

# 非定常微分型黏弹性本构模型<sup>1)</sup>

康永刚<sup>2)</sup> 张秀娥

(防灾科技学院, 河北三河 065201)

**摘要** 在应力作用下, 材料的力学参数随着微观结构的变化而变化, 需要考虑参数的时间效应. 利用黏滞系数随时间变化的黏性元件, 构造出非定常 Maxwell 模型、非定常 Kelvin 模型和非定常 Zener 模型. 求解非定常模型的微分型本构方程得到它们的松弛模量、蠕变柔量和卸载方程. 结果表明, 可以把常见的经验松弛函数和经验蠕变函数视为非定常微分型本构模型.

**关键词** 非定常微分型模型, 经验模型, 应力松弛, 蠕变

**中图分类号:** O631.2+1, O377, O345 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2012)02-0456-04

## 引 言

聚合物、沥青、高温状态下的玻璃等许多材料的力学行为都表现出典型的黏弹特性. 常用符合虎克定律的弹簧表示理想弹性元件, 符合牛顿流动定律的黏壶表示理想流体元件. 经典黏弹模型利用弹簧和黏壶进行串并联组合形成不同的结构, 建立具有整数阶微分或积分形式的本构方程. 比较简单的 Maxwell 模型、Kelvin 模型和 Zener 模型等, 只能描述材料某一方面的性能, 或给出的公式形式单一, 要准确描述实验数据, 需要包含更多元件的结构.

从实验中获得的黏弹性材料松弛模量常用 KWW 函数<sup>[1]</sup>、幂函数和 Extended Langmuir 函数<sup>[2]</sup>等经验函数表达, 经验蠕变函数在实际中应用也较多, 如含有 KWW 函数的表达式<sup>[3]</sup>, 对数表达式<sup>[4]</sup>. 实际应用经验函数会遇到一些困难, 如 KWW 函数不是黏弹性的物理模型, 无法直接应用于现有的有限元软件中<sup>[5]</sup>.

近几十年来, 将分数阶微积分引入本构方程使黏弹性理论有了较大发展<sup>[6-7]</sup>. 由于分数阶导数的定义考虑了时间累积性, 能用较简单的模型和较少的参数对复杂黏弹行为给出较好的描述. 建立非定常(又称变参数)模型的出发点是, 在应力作用下, 材料的微观结构发生改变, 其某些力学参数随着时间的变化而变化, 需要考虑力学参数的时间效应. 此类研究在岩石<sup>[8-9]</sup>、地球介质<sup>[10]</sup>、沥青混合物料<sup>[11]</sup>

和木质材料<sup>[12]</sup>的蠕变中逐步展开. 相当一部分研究者直接将非定常参数代入定常模型蠕变柔量中, 得到非定常模型蠕变柔量, 与利用非定常模型本构关系求解得到的蠕变柔量往往并不一致, 显然后者更合理. 熊良宵等<sup>[8]</sup>、蒋昱州等<sup>[9]</sup>和张久鹏等<sup>[11]</sup>建立非线性黏滞体, 串联到模型中表示损伤明显的加速蠕变, 很少有非线性黏滞体与其他元件的并联结构.

材料的黏弹性特征与应变速率有关<sup>[13]</sup>, 黏壶是一种由应变速率定义的力学元件. 本文考虑黏壶黏滞系数的时间相关性, 与弹性元件串联和并联, 构造非定常 Maxwell 模型、非定常 Kelvin 模型和非定常 Zener 模型, 给出相应的微分型本构方程, 求解本构方程得到松弛模量、蠕变柔量和卸载方程.

## 1 非定常 Maxwell 模型

Maxwell 模型由一个弹簧和一个黏壶串联而成, 可以定性描述应力松弛过程, 不适合描述材料的实际蠕变行为, 不能描述卸载过程. 考虑黏性元件的时间相关性, 给出一种非定常 Maxwell 模型(如图 1), 应力  $\sigma$  和应变  $\varepsilon$  满足本构方程

$$\sigma + \frac{\eta(t)}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \eta(t) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1)$$

蠕变时常应力  $\sigma_0$ 、应变  $\varepsilon(t)$  和蠕变柔量  $J(t)$  满足  $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$ ; 应力松弛时常应变  $\varepsilon_0$ 、应力  $\sigma(t)$  和

2011-08-15 收到第 1 稿, 2011-09-10 收到修改稿.

1) 防灾科技学院防灾减灾青年科技基金资助项目 (201008).

2) E-mail: 81624304@163.com

松弛模量  $G(t)$  满足  $\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t)$ . 常应变和常应力时分别对式 (1) 分离变量求定积分 (当  $t = 0$  时,  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ ), 得到非定常 Maxwell 模型松弛模量和蠕变柔量的一般表达式为

$$G(t) = E \exp \left( - \int_0^t \frac{E}{\eta(t)} dt \right) \quad (2)$$

$$J(t) = E^{-1} + \int_0^t \frac{1}{\eta(t)} dt \quad (3)$$



图 1 非定常 Maxwell 模型

Fig.1 Non-stationary Maxwell model

下面举两个例子. Schiessel 等<sup>[7]</sup> 利用分数阶导数引入一种性质介于弹簧和黏壶的力学元件, 给出它的蠕变柔量  $J(t) \propto t^\beta$  且  $0 \leq \beta \leq 1$ , 孙均<sup>[14]</sup> 指出对于非线性黏弹性问题, 其经验公式可写为一种幂律型蠕变方程, 即蠕变柔量  $J(t) \propto t^{m+1}$  且  $m \geq 0$ . 设黏壶的黏滞系数随时间的变化满足

$$\eta(t) = \eta_0 t^{1-\alpha} \quad (4)$$

式中,  $\eta_0$  和  $\alpha$  为常数且  $\alpha > 0, \alpha \neq 0$ . 式 (4) 对应的黏壶蠕变柔量也满足  $J(t) \propto t^\alpha$ . 当  $0 < \alpha < 1$  时, 表示黏滞系数随时间增加; 当  $\alpha > 1$  时, 表示黏滞系数随时间减小. 但是时间趋于零时,  $\alpha > 1$  会导致黏滞系数趋于无穷, 所以表示黏滞系数随时间的减小, 应采用其他形式, 如  $\eta(t) = \eta_0(t+C)^{1-\alpha}$ , 其中  $\alpha > 1, C$  为常数且  $C > 0$ . 下面仍然以式 (4) 为例讨论. 将式 (4) 代入式 (2) 和式 (3) 得到

$$G(t) = E \exp \left( - \frac{E}{\eta_0 \alpha} t^\alpha \right) \quad (5)$$

$$J(t) = E^{-1} + \frac{1}{\eta_0 \alpha} t^\alpha \quad (6)$$

式 (5) 为 KWW 函数型应力松弛, 式 (6) 为幂律型蠕变.

设黏壶  $\eta$  随时间的变化满足

$$\eta(t) = \eta_0(t+1) \quad (7)$$

式中,  $\eta_0$  为常数. 将式 (7) 代入式 (2) 和式 (3) 得到

$$G(t) = E(t+1)^{-E/\eta_0} \quad (8)$$

$$J(t) = E^{-1} + \frac{1}{\eta_0} \ln(t+1) \quad (9)$$

式 (8) 和式 (9) 分别为幂律型应力松弛和对数型蠕变.

从以上两个例子可以看出: 非定常 Maxwell 模型可以描述蠕变行为; KWW 函数、幂函数型应力松弛和幂律、对数蠕变都可以认为是非定常元件模型的解, 而不是纯粹的经验模型.

## 2 非定常 Kelvin 模型

一个弹簧和一个黏壶的并联, 称为 Kelvin 模型, 可以定性描述材料的蠕变和卸载行为. 考虑黏壶的非定常化, 给出一种非定常 Kelvin 模型 (如图 2), 本构方程为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta(t) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (10)$$

由式 (10) 知, 常应变情况下解出应力为常数, 与实际不符, 所以非定常 Kelvin 模型不适合描述应力松弛. 蠕变和卸载时分别对式 (10) 分离变量求定积分 (当  $t = 0$  时,  $\varepsilon_0 = 0$ ), 得到非定常 Kelvin 模型蠕变柔量和卸载方程的一般表达式分别为

$$J(t) = E^{-1} \left[ 1 - \exp \left( - \int_0^t \frac{E}{\eta(t)} dt \right) \right] \quad (11)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_T \exp \left( - \int_T^t \frac{E}{\eta(t)} dt \right) \quad (12)$$

式中,  $\varepsilon_T$  表示  $T$  时刻卸载时的应变.

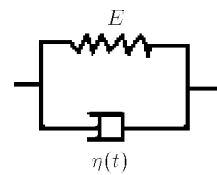


图 2 非定常 Kelvin 模型

Fig.2 Non-stationary Kelvin model

若黏壶的变化满足式 (4), 代入式 (11) 和式 (12), 得到

$$J(t) = E^{-1} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{E}{\eta_0 \alpha} t^\alpha \right) \right] \quad (13)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon' \exp \left( - \frac{E}{\eta_0 \alpha} t^\alpha \right) \quad (14)$$

式中,  $\varepsilon' = \varepsilon_T \exp(ET^\alpha/\eta_0\alpha)$ .

若黏壶满足式 (7), 代入式 (11) 和式 (12), 得到

$$J(t) = E^{-1}[1 - (t + 1)^{-E/\eta_0}] \quad (15)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon'(t + 1)^{-E/\eta_0} \quad (16)$$

式中,  $\varepsilon' = \varepsilon_T(T + 1)^{E/\eta_0}$ .

### 3 非定常 Zener 模型

Zener 模型是一个 Maxwell 单元并联一个弹簧的结构. Zener 模型对应力松弛、蠕变和卸载都可以定性描述, 但要准确地描述黏弹性过程, 需要比较复杂的模型. 考虑黏壶的非定常化, 给出一种非定常 Zener 模型 (如图 3), 本构方程为

$$\sigma + \frac{\eta(t)}{E} \frac{d\sigma}{dt} = E_0\varepsilon + \eta(t) \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (17)$$

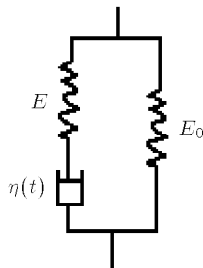


图 3 非定常 Zener 模型

Fig.3 Non-stationary Zener model

蠕变、应力松弛和卸载时分别对式 (17) 求解 (当  $t = 0$  时,  $\sigma_0 = \varepsilon_0(E_0 + E)$ ), 得到非定常 Zener 模型松弛模量、蠕变柔量和卸载方程的一般表达式分别为

$$G(t) = E \exp\left(-\int_0^t \frac{E}{\eta(t)} dt\right) + E_0 \quad (18)$$

$$J(t) = \frac{E}{E_0(E + E_0)} \left\{1 - \exp\left[-\int_0^t \frac{EE_0}{\eta(t)(E + E_0)} dt\right]\right\} + \frac{1}{E + E_0} \quad (19)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_T \exp\left[-\int_T^t \frac{EE_0}{\eta(t)(E + E_0)} dt\right] \quad (20)$$

例如把式 (3) 分别代入式 (18)~ 式 (20), 得

$$G(t) = E \exp\left(-\frac{E}{\eta_0\alpha} t^\alpha\right) + E_0 \quad (21)$$

$$J(t) = \frac{E}{E_0(E + E_0)} \left\{1 - \exp\left[-\frac{EE_0}{\eta_0\alpha(E + E_0)} t^\alpha\right]\right\} + \frac{1}{E + E_0} \quad (22)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon' \exp\left[-\frac{EE_0}{\eta_0\alpha(E + E_0)} t^\alpha\right] \quad (23)$$

式中,  $\varepsilon' = \varepsilon_T \exp\{EE_0 T^\alpha / [\eta_0\alpha(E + E_0)]\}$ . 同时表现出 KWW 函数型应力松弛、蠕变和卸载回弹. 张为民 [3] 用 KWW 函数分别给出松弛模量与蠕变柔量的一种实用表达式, 与式 (21) 和式 (22) 形式相同, 并通过热力学分析指出  $0 \leq \alpha \leq 1$  [15]. 实验数据拟合时, 确实  $0 \leq \alpha \leq 1$  的情况较多, 由式 (4) 可知黏滞性随着时间逐渐增加. 但也存在  $\alpha > 1$  的情况, 金日光等 [16] 指出对于高分子而言是由于分子链的断裂导致  $\alpha > 1$  的情况. 前面指出  $\alpha > 1$  时, 式 (4) 给出初始时刻黏滞系数趋于无限大, 所以不适合由式 (4) 讨论  $\alpha > 1$  的情况.

又如把式 (7) 分别代入式 (18)~ 式 (20), 得

$$G(t) = E(t + 1)^{-E/\eta_0} + E_0 \quad (24)$$

$$J(t) = \frac{E}{E_0(E + E_0)} \left\{1 - (t + 1)^{-EE_0/[\eta_0(E + E_0)]}\right\} + \frac{1}{E + E_0} \quad (25)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon'(t + 1)^{-EE_0/[\eta_0(E + E_0)]} \quad (26)$$

式中,  $\varepsilon' = \varepsilon_T(T + 1)^{EE_0/[\eta_0(E + E_0)]}$ . 同时表现出幂律型应力松弛、蠕变和卸载回弹.

### 4 结 论

考虑力学参数随着时间的变化给出的非定常 Maxwell 模型、非定常 Kelvin 模型和 Zener 模型应用范围相对于定常模型大大扩展. 采用求解微分型本构关系方法得到非定常模型的黏弹性特征, 而不是直接将非定常参数代入定常模型松弛模量或蠕变柔量. 常见的幂律、KWW 函数型松弛和幂律、KWW 函数、对数型蠕变等经验黏弹性公式, 均可视为非定常微分型本构模型, 可以结合黏弹性过程的微观机制讨论力学参数的变化反映的结构变化, 并利用微分型本构方程进行数值处理.

### 参 考 文 献

- 1 Williams G, Watts DC. Non-symmetrical dielectric relaxation behavior arising from a simple empirical decay function. *Trans Faraday Soc*, 1970, 66: 80-85
- 2 郭碧云, 李晓阳, 曾衍钧等. 肋软骨生物力学性能研究. 中国生物医学工程学报, 2006, 26(2): 270-275 (Guo Biyun, Li Xiaoyang, Zeng Yanjun, et al. Study on biomechanical characteristics of costal cartilage. *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 2006, 26(2): 270-275 (in Chinese))
- 3 张为民. 松弛模量与蠕变柔量的实用表达式. 湘潭大学自然科学学报, 1999, 21(3): 26-28 (Zhang Weimin. Practical expressions of relaxation modulus and creep compliance. *Natural*

- Science Journal of Xiangtan University*, 1999, 21(3): 26-28 (in Chinese))
- 4 Benioff H. Earthquakes and rock creep. *Bull Seismol Soc Am*, 1951, 41: 31-62
  - 5 帅词俊, 段吉安, 王炯. 关于黏弹性材料的广义 Maxwell 模型. 力学学报, 2006, 38(4): 565-569 (Shuai Cijun, Duan Jian, Wang Jiong. A method of establishing generalized maxwell model for viscoelastic material. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(4): 565-569 (in Chinese))
  - 6 Surguladze TZ. On certain applications of fractional calculus to viscoelasticity. *J Math Sci*, 2002, 112(5): 4517-4557
  - 7 Schiessel H, Metzler R, Blumen A, et al. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *J Phys A: Math Gen*, 1995, 28(23): 6567-6584
  - 8 熊良宵, 杨林德, 张尧. 岩石的非正常 Burgers 模型. 中南大学学报 (自然科学版), 2010, 41(2): 679-684 (Xiong Liangxiao, Yang Linde, Zhang Yao. Non-stationary Burgers model for rock. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2010, 41(2): 679-684 (in Chinese))
  - 9 蒋昱州, 张明鸣, 李良权. 岩石非线性黏弹塑性蠕变模型研究及其参数识别. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(4): 832-839 (Jiang Yuzhou, Zhang Mingming, Li Liangquan. Study on nonlinear viscoelasto-plastic creep model of rock and its parameter identification. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 27(4): 832-839 (in Chinese))
  - 10 施行觉, 李成波, Adnan Aydin 等. 地球介质的非正常参数黏弹模型. 地球物理学报, 2009, 52(1): 50-56 (Shi Xingjue, Li Chengbo, Adnan Aydin, et al. Viscoelastic model with variable parameters for earth medium. *Chinese Journal of Geophysics*, 2009, 52(1): 50-56 (in Chinese))
  - 11 张久鹏, 徐丽, 王秉纲. 沥青混合料蠕变模型的改进及其参数确定. 武汉理工大学学报 (交通科学与工程版), 2010, 34(4): 699-706 (Zhang Jiupeng, Xu Li, Wang Binggang. Modification of creep model of asphalt mixture and parameters determination. *Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science and Engineering)*, 2010, 34(4): 699-706 (in Chinese))
  - 12 邵卓平. 木质材料变参数流变模型的研究. 林业科学, 2003, 39(3): 106-110 (Shao Zhuoping. The study on variable coefficients rheological model of woods. *Cientia Silvae Sinicae*, 2003, 39(3): 106-110 (in Chinese))
  - 13 陈建康, 黄筑平, 楚海建等. 单向应力条件下松弛时间率相关的非线性黏弹性本构模型. 高分子学报, 2003, 3: 414-419 (Chen Jiankang, Huang Zhuping, Chu Haijian, et al. Nonlinear viscoelastic constitutive relations based on the rate sensitive relaxation time under the condition of uniaxial stress. *Acta Polymerica Sinica*, 2003, 3: 414-419 (in Chinese))
  - 14 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(6): 1081-1106 (Sun Jun. Rock rheological mechanics and its advance in engineering applications. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(6): 1081-1106 (in Chinese))
  - 15 张为民, 张淳源. 分数指数模型的热力学分析及其应用. 工程力学, 2002, 19(2): 95-99 (Zhang Weimin. Zhang Chunyuan. Thermodynamic analysis and application of fractional exponential model. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(2): 95-99 (in Chinese))
  - 16 金日光, 黄惠金, 周淑梅. 关于高分子材料在应力松弛过程中应力-时间关系的研究. 北京化工大学学报, 1996, 23(3): 31-38 (Jin Riguang, Huang Huijin, Zhou Shumei. Studies on relationship between stress and time of polymer materials during process of stress relaxation. *Journal of Beijing University of Chemical Technology*, 1996, 23(3): 31-38 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

## THE NON-STATIONARY DIFFERENTIAL CONSTITUTIVE MODELS OF VISCOELASTICITY<sup>1)</sup>

Kang Yonggang<sup>2)</sup> Zhang Xiu'e

(Institute of Disaster-Prevention Science and Technology, Sanhe, Hebei 065201, China)

**Abstract** Based on non-stationary viscous components, the non-stationary Maxwell model, the non-stationary Kelvin model and the non-stationary Zener model were developed. Their relaxation moduli, creep compliances and unloading functions were obtained by resolving the non-stationary constitutive relation. The results show that many empirical functions, such as power law relaxation, stretched exponential relaxation, logarithmic creep, can be seen as non-stationary model. The corresponding relaxation modulus and unloading functions of empirical creep functions, the corresponding creep compliance and unloading functions of empirical relaxation function were obtained by resolving the non-stationary constitutive relation.

**Key words** non-stationary differential model, empirical model, stress relaxation, creep

Received 15 August 2011, revised 10 September 2011.

1) The project was supported by the Foundation of Institute of Disaster-Prevention Science and Technology (201008).

2) E-mail: 81624304@163.com