刚度的求解, 早期 Reissner<sup>[1]</sup>和 Bycroft<sup>[2]</sup>等采用应力边值条件, 假设基础与无限地基接触面上的应力分布形式进行近似求解. 20 世纪 60 年代后期起, 不少研究者采用更为严密的混合边值问题进行刚性圆盘基础的频域谐振条件下动力刚度的求解, 如 Luco 等<sup>[3]</sup>和 Veletsos 等<sup>[4]</sup>的工作. 初期采用放松的边界条件, 即在竖向力和转动动力矩作用下圆盘底部接触面光滑, 水平应力分量为零; 而在水平力作用下接触面的竖直应力分量为零. 在放松边界条件下, 转动动力矩作用的情况可化为第二类 Fredholm 积分方程, 水平力作用的情况可化为双积分方程进行数值

求解. 水平力和转动动力矩的偶连作用只能近似求解. 与此同时, Karasudhi 等<sup>[5]</sup>得出了条带状基础在放松边界条件下动力刚度的解. 进而, Luco 等<sup>[6]</sup>得到了条带基础在接触面完全密切结合条件下动力刚度的解, 基本方程为对偶 Cauchy 型奇异积分方程, 再转化为对偶 Fredholm 积分方程进行求解. 最终的方程数值求解十分困难, 故只对泊松比  $\nu = 0.5$  的情况得到了全面的解答. 对其他较小的泊松比的情况, 只对低频段得出了近似解, 略去奇异积分方程中的次要项, 按控制项计算基础位移. Luco 等<sup>[6]</sup>并对接触面完全结合和放松边界条件下动力刚度阵的结果进行了比较. 在低频段两者出现一定的差别, 但认为放松边界条件结果可满足工程设计需要. 此后, Luco<sup>[7]</sup>又进一步发展了层状地基条件下刚性圆盘基础动力刚度的解. 他研究了圆盘基础下卧一层有限厚度薄层地基, 底部为半无限地基的情况. 薄层地基与半无限地基之间完全结合, 圆盘与薄层地基之间的结合则采用放松边界条件. 他发现基础动力刚度对薄层厚度  $h$  与圆盘半径  $a$  的比值  $h/a$  十分敏感, 并且伴随无量纲频率  $a_0 = \omega a/c_s$  (式中  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  为剪切波速,  $\omega$  为圆频率) 的增大发生剧烈波动变化.

20 世纪 60 年代出现的有限元法便于对动力刚度矩阵进行近似的数值求解, 使解析解所遭遇的困

2011-07-29 收到第 1 稿, 2011-11-20 收到修改稿.

1) 中德科学基金(GZ566)和国家自然科学基金(51138001)资助项目.

2) E-mail: gaolin@dlut.edu.cn

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

难在一定程度上得到化解. 但三维问题所需要花费的自由度数和计算时间仍不堪重负. 结构-地基动力相互作用问题多简化为二维问题或轴对称问题进行考虑. 20 世纪 80 年代边界元法的出现促进了动力刚度研究的进展. 边界元法满足无限远处辐射条件, 有利于无限地基的处理. 边界元法采用格林函数便于进行任意形状基础动力刚度的研究. Luco 和 Apsel 等<sup>[8-9]</sup>得到的层状介质格林函数的解, 深化了层状地基动力刚度的研究. Wolf 等<sup>[10]</sup>获得了层状介质动力刚度矩阵的边界元解. 但边界元法解决三维问题仍然工作量大, 而且计算复杂. 这一时期对基础动力刚度的各种不同的近似和简化解法相继涌现. 应用较广而且有代表性的有, 将有限元离散与解析解相结合的薄层法<sup>[11-12]</sup>和用锥体代替半无限空间的简化物理模型法<sup>[13]</sup>. 后者采用一维波动模型, 近似程度较高. 薄层法将地基分成水平薄层, 层内介质均匀, 波只在水平方向传播, 波动方程简化为二阶常微分方程, 在竖直方向采用有限元离散进行加权余量处理, 而且可进行时域计算<sup>[11]</sup>. 但竖直方向的离散可引起数值结果散乱<sup>[12]</sup>, 需采取措施提高计算的精度和稳定性.

层状地基中波的传播普遍采用 Thomson<sup>[14]</sup>和 Haskell<sup>[15]</sup>提出的传递矩阵法. 表达式中含指数函数, 计算中易产生指数溢出导致计算失效. 一般文献中的算例多只含一弹性层下卧弹性半无限空间, 或两弹性层下部刚性固定. 多层地基动力刚度的计算至今还是一个没有很好解决的问题.

Wolf 和 Song 近年所提出的比例边界有限元法 (SBFEM)<sup>[16-17]</sup>是一种很有发展前景的方法, 它综合了有限元法和边界元法的优点, 只需在部分边界上进行离散, 使问题的维数减少一维, 而又不需要基本解. 使无限地基上动力刚度的计算既方便而又精确. 为了使之适用于层状地基动力刚度的计算, Birk 等<sup>[18]</sup>对方法进行了一定的改进, 将比例相似中心从一个点转换为一条轴线. 结果可以进行下部刚性固定的多层地基动力刚度的计算. 不过由于控制方程成为非线性和非齐次的二阶常微分方程, 采用龙格库塔方法求解, 数值计算精度还不是很好, 计算量也比较大.

可以认为迄今为止还没有一种被广泛认可的层状地基动力刚度的准确算法. 最近 Zhong 等<sup>[19]</sup>提出的精细积分算法可以高效、可靠而准确地地在频率-波数域内进行多层地基波的传播分析. 这为解决层状地基动力刚度问题的计算带来了新的希望. 本文

将以多层条带状基础动力刚度的计算为例阐明精细积分方法的广泛适用性及其所具有的潜力.

## 1 频率-波数域内地基表面的应力-位移关系

对于层状地基, 假定各层材料属性为均质、各向同性, 对非各向同性介质, 同样适用. 为简便计, 本文假设各向同性介质. 取坐标系如图 1 所示, 令地基表面  $O$  点为坐标原点,  $x$  轴为水平向,  $z$  轴指向竖直向下, 自由表面为  $z = z_0 = 0$ . 假设有  $l$  层层状地基, 其中第  $k$  层的材料拉梅常数为  $G_k$  和  $\lambda_k$ , 密度为  $\rho_k$ , 泊松比为  $\nu_k$ , 阻尼比为  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ), 其厚度为  $z_k - z_{k-1}$ . 本文考虑两种情况进行计算: 一种是第  $l+1$  层为均质半无限空间, 如图 1(a) 所示, 其材料拉梅常数为  $G_{l+1}$  和  $\lambda_{l+1}$ , 泊松比为  $\nu_{l+1}$ , 阻尼比为  $\xi_{l+1}$ ; 另一种是第  $l+1$  层为刚性基岩, 如图 1(b) 所示.

研究沿  $x$  轴方向传播的平面波动. 对一般非各向同性介质, 存在  $y$  方向的变形. 由于基本方程的建立

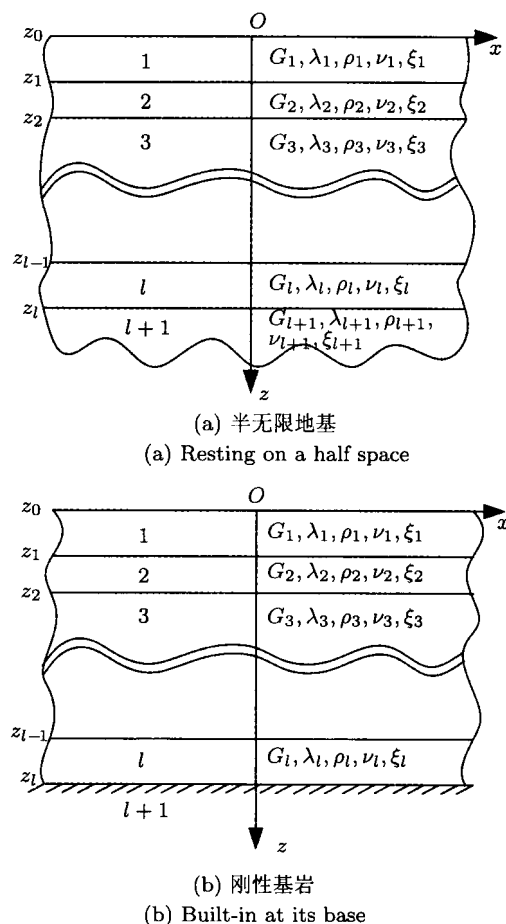


图 1 层状地基示意图

Fig. 1 Abridged general view of layered foundation

及变量的求解都只和  $x, z$  坐标相关, 故为广义平面波动问题. 求解多层地基波传播的基本方程为弹性力学以位移表示的运动方程. 设  $\tilde{u}(x, z, \omega)$  和  $\tilde{w}(x, z, \omega)$  分别为沿  $x$  和  $z$  轴的位移, 则频域内广义平面波动问题的表达式可以写为

$$\left. \begin{aligned} G \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \tilde{u} &= 0 \\ G \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z \partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \tilde{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $G$  和  $\lambda$  为拉梅常数,  $\omega$  为激励频率,  $\rho$  为密度.

采用 Fourier 变换方法进行求解, 定义式 (2) 形式的 Fourier 变换关系

$$\left. \begin{aligned} f(\kappa, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x, \omega) \exp(-i\kappa x) dx \\ \tilde{f}(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\kappa, \omega) \exp(i\kappa x) d\kappa \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\kappa$  为沿  $x$  方向的波数,  $f$  表示位移、应变、应力等函数. 则对于微商的变换有

$$d^{(n)} \tilde{f}(x, \omega) / dx^{(n)} = (i\kappa)^n f(\kappa, \omega) \quad (3)$$

利用式 (2) 和式 (3) 将运动方程 (1) 变换到频率波数域内得到二阶线性常微分方程

$$K_{22} q'' + (K_{21} - K_{12}) q' - (K_{11} - \rho \omega^2 I) q = 0 \quad (4)$$

其中,  $I$  为  $2 \times 2$  的单位阵.

$$\left. \begin{aligned} q &= \{u \ w\}^T, \quad K_{11} = \kappa^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \\ K_{21} &= i\kappa \begin{bmatrix} 0 & G \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{12} = -i\kappa \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ G & 0 \end{bmatrix} \\ K_{22} &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当地基阻尼比  $\xi$  为 0 时, 即不考虑地基阻尼, 地基为线弹性属性, 此时有  $K_{12} = K_{21}^H$ ; 当地基阻尼比  $\xi$  不为 0 时, 地基的黏弹性材料属性可以由相应的弹性参数运用比拟法求取, 即以  $G(1 + 2i\xi)$  和  $\lambda(1 + 2i\xi)$  的值分别代替式 (5) 中的  $G$  和  $\lambda$ , 此时本文其他公式均适用.

引入位移变量  $q$  的对偶变量

$$p = -\{\tau_{xz} \ \sigma_z\}^T \quad (6)$$

根据应力-位移的关系, 可知  $p$  满足以下表达式

$$p = -(K_{22} q' + K_{21} q) \quad (7)$$

利用对偶变量  $q$  和  $p$  可以将基本方程 (4) 转换为状态方程的形式

$$V' = HV, \quad V = [q \ p]^T, \quad H = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= -K_{22}^{-1} K_{21} \\ B &= -(K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} - \rho \omega^2 I) \\ C &= K_{12} K_{22}^{-1}, \quad D = -K_{22}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对于多层地基, 相邻层的交界面处需满足位移和应力的连续条件, 即

$$q_r^+ = q_r^-, \quad p_r^+ = p_r^-, \quad r = 1, 2, \dots, l-1, l \quad (10)$$

对于状态方程 (8), 钟万勰等提出了精细积分算法求解, 结果可以达到很高的计算精度. 任取地基中  $z_a$  和  $z_b$  ( $z_a < z_b$ ) 之间的一层, 对于线性体系的边值问题, 其两端状态变量之间成立以下关系

$$q_b = Lq_a - Gp_b, \quad p_a = Qq_a + Ep_b \quad (11)$$

式中,  $p_a$  和  $q_a$  为  $z_a$  端应力和位移向量,  $p_b$  和  $q_b$  为  $z_b$  端应力和位移向量,  $G, Q, L$  和  $E$  为待求的复数矩阵, 它们是矩阵  $A, B, C$  和  $D$  的函数. 为了准确地求得  $G, Q, L$  和  $E$  的表达式, 精细积分算法将地基中的每一层划分为  $2^{N_1}$  个相同的子层, 再将每个子层划分为  $2^{N_2}$  个相同的微细薄层, 并建立了相邻两子层和两微细薄层合并后矩阵的变换关系. 计算时, 每次将相邻两微细薄层的相关矩阵进行合并. 每次合并, 薄层数量随之减少一半, 所以虽然层数很多, 但计算量并不是很大. 关键是初始微细薄层  $G, Q, L$  和  $E$  的计算. 由于薄层极其微小, 故采用 4 次幂多项式泰勒级数进行逼近求解, 可以达到很高的精度, 其结果基本上接近计算机的有效位数. 公式的详细推导及其求解可参见文献 [19].

对于第 1 种情况, 即层状地基下卧半无限介质时, 波动方程需要满足半无限空间的辐射边界条件. 对于半无限空间, 设式 (8) 中矩阵的特征值矩阵和特征向量矩阵分别为  $\tilde{A}$  和  $\tilde{T}$ , 易解得

$$\tilde{A} = \text{diag}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ -\alpha_1 \ -\alpha_2) \quad (12)$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} i\kappa & \alpha_2 & -i\kappa & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -i\kappa & \alpha_1 & i\kappa \\ -i2G_{l+1}\kappa\alpha_1 & -(2\kappa^2 G_{l+1} - \rho_{l+1}\omega^2) & -i2G_{l+1}\kappa\alpha_1 & 2\kappa^2 G_{l+1} - \rho_{l+1}\omega^2 \\ -(2\kappa^2 G_{l+1} - \rho_{l+1}\omega^2) & i2G_{l+1}\kappa\alpha_2 & 2\kappa^2 G_{l+1} - \rho_{l+1}\omega^2 & i2G_{l+1}\kappa\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中

$$\alpha_1 = \begin{cases} \sqrt{\kappa^2 - \frac{\rho_{l+1}\omega^2}{\lambda_{l+1} + 2G_{l+1}}}, & \kappa^2 > \frac{\rho_{l+1}\omega^2}{\lambda_{l+1} + 2G_{l+1}} \\ i\sqrt{\frac{\rho_{l+1}\omega^2}{\lambda_{l+1} + 2G_{l+1}} - \kappa^2}, & \kappa^2 < \frac{\rho_{l+1}\omega^2}{\lambda_{l+1} + 2G_{l+1}} \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \sqrt{\kappa^2 - \frac{\rho_{l+1}\omega^2}{G_{l+1}}}, & \kappa^2 > \frac{\rho_{l+1}\omega^2}{G_{l+1}} \\ i\sqrt{\frac{\rho_{l+1}\omega^2}{G_{l+1}} - \kappa^2}, & \kappa^2 < \frac{\rho_{l+1}\omega^2}{G_{l+1}} \end{cases} \quad (14)$$

因为均质、各向同性半无限空间只存在下行波,不存在上行波,将矩阵  $\tilde{T}$  写成分块矩阵的形式,即

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

设地基表面的应力和位移向量分别为  $p_0$  和  $q_0$ ,  $l$  层底部的应力和位移向量分别为  $p_l$  和  $q_l$ , 则  $q_l$  和  $p_l$  存在下述关系

$$p_l = T_{22}T_{12}^{-1}q_l = R_H q_l \quad (16)$$

求解整个层状地基的  $G$ ,  $Q$ ,  $L$  和  $E$  矩阵,由式 (11) 和式 (16) 可得地基表面位移-应力的关系为

$$p_0 = [Q + ER_H(I + GR_H)^{-1}L]q_0 = Rq_0 \quad (17)$$

其中,  $R$  为频率-波数域内地基表面的动力刚度矩阵。

对于第 2 种情况,即层状地基下卧刚性基岩,只需满足  $l$  层底部位移为 0 的边界条件,即

$$q_l = 0 \quad (18)$$

由式 (11) 可得

$$p_0 = (Q + EG^{-1}L)q_0 = Rq_0 \quad (19)$$

## 2 基础底部节点动力刚度矩阵的计算

式 (17) 和式 (19) 建立了地基表面频率-波数域内位移与应力的关系,根据得出的地基动力刚度的

计算关系式将两种考虑情况简写为式 (20) 的形式。以下的推导都是针对地基表面进行,因此省去下标 0。

$$q = R^{-1}p = Fp \quad (20)$$

其中,  $F$  表示频率-波数域内地基表面动力柔度矩阵。为方便后续计算,将式 (20) 写成

$$\begin{Bmatrix} u(\kappa, 0, \omega) \\ w(\kappa, 0, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\tau_{xz}(\kappa, 0, \omega) \\ -\sigma_z(\kappa, 0, \omega) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

对式 (21) 经过 Fourier 反变换后得频率-空间域内的位移

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}(x, 0, \omega) \\ \tilde{w}(x, 0, \omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\tau_{xz}(\kappa, 0, \omega) \\ -\sigma_z(\kappa, 0, \omega) \end{Bmatrix} e^{i\kappa x} d\kappa \quad (22)$$

在区间  $x \in (-\Delta b/2, \Delta b/2)$  内有合力幅度等于 1 的  $x$  向均布谐和力作用时,  $g_{xz}$  为应力强度幅值,易知  $g_{xz} = 1/\Delta b$ , 如图 2(a) 所示。此时有

$$-\tau_{xz}(\kappa, 0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xz}(x, 0, \omega) e^{-i\kappa x} dx = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\Delta b} e^{-i\kappa x} dx = \frac{2}{\Delta b\kappa} \sin \frac{\Delta b\kappa}{2} \quad (23)$$

设  $\tilde{u}_{ij}^x(i, j = x \text{ 或 } z)$  表示在  $j$  向施加单位幅值力时在  $x$  位置处  $i$  向产生的位移幅值。则有

$$\tilde{u}_{xx}^x(x, 0, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_{11} \left( \frac{2}{\Delta b\kappa} \sin \frac{\Delta b\kappa}{2} \right) \cos(\kappa x) d\kappa \quad (24)$$

$$\tilde{u}_{zx}^x(x, 0, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{21} \left( \frac{2}{\Delta b\kappa} \sin \frac{\Delta b\kappa}{2} \right) \sin(\kappa x) d\kappa \quad (25)$$

在区间  $x \in (-\Delta b/2, \Delta b/2)$  内有合力幅度等于 1 的  $z$  向均布谐和力作用时,  $g_z$  为应力强度幅值,易

知  $g_z = 1/\Delta b$ , 如图 2(b) 所示. 此时有

$$-\sigma_z(\kappa, 0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_z(x, 0, \omega) e^{-i\kappa x} dx = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\Delta b} e^{-i\kappa x} dx = \frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \quad (26)$$

$$\tilde{u}_{xz}^x(x, 0, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{12} \left( \frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \right) \sin \kappa x d\kappa \quad (27)$$

$$\tilde{u}_{zz}^x(x, 0, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_{22} \left( \frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \right) \cos \kappa x d\kappa \quad (28)$$

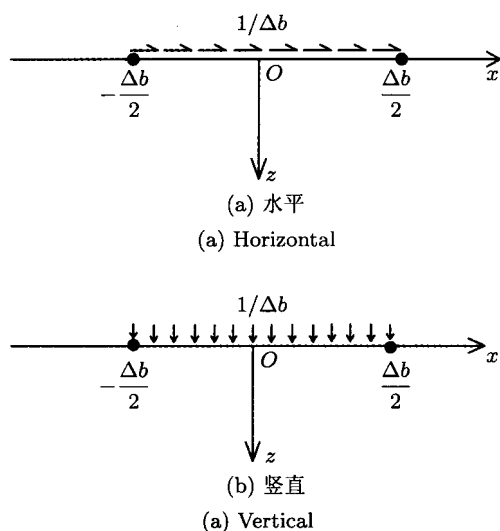


图 2 单位区间作用均布谐和力

Fig. 2 Uniform harmony force between adjacent nodal points

根据经验, 此处式 (24), (25), (27) 和 (28) 中的积分采用五点高斯积分进行求解已足够满足精度要求. 此外, 对于积分上限的选取以泊松比  $\nu = 1/3$ 、阻尼比为 0.05 的半无限地基予以说明. 半宽为  $b = 1$  的条带基础置于地基表面, 将计算得到的动力影响系数  $\tilde{u}_{xx}^x(x, 0, \omega)$  写成如下形式

$$\tilde{u}_{xx}^x(x, 0, \omega) = \frac{1}{\mu} (f_{xx}(\omega) + i g_{xx}(\omega)) \quad (29)$$

其中, 上标  $x$  取  $b/20$ , 积分上限分别取 5, 10, 20, 50 和 100 进行计算, 计算得到的实部  $f_{xx}(\omega)$  和虚部  $g_{xx}(\omega)$  见图 3. 由图可见, 当积分上限取较大值时, 计算结果趋近于一条曲线, 即波数较大时对积分的贡献很小, 可以忽略, 从而此处积分上限可以取有限值. 当阻尼比等于 0 时, 沿波数轴存在的奇异点使积分变得比较困难, 本文取阻尼比为 0.001 的材料模型

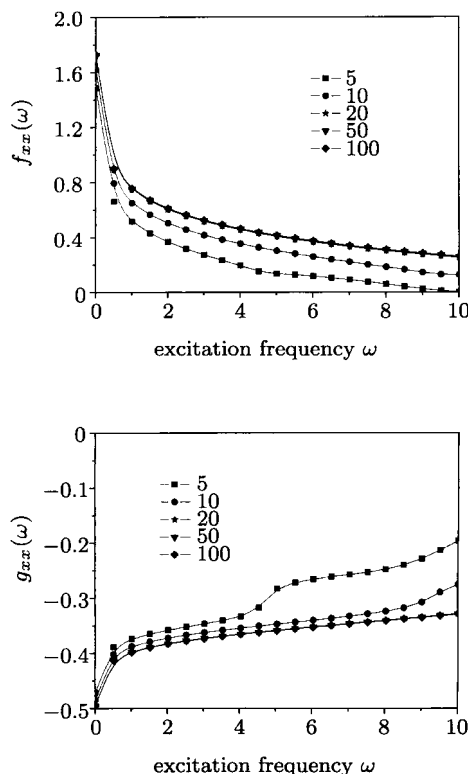


图 3 实部  $f_{xx}(\omega)$  和虚部  $g_{xx}(\omega)$  的值

Fig. 3 Values of  $f_{xx}(\omega)$  and  $g_{xx}(\omega)$

来代替线弹性模型. 而实际上, 不存在纯弹性的材料, 阻尼比较小的材料模型更加符合真实情况.

设在任意两相邻节点  $k$  和  $k+1$  之间同时作用水平向和竖直向均布谐和力, 如图 4 所示, 其合力幅值分别为  $\tilde{f}_x$  和  $\tilde{f}_z$ , 设该节间力在  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) 点产生的位移为  $\tilde{u}^m$ , 则有

$$\tilde{u}^m = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{xx}^m & \tilde{u}_{xz}^m \\ \tilde{u}_{zx}^m & \tilde{u}_{zz}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_z \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}}^m \tilde{\mathbf{f}}^m \quad (30)$$

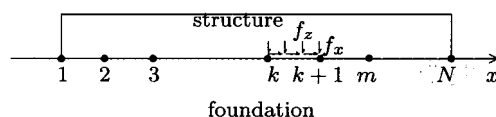


图 4 刚性基础节点模型

Fig. 4 Nodal model of the rigid footing

特别的, 当载荷移动到其他区间时, 在各点的位移值正好移动到载荷相同的位置. 由式 (23)~式 (28) 易知  $\tilde{\mathbf{F}}^{-m} = [\tilde{\mathbf{F}}^m]^T$ , 则图 3 所示的体系中节间力与节点位移关系可表示成式 (31) 的形式.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ \vdots \\ \tilde{u}^N \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{F}^{-1} & \tilde{F}^{-2} & \cdots & \tilde{F}^{-(N-1)} \\ \tilde{F}^1 & \tilde{F}^{-1} & \cdots & \tilde{F}^{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}^{N-1} & \tilde{F}^{N-2} & \cdots & \tilde{F}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \\ \vdots \\ \tilde{f}^{N-1} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\tilde{F}^1)^T & (\tilde{F}^2)^T & \cdots & (\tilde{F}^{(N-1)})^T \\ \tilde{F}^1 & (\tilde{F}^1)^T & \cdots & (\tilde{F}^{(N-2)})^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}^{N-1} & \tilde{F}^{N-2} & \cdots & \tilde{F}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \\ \vdots \\ \tilde{f}^{N-1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

简写成

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{f}} \quad (32)$$

设节间位移  $\tilde{\mathbf{u}}$  为该节间两端节点位移的平均值, 则有

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}} \quad (33)$$

其中,  $\mathbf{D}$  为  $2(N-1) \times 2N$  的矩阵且

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & & & \\ & 0.5 & 0 & 0.5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0.5 & 0 & 0.5 \\ & & & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (34)$$

设节点应力向量为  $\tilde{\mathbf{t}}$ , 应用虚功原理可以得到

$$\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{f}} \quad (35)$$

由式 (32), (33) 和 (35) 可得节点位移-应力关系为

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{S}(\omega) \tilde{\mathbf{u}} \quad (36)$$

其中  $\mathbf{S}(\omega)$  为基础底部节点动力刚度矩阵, 即

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{F}})^{-1} \mathbf{D} \quad (37)$$

### 3 刚性条带基础的动力刚度矩阵

基础底部各点的水平与竖向位移可表示成

$$\tilde{u}_1^m(x_1) = \Delta_1, \quad \tilde{u}_2^m(x_1) = \Delta_2 + \varphi x_1, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (38)$$

其中,  $\Delta_1$  为刚性基础块中点的水平位移,  $\Delta_2$  为刚性基础块中点竖向位移,  $\varphi$  为基础块的转角. 式 (38) 可表达成

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{H}} \Delta \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \{\tilde{u}_1^1 \quad \tilde{u}_2^1 \quad \tilde{u}_1^2 \quad \tilde{u}_2^2 \cdots \tilde{u}_1^N \quad \tilde{u}_2^N\}^T \quad \Delta = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad b\varphi\}^T \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x_1/b & 0 & x_2/b & \cdots & 0 & x_N/b \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (40)$$

刚性基础所受的集中简谐载荷, 其幅值如图 5 所示, 可以用水平节点力  $\tilde{t}_x$  和竖向节点力  $\tilde{t}_z$  表达如下

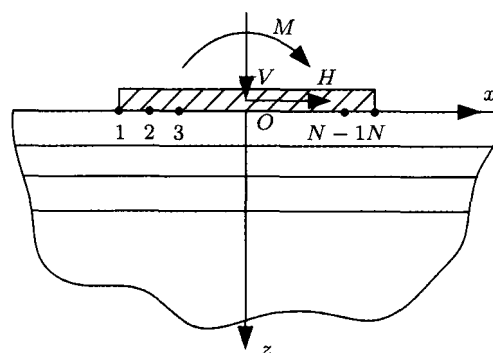
$$H = \sum_{m=1}^N \tilde{t}_x^m, \quad P = \sum_{m=1}^N \tilde{t}_z^m, \quad M = \sum_{m=1}^N x_m \tilde{t}_z^m \quad (41)$$

简化为

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{t}} \quad (42)$$

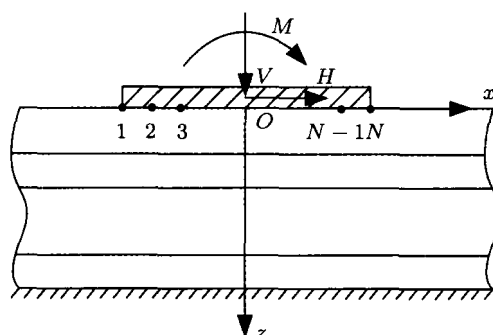
其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{H \quad P \quad M/b\}^T \\ \tilde{\mathbf{t}} &= \{\tilde{t}_x^1 \quad \tilde{t}_z^1 \quad \tilde{t}_x^2 \quad \tilde{t}_z^2 \cdots \tilde{t}_x^N \quad \tilde{t}_z^N\}^T \end{aligned} \quad (43)$$



(a) 半无限地基

(a) Resting on a half space



(b) 刚性基岩

(b) Built-in at its base

图 5 刚性条带基础置于地基之上

Fig. 5 Rigid strip footing on subgrade

由式 (37), (39) 和 (42) 可得

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{S}(\omega) \tilde{\mathbf{H}} \Delta = \bar{\mathbf{S}}(\omega) \Delta \quad (44)$$

其中,  $\bar{S}(\omega)$  为刚性地基的频域动力刚度矩阵, 且有

$$\bar{S}(\omega) = \tilde{H}^T S(\omega) \tilde{H} \quad (45)$$

#### 4 算 例

由于至今还没有得到准确的多层地基动力刚度的数值结果, 本文选择了 4 个算例 (图 6) 来说明本文算法的有效性. 算例 1 中 Luco 等<sup>[6]</sup>对泊松比小于 0.5 的弹性半空间上的条带基础的动力刚度只得到了低频段无量纲频率  $a_0 \leq 1.5$  的近似解 (略去积分方程的次要项), 本文则将动力刚度的计算延伸至  $a_0 = 10$ . 算例 2 中 Wolf 等<sup>[10]</sup>给出了单层弹性地基下卧弹性半无限空间条件下按边界元法计算的条带基础的动力刚度, 但计算精度没有严格检验, 本文将计算结果与之进行了比较. 算例 3 针对本文的第 2 种情况, 即层状地基地部为刚性固定, 也与 Wolf 等<sup>[10]</sup>和 SBFEM 得到的结果进行了比较. 算例 4 为 3 层地基下卧半无限空间条带基础的动力刚度, 只有本文算法给出结果, 用以说明本文的广泛适用性.

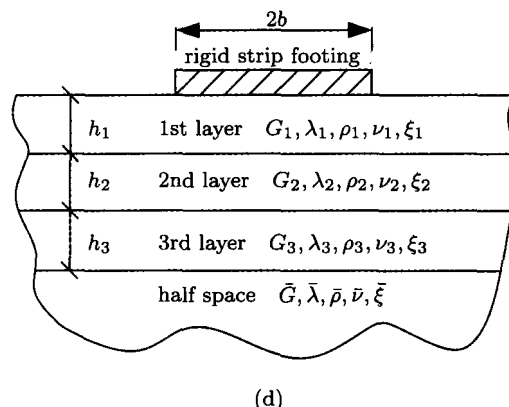
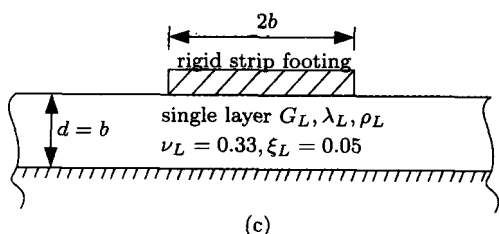
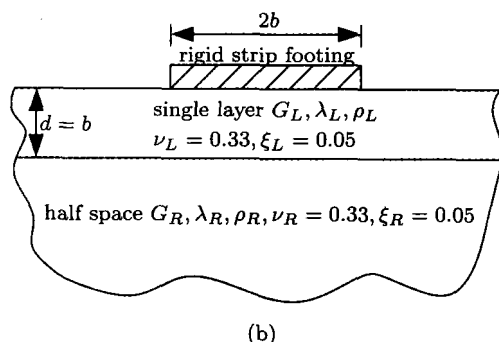
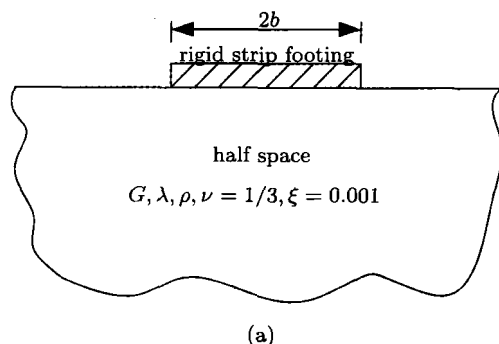


图 6 算例模型示意图

Fig. 6 Abridged general view of the numerical examples

**算例 1** 半无限均质地基, 拉梅常数为  $G$  和  $\lambda$ , 密度为  $\rho$ , 泊松比取 1/3, 阻尼比取 0.001 代表无阻尼情况, 刚性条带基础宽度为  $2b$ , 见图 6(a), 计算其动力柔度矩阵, 即  $[\bar{S}(\omega)]^{-1}$ , 引入无量纲频率  $a_0 = \omega b/c_s$ , 其中  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  为剪切波速. 将动力柔度矩阵转化为式 (46) 无量纲动力柔度矩阵的形式. 计算得到的竖直、水平和摇摆以及水平与摇摆耦合的动力柔度矩阵系数如图 7 所示, 本文将 Luco 等<sup>[6]</sup>计算的泊松比为 1/3 的结果作为参考进行了对比, 两者吻合较好.



$$[\bar{S}(a_0)]^{-1} = \frac{1}{\pi G} \begin{bmatrix} C_{VV} & 0 & 0 \\ 0 & C_{HH} & C_{HM} \\ 0 & C_{MH} & C_{MM} \end{bmatrix} \quad (46)$$

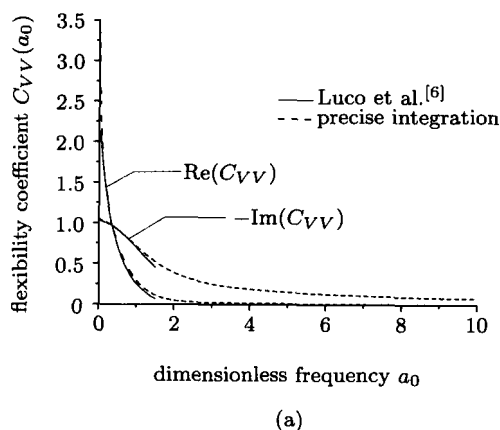


图 7 刚性条带基础置于半无限均质地基上动力柔度矩阵系数 (不考虑阻尼)

Fig. 7 Compliance coefficients for rigid strip footing on elastic half space (no damping)

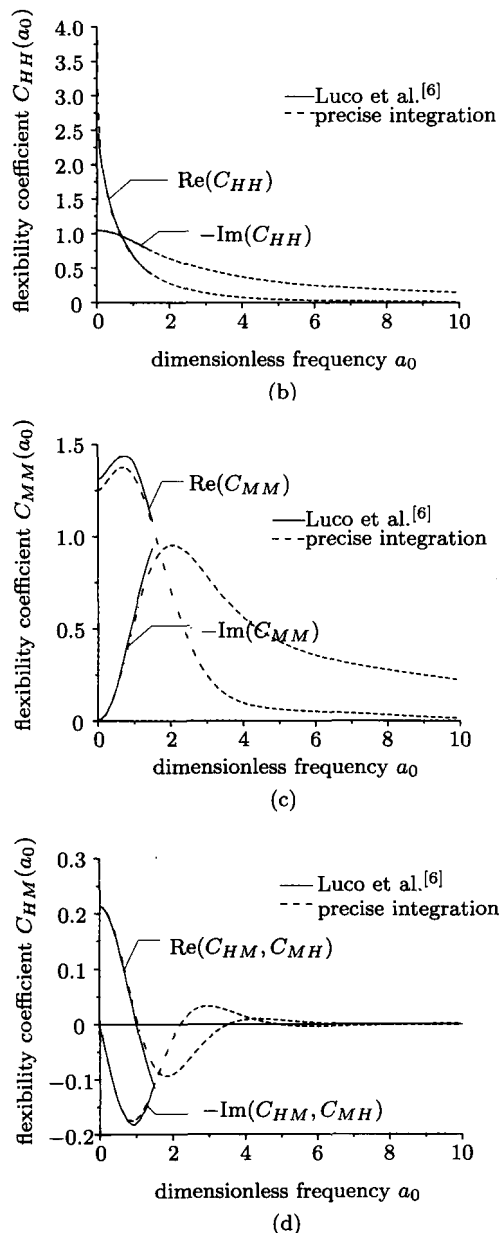


图7 刚性条带基础置于半无限均质地基上动力柔度矩阵系数  
(不考虑阻尼)(续)

Fig. 7 Compliance coefficients for rigid strip footing on elastic half space (no damping)(continued)

**算例2** 单层厚度为  $d = b$  的地基, 泊松比  $\nu_L$  为 0.33, 置于泊松比  $\nu_R$  也为 0.33 的半无限地基之上, 两者的剪切波速和密度的比值分别为  $c_s^R/c_s^L = 2$  和  $\rho_R/\rho_L = 1$  (下标 R 表示半无限地基; L 表示单层地基), 阻尼比均为 0.05. 刚性条带基础宽度为  $2b$ , 如图 6(b) 所示, 计算得到的水平、竖直和摇摆动力刚度矩阵按照式 (47) 转化为无量纲动力刚度矩阵系数的形式, 其中  $i = \sqrt{-1}$ ,  $a_0$  含义同算例 1, 对于水平和竖直动力刚度  $S_0 = \pi G$ , 对于摇摆动力刚度  $S_0 = \pi G b^2$ , 计算结果如图 8 所示,  $c_s$  为地基表面的剪切波速. 此

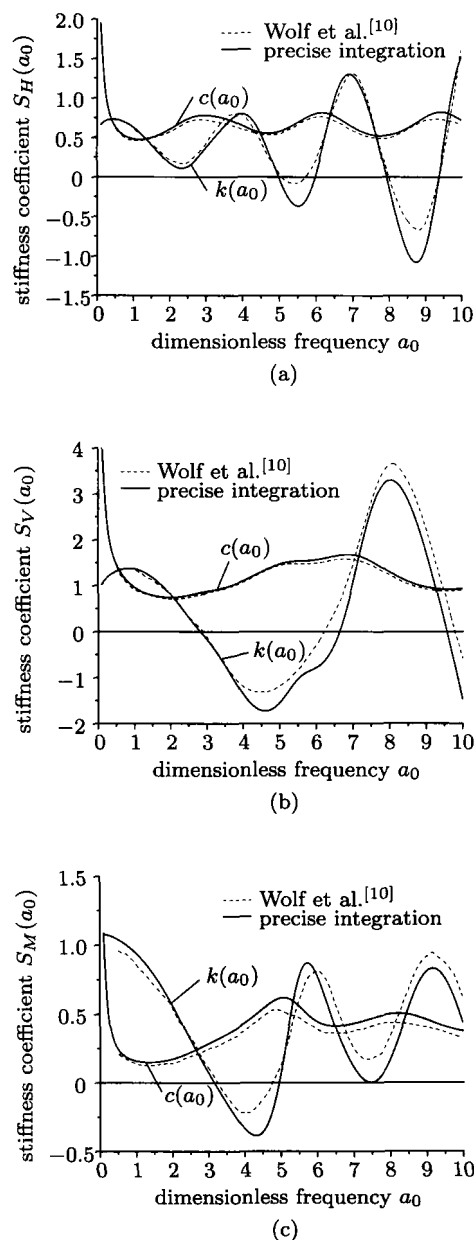


图8 刚性条带基础动力刚度矩阵系数, 单层地基置于半无限均质地基之上(考虑阻尼)

Fig. 8 Dynamic stiffness of rigid strip footing, layer on half-plane (with damping)

处将 Wolf 等应用边界元方法计算的结果<sup>[10]</sup>与本文计算结果进行对比, 两者吻合较好, 只在个别频率范围存在差别, 原因可能是由于地基和基础的接触面的离散程度以及计算精度不同造成的.

$$\bar{S}(a_0) = S_0(\mathbf{k} + i a_0 \mathbf{c}), \quad a_0 = \omega b / c_s \quad (47)$$

**算例3** 宽度为  $2b$  的刚性条带基础置于厚度  $d = b$  的单层地基上, 地基拉梅常数为  $G$  和  $\lambda$ , 密度为  $\rho$ , 泊松比取 0.33, 阻尼比取 0.05, 见图 6(c). 计算得

到的水平、竖直和摇摆动力刚度矩阵按照式(47)转化为动力刚度矩阵系数的形式, 计算结果如图9所示. 此处将 Wolf应用边界元方法<sup>[10]</sup>和 SBFEM 两者计算的结果与本文结果相对比, 由图可见本文算法与 SBFEM 的结果基本吻合, 而与 BEM 方法存在较大差别. SBFEM 在离散程度足够的情况下可作为精确解, 这也说明本文提出的精细积分算法具有较高的可靠性.

**算例 4** 宽度为  $2b$  的刚性条带基础置于3层地基上, 底部为半无限空间, 见图6(d), 各层材料属性

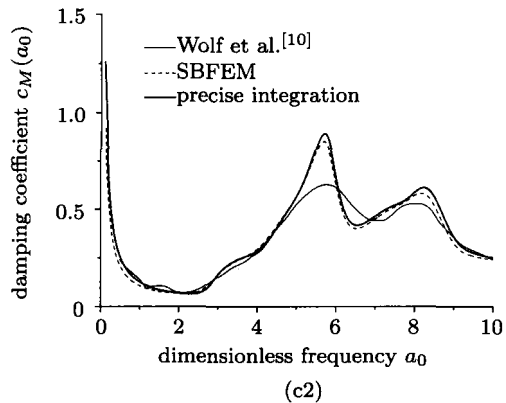
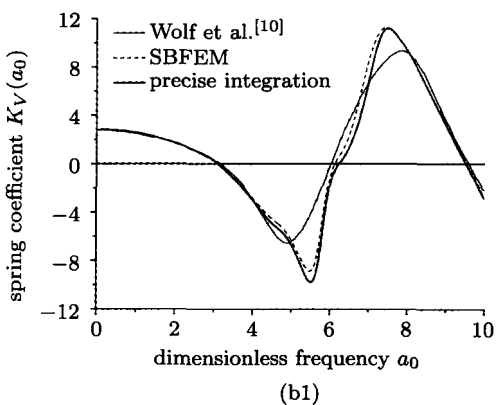
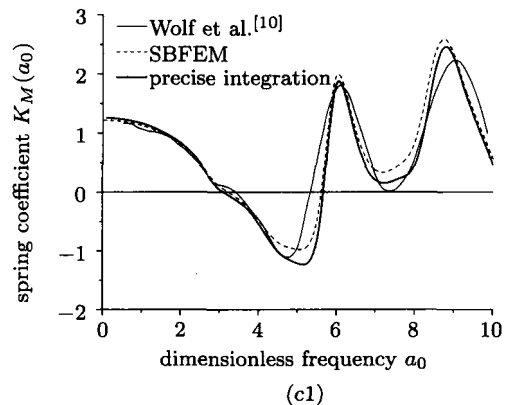
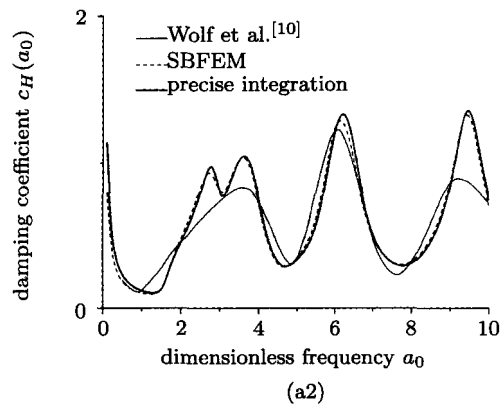
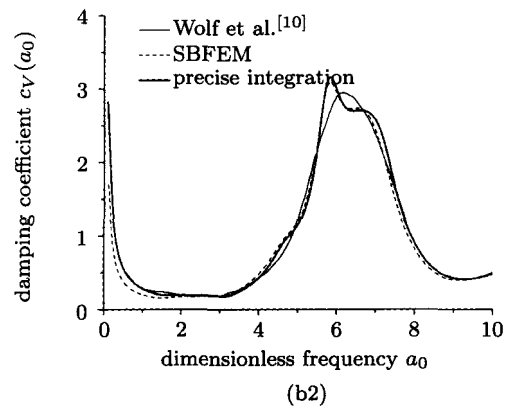
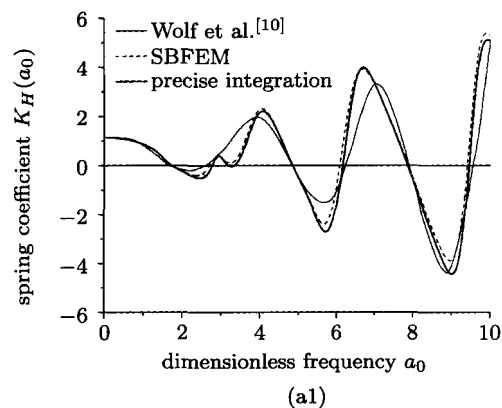


图9 刚性条带基础置于单层地基之上, 底部刚性基岩 (考虑阻尼)  
Fig. 9 Dynamic stiffness of rigid strip footing, layer built-in at its base (with damping)

见表1. 计算得到的水平、竖直以及摇摆动力刚度矩阵按照式(47)转化为无量纲动力刚度矩阵系数的形式, 计算结果如图10所示. 目前尚没有文献得出较多层弹性地基动力刚度的结果, 故只给出本文的求解结果. 这表明利用精细积分算法求解条带基础在层状地基上的动力响应, 具有广泛的适应性.

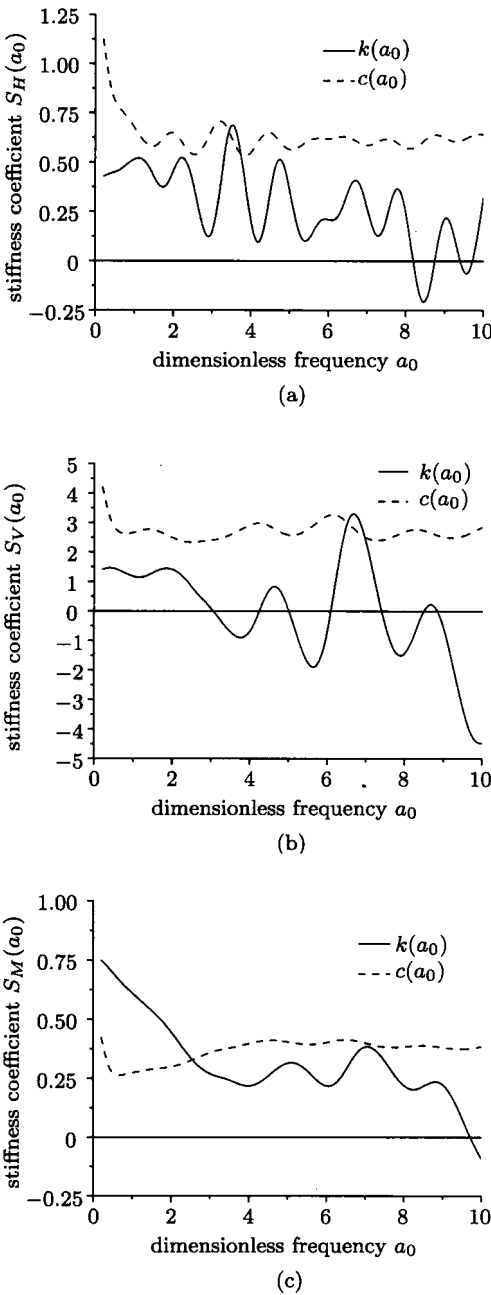


图 10 刚性条带基础置于三层地基之上,底部半无限空间  
(考虑阻尼)

Fig. 10 Dynamic stiffness of rigid strip footing, three layers on half-plane (with damping)

表 1 层状半无限地基材料属性  
Table 1 Material properties of the layered medium

| No. | $\lambda_r$    | $G_r$   | $\rho_r$    | $\nu_r$ | $h_r$      | $\xi_r$ |
|-----|----------------|---------|-------------|---------|------------|---------|
| 1   | $\lambda$      | $G$     | $\rho$      | 1/4     | 1.0b       | 0.05    |
| 2   | 1.8 $\lambda$  | 1.2 $G$ | $\rho$      | 1/3     | 1.5b       |         |
| 3   | 1.6 $\lambda$  | 0.8 $G$ | 0.89 $\rho$ | 1/3     | 0.5b       |         |
| 4   | 2.25 $\lambda$ | 1.5 $G$ | 1.2 $\rho$  | 0.3     | half-plane |         |

5 结 论

复杂层状地基的动力刚度对于工程抗震设计和安全评价具有重要意义,但迄今还缺乏有效的算法.文献[20]指出,多层地基中波的传播十分复杂,难以处理,所以现有文献中一般只处理单层地基下卧刚性基岩或半无限地基,对于多层地基情况很难得出稳定的结果.本文采用精细积分方法为高效而精确地进行多层地基动力刚度问题的求解提供了一条有效的途径.精细积分方法引入对偶变量,建立波传播中力和位移的关系,使格林函数的求解避免了通常文献中传递矩阵计算中的指数溢出问题,显著地提高了计算效率和扩大了求解范围,对各种情况有广泛的适应性,对于泊松比不等于0.5的情况,在高频段可以保障收敛性,并具有方便地处理各向异性介质问题的潜力.划分薄层的数量可以任意进行调节,微细薄层的求解采用4次多项式逼近,这些措施保证了计算结果可以根据要求达到很高的精度.包括本文算例以外的大量算例表明,精细积分算法稳定,结果可靠.

参 考 文 献

1 Reissner E. Stationäre, axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes'. *Ing Archiv*, 1936, 7(6): 381-396

2 Bycroft GN. Forced vibrations of a rigid circular footing on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol.248, Series A, No.948, Lan, 1956. 327-368

3 Luco JE, Westmann RA. Dynamic response of circular footing. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1971, 97(5): 1381-1395

4 Veletsos AS, Wei YT. Lateral and rocking vibration of footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1971, 97(9): 1227-1248

5 Karasudhi P, Keer LM, LEE SL. Vibratory motion of a body on an elastic half-space. *J Appl Mech*, 1968, 35: 697-705

6 Luco JE, Westmann RA. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space. *J Appl Mech*, 1972, 39: 527-534

7 Luco JE. Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium. *Nuclear Engineering and Design*, 1974, 31: 204-217

8 Luco JE, Apse RJ. On the Green's functions for a layered half-space. Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1983, 73(4): 909-929

9 Apse RJ, Luco JE. On the Green's functions for a layered half-space. Part II. *Bulletin of the Seismological Society of*

- America, 1983, 73(4): 931-951
- 10 Wolf JP, Darbre GR. Dynamic-stiffness matrix of surface foundation on layered halfspace based on stiffness-matrix approach. IAEA IWGGCR/6 UC-77, 1983. 183-206
  - 11 Kausel E. Thin-layer method: formulation in the time domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(6): 927-941
  - 12 Park J, Kausel E. Numerical dispersion in the thin-layer method. *Computers & Structures*, 2004, 82: 607-625
  - 13 Wolf JP. Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models. Prentice-Hall: Englewood Cliffs NJ, 1994
  - 14 Thomson W. Transmission of elastic waves through a stratified medium. *J Appl Phys*, 1950, 21: 89-93
  - 15 Haskell NA. The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bull Seis Soc America*, 1953, 43: 17-34
  - 16 Chongmin Song, Wolf JP. The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1997, 147: 329-355
  - 17 Wolf JP, Chongmin Song. The scaled boundary finite-element method——a primer: derivations. *Computers and Structures*, 2000, 78: 191-210
  - 18 Birk C, Behnke R. Dynamic response of foundations on three-dimensional layered soil using the scaled boundary finite element method. In: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2010. 012228
  - 19 Zhong WX, Lin JH, Gao Q. The precise computation for wave propagation in stratified materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60(1): 11-25
  - 20 Kausel E. Wave propagation in anisotropic layered media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, 23(8): 1567-1578

(责任编辑: 周冬冬)

## A PRECISE INTEGRATION APPROACH FOR THE DYNAMIC-STIFFNESS MATRIX OF STRIP FOOTINGS ON A LAYERED MEDIUM <sup>1)</sup>

Lin Gao<sup>\*,2)</sup> Han Zejun<sup>\*</sup> Li Weidong<sup>†</sup> Li Jianbo<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>(Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

<sup>†</sup>(Central Southern China Electric Power Design Institute, Wuhan 430071, China)

**Abstract** A precise integration method (PIM) is applied to the evaluation of dynamic-stiffness matrix of strip footings on a layered medium. PIM is an efficient and accurate numerical method to study the wave motion in layered earth strata. Through Fourier transform, the governing equation of wave propagation is formulated in the frequency-wavenumber domain as a set of ordinary differential equations with two-point boundary value conditions, and the Green's functions are solved by PIM. Finally, the dynamic-stiffness matrix of rigid strip footing on layered medium is converted from frequency-wavenumber domain into frequency-spatial domain. The proposed algorithm has the advantages that it avoids the exponential overflow generally encountered in the case of transmission matrix. In addition, it is versatile and adaptable to various cases of footings. It ensures convergence at high-frequency range, while perfect accuracy can be achieved.

**Key words** precise integration, layered semi-infinite foundation, frequency-wavenumber domain, dynamic flexibility, dynamic stiffness

Received 29 July 2011, revised 20 November 2011.

1) The project was supported by the Sino-German Science Foundation (GZ566) and the National Natural Science Foundation of China (51138001).

2) E-mail: gaolin@dlut.edu.cn

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>