

流固耦合的周期加强板的振动及声辐射研究¹⁾

周海安 * 王晓明 * 梅玉林^{†,2)}

*(大连理工大学机械工程学院, 大连 116024)

†(大连理工大学汽车工程学院, 大连 116024)

摘要 研究了流体负载下的无穷大双周期加强板, 在周期谐振力作用下的振动响应和声辐射, 并提出了一种基于有限元和空间波数法的半解析半数值方法. 首先利用有限元的方法对周期结构进行单元离散, 并将结构对薄板的作用力等效为节点力的作用. 然后通过周期结构的振动方程, 结合薄板与结构的位移边界条件, 建立了节点力与薄板节点位移的函数方程. 最后应用空间波数法和傅里叶变换, 并采用数值计算的方法求解出薄板的节点位移, 得到了周期加强板关于离散节点位移的振动和辐射声压方程. 在数值算例中, 对该方法的正确性进行了验证, 并且分析了周期结构对薄板的振动和声辐射的影响.

关键词 加强板, 振动响应, 有限元法, 周期结构, 空间波数法

中图分类号: TB532 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2012)02-0287-10

引 言

周期加强板是许多工程结构的组成部分, 在机械、船舶和航天等领域得到了广泛应用. 其中, 对于无穷大模型的周期加筋薄板的振动和声辐射问题已经有大量的研究: Mead 和 Pujara^[1] 提出了周期波数分析法, 并且从能量的角度分析了周期加筋薄板的振动性质; Mace^[2] 通过解析方法得到了流体作用下双周期加筋薄板的振动和辐射声压方程, 并且对点力作用下的水中远场辐射声压进行了分析; 吴文伟等^[3] 采用傅里叶变换的方法对单周期加筋薄板的声辐射进行了研究. 文献 [4-7] 等亦对周期加筋薄板的振动或声辐射问题提出了各自的求解方法. 近些年来, 众多科研工作者对周期加筋板结构的研究更加深入细致: 张涛等^[8] 对受面内冲击载荷下加筋板的非线性动态屈曲进行了分析; Maxit^[9] 采用离散傅里叶的方法研究了点力作用下的单周期加筋薄板的振动响应及声辐射性质; Wang^[10] 和 Legault 和 Atalla^[11-12] 以及 Xin 和 Lu^[13-14] 分别对周期加强筋连接的双层薄板结构的声透射或声辐射问题作了详细深入的分析; Li 等^[15] 以及 Yu 等^[16] 则采用传递矩阵的方法分析研究了失谐周期加筋板的波动局部化问题. 此外, Kaveh 等^[17] 提出了一种通

过分解矩阵和离散傅里叶变换来求解周期结构自由振动特征值的方法, 有效地减小了计算的工作量. 但是到目前为止, 对于其他非加筋类型的周期加强板的振动和声辐射的研究非常少, 而对于无穷大薄板附加任意形状双周期结构的研究作者尚未发现. 实际上, 对薄板进行周期加筋的目的主要是为了提高薄板结构的机械强度和稳定性以及改善其振动和辐射效应. 对薄板附加其他类型的周期结构可以达到类似的效果, 如在船舶设计中附加阻尼质量块可以对结构的振动和声辐射起到阻抑作用.

本文的主要目的是研究流体负载下的无穷大双周期加强板的振动和声辐射. 附加的结构既可以是周期筋也可以是其他不同形状的周期结构. 一般情况下, 在周期加筋薄板的振动和声辐射分析中, 加强筋被模拟成欧拉梁或 Timoshenko 梁, 梁与板之间的作用力可以直接以解析函数的形式给出. 但是如果附加在薄板上的周期结构是块状结构或其他几何无规则形状的结构, 则这种周期结构与薄板之间的相互作用难以通过解析函数表达, 而且单纯的解析方法也难以建立一种统一形式的数学模型以获得不同周期结构加强板的振动方程; 而如果单纯采用有限元和边界元等数值方法来计算无穷大模型的周期结构, 则计算量较大难以体现出优势, 而且纯粹的

2011-04-22 收到第 1 稿, 2011-07-27 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50475150, 50875030, 10872039, 90816025).

2) E-mail: meiyulin@dlut.edu.cn

©1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数值方法难以对周期结构直接进行物理机理分析,不能很好地预测具体的物理参数对结构振动和声辐射的影响.此外,从能量的角度对结构进行分析的统计能量法则主要用来分析结构的高频振动,而对结构中低频振动的分析精确度不高.

因此为了研究不同类型周期薄板的振动及声辐射性质,本文结合解析方法和数值方法的优点,提出了一种半解析半数值的方法.首先基于有限元的思想,对周期结构进行单元离散,将薄板与周期结构的面力等效为离散节点力的作用,本文方法通过对加强板周期理论的运用,在实际过程中只需要离散并计算一个周期结构的等效面力,有效地降低了工作的计算量.然后通过周期结构的有限元振动方程结合薄板的解析方程,以及结构与薄板在接触面的位移边界条件,建立了节点力和薄板离散点位移的方程表达式,并将薄板的振动方程表达为离散节点位移的函数.最后利用周期结构的空间波数法和傅里叶变换,得到了周期加强板的振动方程和辐射声压.

1 数学模型的建立

无穷大薄板通过附加沿 x 轴和 y 轴方向周期排列的结构构成了双周期加强板,周期结构与薄板下表面接触面紧密结合,不存在相对移动或滑动.相邻周期结构在 x 轴方向的间距是 L_x ,在 y 轴方向的周期间距是 L_y .定义薄板的上表面为水平坐标平面,薄板的上半空间 $z > 0$ 充满水流体,下表面空间是空气.其局部结构模型示意图如图 1 所示.

图 1 中薄板下表面附加的周期结构可以是任意几何形状.图 2 给出了几种不同类型的周期结构与薄板接触面的形状示意图.

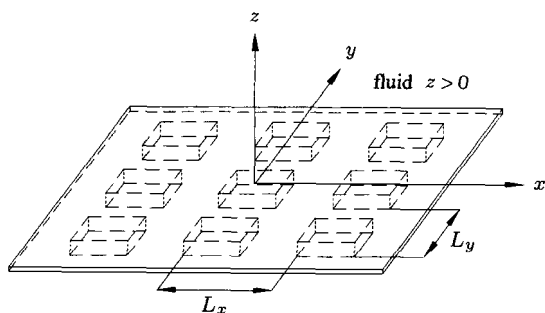


图 1 局部流体负载下的无穷大双周期加强板示意图

Fig.1 Diagram of the infinite fluid-loaded plate stiffened by two-dimensional periodic structures

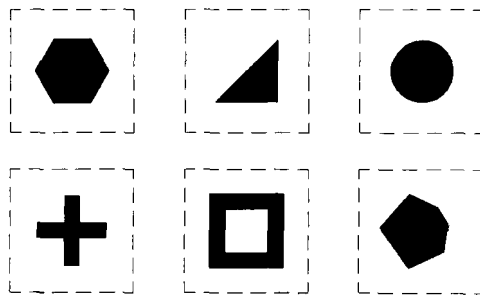


图 2 几种类型的周期结构与薄板接触面的形状示意图

Fig.2 The contact surfaces between several kinds of periodic structures and the plate

双周期加强板受到随时间 t 周期变化的谐振力 $p_{in}(x, y) \exp(j\omega t)$ 的作用,其方程表达式是^[2]

$$p_{in}(x, y) = p_e \exp[-j(k_x x + k_y y)] \quad (1)$$

式中

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \phi \quad (2)$$

p_e 为谐振力的幅值, ω 为圆频率, c 为水流体中的声速, θ 为谐振力与 z 轴方向的夹角, ϕ 为谐振力在水平面上的分量与 x 轴方向的夹角.

由于薄板是无穷大模型,且薄板的厚度为 $h = 5 \text{ mm}$,因此可以近似认为薄板沿 z 轴方向的振动位移不变.对加强板进行振动分析,假设谐振力直接作用在薄板上,设其在 t 时刻的振动位移是 $w(x, y) \exp(j\omega t)$,由于空气的密度相对于水流体的密度非常小,因此空气与薄板的声辐射作用可以忽略不计,则周期加强板的振动方程是(为了公式的简洁,在以下所有方程中都将省略时间因子 $\exp(j\omega t)$)

$$(D \nabla^2 - \rho h \omega^2) w(x, y) = p_{in}(x, y) - p_a(x, y, z=0) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} F_{m,n}(x, y) \quad (3)$$

式中, D 和 ρ 分别是薄板的弯曲刚度和密度, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E 和 ν 分别是薄板的杨氏模量和泊松比, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $p_a(x, y, z)$ 是薄板与水流体的耦合辐射声压, $F_{m,n}(x, y)$ 是第 (m, n) 个周期结构与薄板的作用力,第 $(0, 0)$ 个周期结构代表坐标原点位置处的结构.

2 周期结构对薄板作用力的有限元推导

要求解方程 (3), 首先必须得到 $F_{m,n}(x, y)$ 的函数表达式,但是由于周期结构几何形状多样性,

难以用统一的解析函数表达 $F_{mn}(x, y)$. 本文通过有限元的思想将周期结构进行单元离散, 将结构与薄板沿 z 轴方向的面力等效为接触面离散节点的法向作用力. 具体分析过程如下:

2.1 周期结构的有限元振动方程

将周期结构离散为足够数量的体单元和节点, 每个节点具有 3 个方向的位移自由度. 按照有限元的分析步骤, 选择单元的形函数, 计算单元刚度矩阵和质量矩阵, 并且按节点顺序组装单元刚度矩阵成总刚度矩阵, 最终得到每个周期结构关于离散节点的振动方程

$$(K - M\omega^2)q^{m,n} = P^{m,n} \quad (4)$$

式中, K, M 是任意一个周期结构的整体刚度矩阵和质量矩阵; $q^{m,n}, P^{m,n}$ 是第 (m, n) 个周期结构离散节点的位移向量和等效载荷向量. 为了便于方程的计算及推导, 采用集中质量矩阵并将式 (4) 展开为

$$\left(\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa} & 0 \\ 0 & M_{bb} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q_{out}^{m,n} \\ q_{inn}^{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{out}^{m,n} \\ p_{inn}^{m,n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, $q_{out}^{m,n}, p_{out}^{m,n}$ 是周期结构与薄板接触面上的节点的位移向量和载荷向量; $q_{inn}^{m,n}, p_{inn}^{m,n}$ 是周期结构的其他节点的位移向量和载荷向量. 由于单元刚度矩阵组装成总刚度矩阵后, 除了接触面节点以外的其他节点的作用力相互抵消, 其节点等效载荷为零, 因此 $p_{inn}^{m,n} = 0$. 根据式 (5) 第 2 组方程, 求得

$$q_{inn}^{m,n} = -(K_{bb} - \omega^2 M_{bb})^{-1} K_{ba} q_{out}^{m,n} \quad (6)$$

根据式 (5) 和 (6), 可以得到接触面节点载荷向量 $p_{out}^{m,n}$ 关于位移向量 $q_{out}^{m,n}$ 的表达式

$$K_{mat} q_{out}^{m,n} = p_{out}^{m,n} \quad (7)$$

式中

$$K_{mat} = K_{aa} - K_{ab}(K_{bb} - \omega^2 M_{bb})^{-1} K_{ba} - \omega^2 M_{aa} \quad (8)$$

式 (7) 可以表达为

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & K_{uw} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vw} \\ K_{wu} & K_{wv} & K_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{m,n} \\ v^{m,n} \\ w^{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u^{m,n} \\ f_v^{m,n} \\ f_w^{m,n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, $u^{m,n}, v^{m,n}, w^{m,n}$ 和 $f_u^{m,n}, f_v^{m,n}, f_w^{m,n}$ 分别代表接触面节点沿 x, y 和 z 轴方向的位移向量和载荷向量. 通过式 (9), 可以得到周期结构与薄板接触面离散节点的法向载荷向量和位移向量的关系表达式

$$f_w^{m,n} = K_{wu} u^{m,n} + K_{wv} v^{m,n} + K_{ww} w^{m,n} \quad (10)$$

2.2 节点力的表达

由于薄板和周期结构在接触面对应点的水平位移和振动位移相等, 因此式 (7) 中的节点位移向量和载荷向量可以表达为

$$\left. \begin{aligned} u^{m,n}(s) &= u(mL_x + x_s, nL_y + y_s, -h) \\ v^{m,n}(s) &= v(mL_x + x_s, nL_y + y_s, -h) \\ w^{m,n}(s) &= w(mL_x + x_s, nL_y + y_s) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$f_w^{m,n}(s) = f(mL_x + x_s, nL_y + y_s) \quad (12)$$

式中, u 和 v 是薄板下表面在 x 和 y 轴方向的位移, f 是周期结构对薄板的法向节点力; (x_s, y_s) 是坐标轴原点处的周期结构 (即 $m = n = 0$) 与薄板接触面上第 s 个节点的水平坐标值, $s = [1, 2, \dots, T]$, T 是每个接触面的总离散节点数. 矩阵 K_{wu}, K_{wv} 和 K_{ww} 在第 s 行 r 列的元素值分别表示为 $k_{s,r}^{wu}, k_{s,r}^{wv}$ 和 $k_{s,r}^{ww}$, 此外为了公式的简洁, 将 $u^{m,n}(s), v^{m,n}(s), w^{m,n}(s)$ 和 $f_w^{m,n}(s)$ 分别表达为 $u_s^{m,n}, v_s^{m,n}, w_s^{m,n}$ 和 $f_s^{m,n}$. 通过式 (10) ~ 式 (12), 可以得到节点力和节点位移之间的关系

$$f_s^{m,n} = \sum_{r=1}^T (k_{s,r}^{wu} u_r^{m,n} + k_{s,r}^{wv} v_r^{m,n} + k_{s,r}^{ww} w_r^{m,n}) \quad (13)$$

则第 (m, n) 个周期结构与薄板的作用力是

$$F_{mn}(x, y) = \sum_{s=1}^T f_s^{m,n} \delta(x - mL_x - x_s) \delta(y - nL_y - y_s) \quad (14)$$

因此, 通过有限元离散的方法和位移连续边界条件, 周期结构对薄板的作用力可以表达为薄板接触面离散点的位移函数. 将式 (14) 代入式 (3) 中, 可得

$$(D\nabla^2 - \rho h \omega^2) w(x, y) = p_{in}(x, y) - p_a(x, y, z=0) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^T f_s^{m,n} \delta(x - mL_x - x_s) \delta(y - nL_y - y_s) \quad (15)$$

3 周期加强板振动及声辐射方程的求解

3.1 方程的傅里叶变换

要求解式 (15), 需要对其进行傅里叶变换. 对满足条件要求的任意函数 $g(x, y)$, 其傅里叶变换是

$$\tilde{g}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[j(\alpha x + \beta y)] dx dy \quad (16)$$

傅里叶逆变换是

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\alpha, \beta) \frac{\exp[-j(\alpha x + \beta y)]}{(2\pi)^2} d\alpha d\beta \quad (17)$$

根据式 (16), 对式 (15) 进行傅立叶变换, 得

$$\begin{aligned} [D(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \rho h \omega^2] \tilde{w}(\alpha, \beta) = \\ (2\pi)^2 p_e \delta(\alpha - k_x) \delta(\beta - k_y) - \\ \tilde{p}_a(\alpha, \beta, z=0) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^T f_s^{m,n} \cdot \\ \exp\{j[(mL_x + x_s)\alpha + (nL_y + y_s)\beta]\} \end{aligned} \quad (18)$$

辐射声压满足 Helmholtz 方程和振速连续边界条件

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_a(x, y, z) + \\ \frac{\omega^2}{c^2} p_a(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\rho_0 \omega^2 w(x, y) = \left. \frac{\partial p_a(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (20)$$

对式 (19) 和式 (20) 进行傅里叶变换, 求解得到 [2]

$$\tilde{p}_a(\alpha, \beta, z=0) = -\rho_0 \omega^2 \tilde{w}(\alpha, \beta) \frac{\exp(-\gamma z)}{\gamma} \quad (21)$$

式中, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \omega^2/c^2$.

将式 (21) 代入式 (18) 中, 整理得

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\alpha, \beta) = \frac{1}{R(\alpha, \beta)} \left\{ (2\pi)^2 p_e \delta(\alpha - k_x) \delta(\beta - k_y) - \right. \\ \left. \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^T f_s^{m,n} \exp\{j[(mL_x + x_s)\alpha + \right. \\ \left. (nL_y + y_s)\beta]\} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

式中

$$R(\alpha, \beta) = D(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \rho h \omega^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2/c^2}} \quad (23)$$

3.2 空间波数法和泊松公式的应用

根据空间波数法可知, 二维周期加强板的振动位移可以表达为如下形式 [2]

$$w(x, y) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} W_{mn} \exp[-j(k_{x,m}x + k_{y,n}y)] \quad (24)$$

式中, W_{mn} 是第 (m, n) 个谐振分量的振幅, 且 $k_{x,m} = k_x + 2m\pi/L_x$, $k_{y,n} = k_y + 2n\pi/L_y$.

因此, 周期加强板的振动位移满足周期性性质

$$\begin{aligned} w(x + mL_x, y + nL_y) = \\ w(x, y) \exp[-j(mL_x k_x + nL_y k_y)] \end{aligned} \quad (25)$$

按照薄板理论的 Kirchhoff 假设可知, 薄板下表面的水平位移和振动位移近似满足如下偏分关系

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, -h) &= -H \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, -h) &= -H \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中, H 是薄板中性面与下表面的距离.

将式 (24) 代入式 (26) 中, 可得

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, -h) &= H \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} - \\ &\quad jk_{x,m} W_{mn} \exp[-j(k_{x,m}x + k_{y,n}y)] \\ v(x, y, -h) &= H \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} - \\ &\quad jk_{y,n} W_{mn} \exp[-j(k_{x,m}x + k_{y,n}y)] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

根据式 (25) ~ 式 (27) 可知, 式 (11) 满足周期关系

$$\left. \begin{aligned} u_s^{m,n} &= u_s^{0,0} \exp[-j(mL_x k_x + nL_y k_y)] \\ v_s^{m,n} &= v_s^{0,0} \exp[-j(mL_x k_x + nL_y k_y)] \\ w_s^{m,n} &= w_s^{0,0} \exp[-j(mL_x k_x + nL_y k_y)] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

通过式 (13) 可知, $f_s^{m,n}$ 是节点位移的线性函数, 因此同样满足周期性性质

$$f_s^{m,n} = f_s^{0,0} \exp[-j(mL_x k_x + nL_y k_y)] \quad (29)$$

为了公式的简洁, 在以下公式中 $u_s^{0,0}$, $v_s^{0,0}$, $w_s^{0,0}$ 和 $f_s^{0,0}$ 将被表达为 u_s , v_s , w_s 和 f_s .

对式 (22) 进行傅里叶逆变换, 并将式 (29) 代入, 得到

$$w(x, y) = \frac{1}{R(k_x, k_y)} \exp[-j(k_x x + k_y y)] - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^T f_s \exp\{j[(\alpha - k_x)mL_x + (\beta - k_y)nL_y]\} \cdot \frac{\exp\{-j[(x - x_s)\alpha + (y - y_s)\beta]\}}{(2\pi)^2 R(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \quad (30)$$

根据 δ 函数的性质和泊松叠加公式, 可得

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[j(\alpha - k_x)mL_x] = \frac{2\pi}{L_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left[(\alpha - k_x) + \frac{2m\pi}{L_x}\right] = \frac{2\pi}{L_x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha - k_{x,m}) \quad (31)$$

同理

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[j(\beta - k_y)nL_y] = \frac{2\pi}{L_y} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\beta - k_{y,n}) \quad (32)$$

将式 (31) 和式 (32) 代入式 (30) 中, 并根据式 (13) 计算整理得到加强板的振动方程表达式

$$w(x, y) = \frac{p_e \exp[-j(k_x x + k_y y)]}{R(k_x, k_y)} - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T (k_{s,r}^{wu} u_r + k_{s,r}^{wv} v_r + k_{s,r}^{ww} w_r) \cdot \frac{\exp\{-j[(x - x_s)k_{x,m} + (y - y_s)k_{y,n}]\}}{L_x L_y R(k_{x,m}, k_{y,n})} \quad (33)$$

对式 (33) 分别关于 x 和 y 求偏导, 并且令 $x = x_t$, $y = y_t$, $t = [1, 2, \dots, T]$, 并根据式 (26) 和式 (33) 可以得到方程组

$$\left. \begin{aligned} u_t &= jH \left[k_x \varphi(x_t, y_t) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T \xi_s(u_r, v_r, w_r) k_{x,m} \psi_{s,mn}(x_t, y_t) \right] \\ v_t &= jH \left[k_y \varphi(x_t, y_t) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T \xi_s(u_r, v_r, w_r) k_{y,n} \psi_{s,mn}(x_t, y_t) \right] \\ w_t &= \varphi(x_t, y_t) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T \xi_s(u_r, v_r, w_r) \psi_{s,mn}(x_t, y_t) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_t, y_t) &= \frac{\exp[-j(k_x x_t + k_y y_t)]}{R(k_x, k_y)} p_e \\ \xi_s(u_r, v_r, w_r) &= k_{s,r}^{wu} u_r + k_{s,r}^{wv} v_r + k_{s,r}^{ww} w_r \\ \psi_{s,mn}(x_t, y_t) &= \frac{\exp\{-j[(x_t - x_s)k_{x,m} + (y_t - y_s)k_{y,n}]\}}{L_x L_y R(k_{x,m}, k_{y,n})} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

根据式 (34) 可以得出 u_t , v_t 和 w_t 间的数学关系

$$u_t = jH(k_x w_t - \phi_{1,t}), \quad v_t = jH(k_y w_t - \phi_{2,t}) \quad (36)$$

式中

$$\phi_{1,t} = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T \xi_s(u_r, v_r, w_r) \frac{2m\pi}{L_x} \psi_{s,mn}(x_t, y_t) \quad (37a)$$

$$\phi_{2,t} = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T \xi_s(u_r, v_r, w_r) \frac{2n\pi}{L_y} \psi_{s,mn}(x_t, y_t) \quad (37b)$$

当谐振力频率在 100~5 000 Hz 范围内变化时, $0 \leq \max(k_x, k_y) \leq 20\pi \sin \theta/3$, 在下面算例分析时通过计算发现, $\phi_{1,t}$, $\phi_{2,t}$ 和 w_t ($t = 1, 2, \dots, T$) 的平均值在同一数量级. 在没有附加周期结构之前, 薄板的中面就是中性面, 薄板的下表面和中性面的距离是 $H = h/2$. 如果考虑周期结构的影响, 则薄板的中性面下移, $H < h/2$. 实际上由于块体结构的厚度远大于薄板的厚度 ($h = 5 \times 10^{-3}$), 且相对于薄板, 块体结构更加难以产生形变的原因, 在与块体接触区域的薄板中性面与它的下表面近似重合, 即 $H \approx 0$. 根据式 (36) 可知, 水平位移的作用相对于法向位移

非常小, 可以近似忽略不计. 因此为了减小计算量, 式 (34) 可以简化为

$$w_t = \varphi(x_t, y_t) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T k_{s,r}^{ww} w_r \psi_{s,mn}(x_t, y_t) \quad (38)$$

因此加强板的振动方程成为

$$w(x, y) = \frac{p_e \exp[-j(k_x x + k_y y)]}{R(k_x, k_y)} - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T k_{s,r}^{ww} w_r \cdot \frac{\exp\{-j[(x-x_s)k_{x,m} + (y-y_s)k_{y,n}]\}}{L_x L_y R(k_{x,m}, k_{y,n})} \quad (39)$$

对式 (21) 进行傅里叶逆变换, 并利用式 (39), 可以求解出加强板的辐射声压表达式

$$p_a(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \left\{ \frac{p_e \exp[-j(k_x x + k_y y)]}{R(k_x, k_y)} \cdot \frac{\exp(-k_{z,00} z)}{k_{z,00}} - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s,r=1}^T k_{s,r}^{ww} w_r \cdot \frac{\exp\{-j[(x-x_s)k_{x,m} + (y-y_s)k_{y,n}]\}}{L_x L_y R(k_{x,m}, k_{y,n})} \cdot \frac{\exp(-k_{z,mn} z)}{k_{z,mn}} \right\} \quad (40)$$

式中

$$k_{z,mn} = \sqrt{k_{x,m}^2 + k_{y,n}^2 - \omega^2/c^2} \quad (41)$$

通过式 (39) 和式 (40) 可知, 周期加强板的振动和声辐射方程是关于离散点位移的函数. 要求解离散节点位移, 需要对式 (38) 中的无穷项数 m, n 进行截断, 截断的项数必须保证节点位移的解收敛. 假设截断的正项数是 Q , 即 $m, n = [-Q, \dots, Q-1, Q]$, 如果计算的节点位移值与 $Q+10$ 的结果误差不超过 0.3%, 则选取 Q 为最大截断项. 共有 T 个待求离散节点位移, 求解它们并将结果代入式 (39) 和式 (40) 中, 即可得到双周期加强板的振动和辐射声压方程.

4 算例分析及方法验证

本节将以附加双周期块状结构为例, 分析其对无穷大薄板的振动和声辐射的影响. 为了简便, 将块状结构加强板简称为加块薄板. 另外为了验证方法的正确性, 以无穷大双周期加筋薄板为例, 将计算结果与 Mace^[2] 的结果作对比. 计算中用到的部分物理参数如下: $E = 1.95 \times 10^{11} \times (1 + 0.02j)$, $\rho = 7700$,

$\nu = 0.3$, $\theta = \phi = \pi/4$, $\rho_0 = 1000$, $p_e = 1000$, $c = 1500$. 参考声压是 $p_0 = 1 \times 10^{-6}$, 声压级是 $20 \lg(p_a/p_0)$, 所有的单位均采用国际标准单位. 算例中的辐射声压均是在 $(0, 0, 0.1)$ 点的辐射声压. 为了减少计算时间, 在算例中周期结构的质量被均匀分布在接触面的节点上, 因此在式 (8) 中有 $M_{bb} = 0$, 从而 $K_{mat} = K_{aa} - K_{ab} K_{bb}^{-1} K_{ba} - \omega^2 M_{aa}$.

4.1 双周期加块薄板的振动及辐射

周期块结构在 x - y 平面的形状是长方形环, 外环的长和宽分别是 L_1 和 L_2 , 内环分别是 $L_1/2$ 和 $L_2/2$. 块结构的厚度为 L_3 . 其结构示意图如图 3 所示.

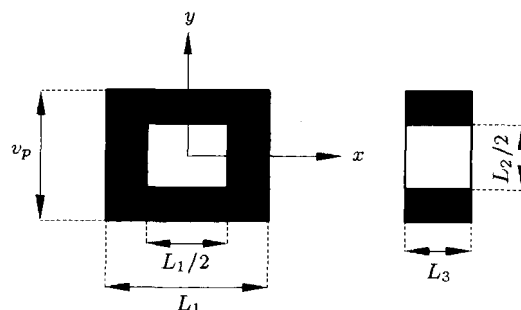


图 3 周期块结构示意图

Fig.3 Diagram of one periodical block

块体与薄板具有相同密度, 并且采用 Serendipity 六面体 8 节点单元, 每个节点具有 3 个位移自由度. 图 4 和图 5 分别给出了谐振力频率为 2000 Hz 时, 薄板与双周期加块薄板分别在 $0 \leq x, y \leq 2$ 和 $0 \leq x, y \leq 1$ 且时间 $t = 0$ 的振动响应. 块状结构的大小是 $L_1 = L_2 = 0.2$, $L_3 = 0.1$, 周期间距是 $L_x = L_y = 0.4$.

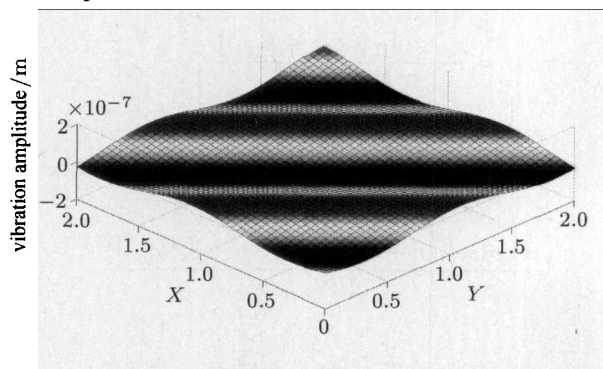


图 4 薄板的振动响应

Fig.4 The vibration response of the unstiffened plate

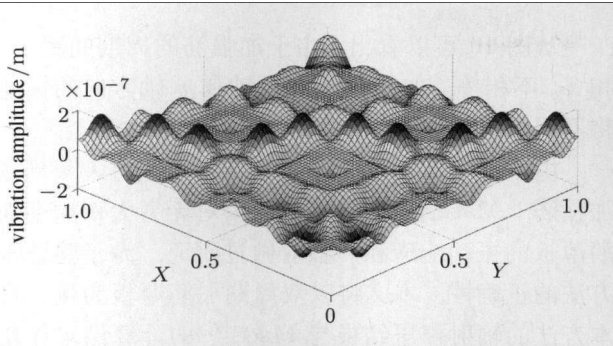


图 5 周期加块薄板的振动响应

Fig.5 The vibration response of the periodically block-stiffened plate

薄板的振动特性主要取决于它的振动相位角和幅值大小. 薄板的振动相位角变化方向由 ϕ 决定. 从图 4 中可以看出, 当 $\phi = \pi/4$ 时, 振动相位沿与 x 轴成 45° 的直线方向变化; 与 ϕ 不同, θ 并不改变相位角变化方向, 但是可以改变薄板的振动幅值大小.

对比图 4 和图 5 可以发现, 双周期加块薄板的振动具有二维周期性质. 相对于薄板结构, 加块薄板的平均振幅峰值有所减小, 尤其是薄板与周期块体接触面区域的振幅, 由于块状结构的振动阻抑作用, 其幅值明显减小. 从图 5 中可以看出, 加块薄板的振动沿 x 轴和 y 轴方向上是完全一致的, 这是由于沿两个轴方向的周期间距相等而且压力角 $\phi = 45^\circ$. 如果改变两轴的周期间距或压力角 ϕ , 加块薄板沿 x 轴和 y 轴方向的振动将不再具有图 5 所示的对称性.

为了分析块状结构的大小对薄板声辐射的影响, 图 6 给出了薄板和两种不同尺寸的双周期加块薄板的辐射声压图. 两种周期块体的长和宽分别是 $L_1 = L_2 = 0.1$ 和 $L_1 = 0.1, L_2 = 0.05$, 厚度均是 $L_3 = 0.05$, 周期间距是 $L_x = L_y = 0.2$.

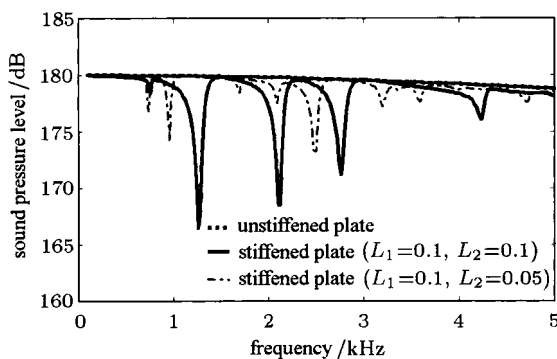


图 6 块状结构尺寸对辐射声压的影响

Fig.6 The influence of the dimensions of blocks on the radiated pressures

从图 6 中可以看出, 块状结构对薄板辐射声压中低频阶段的影响比较显著, 当频率超过 3000 Hz 后, 其对薄板的影响总体上有减小的趋势. 块状结构的作用随着尺寸的增加而增大, 这是由于其质量和刚度随尺寸变大, 从而增强了对薄板的影响的原因. 当块状结构大小是 $L_1 = L_2 = L_3 = 0.1$ 时, 声压级在 1200 Hz 频率附近降低了大约 24 dB, 可见块状结构可以在特定频率范围内有效的降低薄板的辐射声压.

图 7 给出了不同周期间距的加块薄板的辐射声压, 每个块状结构的大小是 $L_1 = L_2 = L_3 = 0.1$.

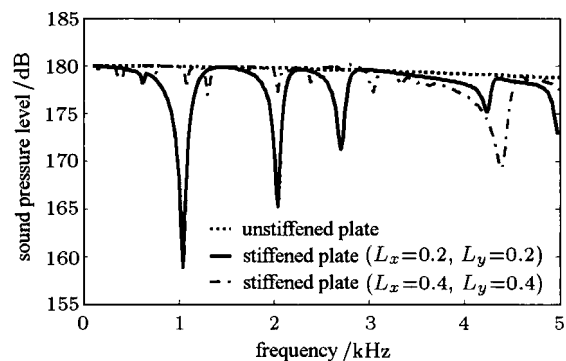


图 7 周期间距对辐射声压的影响

Fig.7 The influence of the periodic distances on the radiated pressures

从图 7 中可以看出, 在低于 3000 Hz 的范围内, 周期间距越小, 块状结构对薄板辐射声压的作用越明显; 但是当频率在 3000 ~ 4700 Hz 的范围内时, 块状结构的作用随着周期间距的增大而增大. 由此可见, 周期间距的大小是影响薄板辐射声压的一个重要因素. 因此可以根据实际需要选择周期间距的大小以降低辐射声压.

由于加块薄板的振动和声辐射方程是以分量叠加的形式表达的, 为了验证上面计算结果的收敛性, 图 8 给出了块状结构的大小是 $L_1 = L_2 = L_3 = 0.1$, 周期间距为 $L_x = L_y = 0.2$ 和 $L_x = L_y = 0.4$ 两种情况下, 加块薄板辐射声压曲线的收敛性对比.

每个块状结构与薄板的接触面区域被均匀离散成 72 个节点, 截断区间是 $-16 \leq m, n \leq 16$; 为了判断计算结果是否收敛, 又将接触面区域离散成 240 个节点, 截断区间是 $-32 \leq m, n \leq 32$. 从图 8 中看出, 在两种周期间距情况下, 辐射声压曲线的误差均不超过 1 dB, 因此证明当离散点取 $T = 72$ 截断为 $Q = 16$ 时计算结果已经收敛.

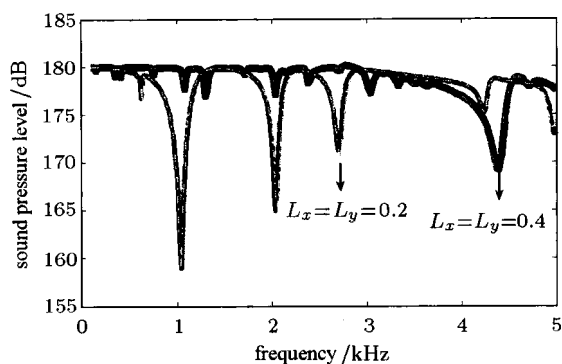


图8 计算结果收敛性的证明

Fig.8 The verification of the convergence of the solutions

4.2 十字形双周期加强筋薄板的振动及辐射

图9给出了局部十字形双周期加强筋薄板的结构示意图, 十字形加强筋沿 $x = mL_x$ 和 $y = nL_y$ 周期分布, m 和 n 是整数. 假设十字形交叉筋是相同的, 且密度与薄板相等, 加强筋的横截面尺寸是 0.1×0.0125 , 短边与薄板相接.

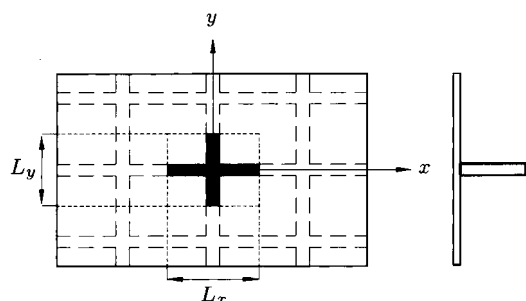


图9 无穷大加强筋薄板与一个周期单元的结构示意图

Fig.9 Diagram of the infinite beam-stiffened plate with one highlighted periodic unit

图10是谐振频率为2000 Hz时周期加强筋薄板在 $0 \leq x, y \leq 1$ 且时间 $t = 0$ 的振动响应. 周期间距是 $L_x = 0.2, L_y = 0.4$.

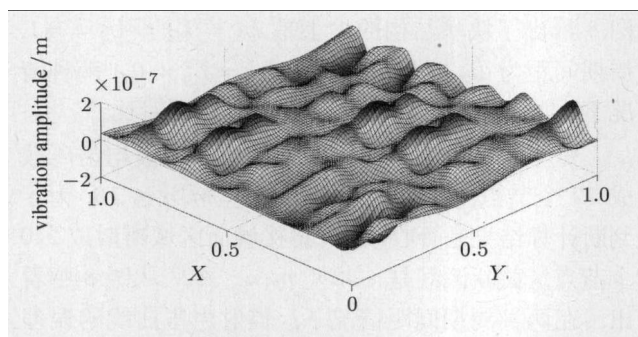


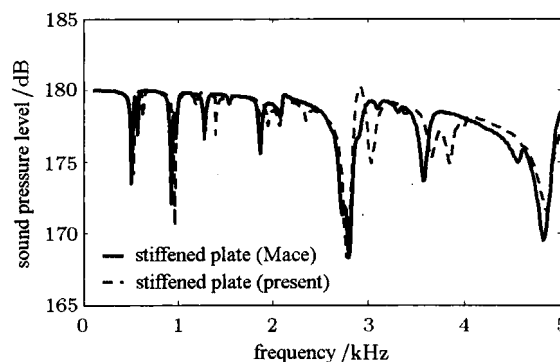
图10 周期加强筋薄板的振动响应

Fig.10 The vibration response of the beam-stiffened plate

从图10可以看出, 由于加强筋的周期间距 L_x 和 L_y 不相等, 加筋薄板沿 x 轴和 y 轴方向的振动将不再具有对称性.

由于十字形加强筋周期延展后为无穷大双周期加强筋, Mace 曾经在文献 [2] 中对无穷大双周期加强筋薄板的振动响应和声辐射做过研究, 为了验证本方法的正确性, 本文将以双周期加强筋薄板为例, 将本方法的辐射声压结果与 Mace [2] 的计算结果作比较.

在算例中, 加强筋是由三维 8 节点 Serendipity 单元模拟, 每一个周期接触面如图9中标示区域, 被离散成 96 个节点. 图11给出了两种方法计算得到的辐射声压.

图11 周期间距为 $L_x = 0.2, L_y = 0.4$ 的两种方法的计算结果的比较Fig.11 The comparison of the results of the two methods with $L_x = 0.2, L_y = 0.4$

从图中看出, 尽管两种方法得到的声压级曲线存在一定差异, 但是曲线的总体趋势是近似一致的, 计算结果基本吻合. 造成两种计算结果产生偏差的主要原因是: 在文献 [2] 中, 加强筋是被模拟成欧拉梁来进行计算的, 而且加强筋和薄板的作用力被近似等效成线力; 而在本文方法中, 则是将加强筋离散成有限体单元, 加强筋与薄板的作用力被等效为离散点力. 以上原因都会导致计算结果的差异, 但是两种方法在总体上的计算值是近似相等的, 从而证明了本文方法的正确性.

5 结论

本文对无穷大双周期加强板的振动响应和声辐射进行了研究, 并提出了一种基于有限元和空间波数法的半解析半数值方法. 通过有限元的方法将周期结构对薄板的作用力等效成节点力的作用, 并最终通过边界条件和数学变换将周期加强板的振动和

声辐射方程表达为薄板离散节点位移的函数。在数值算例中, 以周期块结构为例分析了其对薄板的振动和声辐射的影响。计算结果表明周期块状结构可以在特定频域内, 尤其是中低频区域, 有效的降低薄板的辐射声压; 此外, 加强板的周期间距对辐射声压的影响比较明显。最后通过与双周期加筋薄板计算结果的比较, 证明了本方法的正确性。

参 考 文 献

- 1 Mead DJ, Pujara KK. Space harmonic analysis of periodically supported beams: response to convected random loading. *Journal of Sound and Vibration*, 1971, 14(2): 525-532
- 2 Mace B R. Sound radiation from fluid loaded orthogonally stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 79(3): 439-452
- 3 吴文伟, 冷文浩, 沈顺根. 具有等间距相同加强筋板的声辐射. 中国造船, 1999, 146(3): 72-81 (Wu Wenwei, Leng Wenhao, Shen Shungeng. Sound radiation of plate with equidistant reinforced ribs. *ShipBuilding of China*, 1999, 146(3): 72-81 (in Chinese))
- 4 Rumerman ML. Vibration and wave propagation in ribbed plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1974, 96(2): 370-373
- 5 Mead DJ. A new method of analyzing wave propagation in periodic structures: application to periodic Timoshenko beams and stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 104(1): 9-27
- 6 Mace BR. Sound radiation from a plate reinforced by two sets of parallel stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, 71(3): 435-441
- 7 Eatwell G P, Butler D. The response of a fluid-loaded, beam-stiffened plate. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, 84(3): 371-388
- 8 张涛, 刘土光, 周晶晶等. 受面内冲击载荷下加筋板的非线性动态屈曲. 固体力学学报, 2003, 24(4): 391-398 (Zhang Tao, Liu Tuguang, Zhou Jingjing, et al. Nonlinear dynamic buckling of stiffened plates under in-plane impact loading. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 24(4): 391-398 (in Chinese))
- 9 Maxit L. Wavenumber space and physical space responses of a periodically ribbed plate to a point drive: A discrete approach. *Applied Acoustics*, 2009, 70(4): 563-578
- 10 Wang J, Lu TJ, Woodhouse J, et al. Sound transmission through lightweight double-leaf partitions: theoretical modeling. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 286: 817-847
- 11 Legault J, Atalla N. Numerical and experimental investigation of the effect of structural links on the sound transmission of a lightweight double panel structure. *Journal of sound and vibration*, 2009, 324: 712-732
- 12 Legault J, Atalla N. Sound transmission through a double panel structure periodically coupled with vibration insulators. *Journal of sound and vibration*, 2010, 329: 3082-3100
- 13 Xin FX, Lu TJ. Analytical modeling of wave propagation in orthogonally rib-stiffened sandwich structures: Sound radiation. *Computers and Structures*, 2011, 89(5-6): 507-516
- 14 Xin FX, Lu TJ. Analytical modeling of fluid loaded orthogonally rib-stiffened sandwich structures: sound transmission. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, 58(9): 1374-1396
- 15 Li FM, Wang YS, Hu C, et al. Localization of elastic waves in periodic rib-stiffened rectangular plates under axial compressive load. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281(1-2): 261-273
- 16 Yu GL, Wang YS, Lan J. Vibration localization in disordered periodically stiffened double-leaf panels. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, 80(6): 687-697
- 17 Kaveh A, Nouri M, Taghizadieh N. An efficient solution method for the free vibration of large repetitive space structures. *Advances in Structural Engineering*, 2011, 14(2): 151-161

CNKI 优先出版编码: lxxb2011-094-20110819

(责任编辑: 刘希国)

THEORETICAL ANALYSIS OF THE VIBRATION AND SOUND RADIATION FROM AN INFINITE FLUID-STRUCTURE COUPLED PLATE STIFFENED BY TWO-DIMENSIONAL PERIODIC STRUCTURES¹⁾

Zhou Haian* Wang Xiaoming* Mei Yulin^{†,2)}

**(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)*

†(School of Automotive Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract The vibration response of and sound radiation from an infinite fluid-loaded plate, stiffened by two dimensional periodically spaced structures and excited by a time-dependent plane harmonic pressure, are investigated in this paper. A semi-analytical approach based on the finite element method (FEM) and space harmonic method to study the stiffened plate is also presented. To obtain the reaction forces of the periodic structures acting on the plate, the FEM is applied by discretizing each structure into a sufficient number of elements and nodal points, and the reaction forces are approximated by the equivalent nodal forces. Then using the vibration equations of the periodic structures combined with the displacement boundary conditions between them and the plate, the nodal forces are expressed in terms of the corresponding discrete point displacements of the plate. Based on the space harmonic method and Fourier transforms, the vibro-acoustic equations of the stiffened plate are finally derived as functions of these point displacements of the plate, which are calculated numerically. In numerical examples, the validity of the present approach is demonstrated and the effects of the periodic structures on the vibro-acoustic responses of the plate are also analyzed.

Key words stiffened plate, vibration response, FEM, periodic structure, space harmonic method

Received 22 April 2011, revised 27 July 2011.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (50475150, 50875030, 10872039, 90816023).

2) E-mail: meiyulin@dlut.edu.cn

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>