

基于 D-P 准则的压力相关材料结构拓扑优化¹⁾

罗阳军²⁾

(西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

摘要 基于描述材料力学行为的 Drucker-Prager(D-P) 屈服准则, 研究了压力相关材料连续体结构拓扑优化设计问题的数学模型和数值算法. 以单元材料人工密度为设计变量, 结合 SIMP 惩罚模型和多孔微结构局部应力插值模型, 建立了以材料体积最小化为目标、考虑材料 D-P 屈服条件约束的优化问题数学模型. 利用 ε - 松弛方法消除奇异解现象, 采用伴随法有效推导约束函数灵敏度计算公式, 运用基于梯度的连续变量优化算法迭代求解优化问题. 数值算例验证了优化模型的正确性及数值算法的有效性, 并通过与 von Mises 应力约束优化结果的比较, 说明了材料的压力相关特性会对结构最优拓扑产生重要影响. 该方法设计出的最优拓扑由于充分利用了压力相关材料的抗压能力, 因而更为合理和实际.

关键词 压力相关材料, Drucker-Prager 准则, 拓扑优化, 灵敏度分析

中图分类号: O344.3, TU313.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)05-0878-08

引 言

作为结构创新概念设计的一种有效手段, 连续体拓扑优化着力于在指定设计域内寻找结构的某种最优材料分布. 在数学模型上, 连续体拓扑优化问题可以构造为设计域内给定材料体积约束下的最小结构柔顺性 (或最大刚度) 问题, 或者是给定材料应力水平约束条件下的最小材料体积问题. 前者以其实施简便的优点而得到广泛应用, 但对于实际工程中可能遭受材料屈服失效的结构设计问题, 后者考虑材料应力水平的拓扑优化设计显得更为重要.

早期的连续体应力拓扑优化研究工作可以追溯到 20 世纪 90 年代末, Cheng 和 Zhang^[1], Shim 和 Manooch^[2] 通过在全部有限单元上施加 von Mises 屈服应力约束条件, 提出了“局部应力约束”方法. 之后, Duysinx 和 Bendsøe^[3], Pereira 等^[4], Burger 和 Stainko^[5] 分别采用 ε - 松弛方法^[6] 和相场松弛方法来避免应力奇异解现象, 使得应力拓扑优化得以成功用于实际工程设计. 另一方面, 由于“局部应力约束”方法在每个单元上施加约束, 导致应力拓扑优化问题需要处理大量的非线性约束条件及设计变量, 尤其对于复杂结构, 求解计算量非常庞大. 近年来, Paris 等^[7-8] 还进一步发展了“整体

应力约束”方法, 利用凝聚函数将全部局部约束聚集为一个或几个整体约束条件, 以减少约束个数, 使得优化问题更易于数值处理.

应该指出, 已有的应力拓扑优化研究绝大多数基于 von Mises 屈服准则, 适合于处理压力无关材料 (如大部分金属材料) 结构设计问题. 然而, 对于某些金属材料 (如铸铁) 及非金属材料 (如岩石、土、混凝土、陶瓷、聚合物), 其抗剪强度会随着静水压力的增加而增加, 属于压力相关材料. 这类材料一般具有抗压强度较高而抗拉强度低的特点, 在分析和设计时不适合采用 von Mises 屈服准则, 故传统的 von Mises 应力拓扑优化方法或者最小柔顺性方法难以胜任. 以灰铸铁试件为例, 破坏时一般沿 $45^\circ \sim 55^\circ$ 的倾斜面断裂, 可以测得其压缩强度极限比拉伸强度极限大得多, 约为 2~4 倍. 关于压力相关材料破坏准则的试验研究与理论分析^[9] 已经有几十年的历史, 发展了各种各样的破坏准则, 其中应用较多的主要有 Mohr-Coulomb 准则、Drucker-Prager(D-P) 准则、以及对它们的修正变种等^[10]. 尤其在岩石和土壤工程的数值分析中, 采用 D-P 屈服准则可得到较为精确的结果.

尽管压力相关材料在实际工程中应用非常广泛, 但在连续体拓扑优化中考虑材料压力相关特征

2011-01-04 收到第 1 稿, 2011-06-01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (51008248) 和西北工业大学基础研究基金 (JC200936) 资助项目.

2) E-mail: yangjunluo@nwpu.edu.cn

的研究并不多见. 如 Duysinx^[11] 基于 Raghava 和 Ishai 等效应力, 研究了黏胶材料的拓扑优化问题. Querin 等^[12] 提出了改进的优化准则方法来设计具有不同拉压行为的类桁架连续体结构. 荣见华等^[13] 和蔡坤等^[14] 还分别运用拓扑渐进优化方法和浮动参考应变区间方法调查了拉压不同性能对材料最优分布的重要影响及处理方法. 这些研究结果表明了结构拓扑优化设计中考虑材料压力相关特性的必要性. 总的说来, 这方面的工作还远不够系统和完善.

本文将基于材料屈服行为的 D-P 准则描述, 研究由压力相关材料制造的连续体结构拓扑优化问题. 通过对单元材料刚度及单元均匀化应力进行幂指数插值处理, 建立以材料相对密度为设计变量、结构材料体积最小化为目标、具有单元 D-P 屈服条件约束的拓扑优化模型. 利用 ε - 松弛方法消除应力奇异解现象, 结合伴随向量法有效推导设计灵敏度计算格式, 采用基于梯度的优化算法 (移动渐近线法 MMA^[15]) 求解优化问题. 最后给出数值算例来验证优化模型的正确性及算法的有效性.

1 D-P 屈服准则

D-P 屈服准则于 1952 年在 von Mises 强度准则的基础上考虑了静水压力而推广提出, 在岩土混凝土工程领域得到了很好的应用^[16]. D-P 准则的屈服函数 F 可以表示为

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \alpha J_1(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2'(\boldsymbol{\sigma})} - H \quad (1)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}]^T$ 为某一材料点的应力向量, α 和 H 是与材料物理性质有关的常数, J_1 为第一应力不变量, J_2' 为第二偏应力不变量, 即

$$\left. \begin{aligned} J_1(\boldsymbol{\sigma}) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ J_2'(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式 (1) 表示的屈服面在主应力空间中是一个正圆锥. 若不考虑屈服面的硬化, 当 $F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ 时即表示材料屈服失效. 若 α 等于零, 式 (1) 退化为 von Mises 屈服准则.

在岩土力学中, 材料性质通常用内摩擦角 φ 和黏聚力 c 来描述. 通过采用 D-P 准则对 Mohr-Coulomb 准则在主应力空间进行逼近, 则可以将材料常数 α 和 H 与材料的内摩擦角 φ 及黏聚力 c 相互关联起

来. 如图 1 所示, 若使两屈服面的锥顶点重合, 且 D-P 屈服面形成 Mohr-Coulomb 六棱锥屈服面的外包络圆锥, 可以得到

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad H = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (3)$$

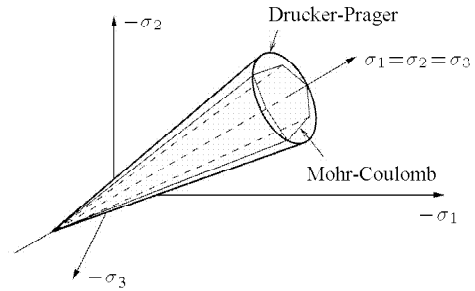


图 1 主应力空间中的 D-P 屈服面与 Mohr-Coulomb 屈服面

Fig.1 D-P and Mohr-Coulomb yield surface in the principal stress space

对于混凝土等材料, 若已知材料的单轴抗压强度 σ_c 和单轴抗拉强度 σ_t , 分别将 $(\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c)$ 和 $(\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$ 两种特殊的主应力状态代入到方程 (1) 中

$$\left. \begin{aligned} -\alpha \sigma_c + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_c - H &= 0 \\ \alpha \sigma_t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_t - H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

联立求解式 (4), 容易得到

$$\alpha = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sqrt{3}(\sigma_c + \sigma_t)}, \quad H = \frac{2\sigma_c \sigma_t}{\sqrt{3}(\sigma_c + \sigma_t)} \quad (5)$$

2 压力相关材料结构拓扑优化

2.1 优化问题数学模型

利用离散的 1/0 值函数 χ 来定义设计域中任一点 x 处的材料有无, 结构的某种材料分布情况可以在数学上描述为

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\text{mat}} \\ 0, & x \in \Omega_{\text{des}} \setminus \Omega_{\text{mat}} \end{cases} \quad (6)$$

其中, Ω_{des} 和 Ω_{mat} 分别代表设计域和完全实心材料所占区域.

拓扑优化的目的在于根据性能要求决定材料在给定设计域 Ω_{des} 中的最优分布情况. 这里, 结构性

能要求为外载荷作用下材料不发生屈服失效行为, 故本文的压力相关材料结构拓扑优化问题构造为任一材料点均满足 D-P 屈服准则约束条件的最小材料体积 (或最小重量) 问题.

$$\left. \begin{aligned} \min_{\chi(x)} \quad & V = \int_{\Omega_{\text{des}}} \chi(x) d\Omega \\ \text{s.t.} \quad & \text{平衡方程} \\ & F(\boldsymbol{\sigma}(x)) = \alpha J_1(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2'(\boldsymbol{\sigma})} - H \leq 0 \\ & (x \in \Omega_{\text{mat}}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

为便于运用连续变量优化算法来求解上述离散变量问题, 有效的处理方法是将离散值函数 $\chi(x)$ 用一个在 $[0, 1]$ 间连续取值的人工密度函数 $\rho(x)$ 代替, 并结合 SIMP 惩罚模型引入惩罚因子对中间人工密度值进行惩罚, 使中间人工密度值能够尽可能向 1 或 0 两端聚集, 因此能够很好地逼近原 1/0 离散变量的优化模型. SIMP 惩罚模型将每个材料点的弹性本构矩阵 $\mathbf{D}$ 表示为该点人工密度值的幂函数, 即

$$\mathbf{D}(x) = \rho(x)^p \mathbf{D}_0, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad (x \in \Omega_{\text{des}}) \quad (8)$$

其中, $\mathbf{D}_0$ 为完全实心材料的弹性本构矩阵, p 为惩罚因子, 根据拓扑优化研究中的经验取值^[17], 取 $p \geq 3$ 即能保证解的存在性, 获得有意义的拓扑形式, 故本文中取惩罚因子 $p = 3$.

材料人工密度插值惩罚模型能够用多孔微结构来进行模拟. 根据均匀化方法的基本思想, 微结构单胞在宏观水平上的材料应力-应变关系为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x) = \mathbf{D}(x) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) \quad (9)$$

其中, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x)$ 和 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ 分别代表材料点 x 处的均匀化应力和均匀化应变.

当某材料点的人工密度取中间值时, 该多孔微结构的局部应力状态与均匀化应力存在一定联系. 许多学者推荐了不同的表达关系式, 其中以 Duysinx 和 Bendsøe^[3] 提出的“局部应力插值”模型最受青睐. 他们采用与密度惩罚因子 p 相同的幂, 将微观水平上的材料应力 $\boldsymbol{\sigma}(x)$ 表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(x) / \rho(x)^p = \mathbf{D}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) \quad (10)$$

应该指出, 式 (10) 所示的幂函数插值模型为多孔微结构局部应力状态的物理理解和数值计算均提供了极大便利. 根据该模型, 当均匀化应变为有限值时, 能够保证局部应力也为有限值.

将结构设计域进行有限元离散, 假定单元内各材料点的人工密度取相同值, 且材料弹性本构矩阵为相同量. 基于 SIMP 模型和有限单元方法, 离散变量优化问题 (7) 可改写为连续变量优化形式

$$\left. \begin{aligned} \min_{\rho} \quad & V = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e V_e \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & F(\boldsymbol{\sigma}^e, \rho_e) = \alpha J_1\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^e}{\rho_e^p}\right) + \sqrt{J_2'\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^e}{\rho_e^p}\right)} - H \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (e = 1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, 设计变量 $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{NE}\}^T$ 为单元人工相对密度变量, NE 为单元总个数, V_e 为单元体积, $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ 代表线弹性平衡方程, $\mathbf{K}$, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{f}$ 分别为结构总刚矩阵、节点位移向量和节点载荷向量, $\boldsymbol{\sigma}^e$ 为第 e 个单元的平均应力向量, $\rho_{\min} = 0.01$ 是给定的材料人工相对密度下限.

2.2 约束放松策略

式 (10) 所示的局部应力插值模型为预测多孔微结构的失效行为提供便利, 然而, 当一个单元的人工相对密度趋近于零时, 单元刚度也趋近于零, 此时可能存在较大的单元变形或单元应变, 根据式 (10) 也就得到较大的局部应力. 尽管该低密度单元的局部应力仍为有限值, 但它极可能违反优化问题 (11) 中的材料屈服约束条件, 导致这些低密度单元难以从优化程序中顺利删除, 因而使得寻找全局最优解变得非常困难, 即存在所谓的“应力奇异解现象”. 该现象最早由 Sved 和 Ginos^[18] 在求解三杆桁架拓扑优化问题时发现, 长期以来是拓扑优化的主要障碍之一. 从数学角度来说, 应力奇异解现象可以归咎于设计空间的退化及约束条件在零密度取值时的不连续性^[19].

为克服应力奇异解现象, 常用的解决方法是将局部应力约束条件在低密度值处加以放松处理. Cheng 和 Guo^[6] 对此做了深入地研究, 引入一个附加的松弛参数, 基于约束扰动技术提出了 ε -松弛方法, 使退化的可行子空间被扩充, 从而有效解决了该难题. 这里, 采用 ε -松弛方法可以将优化问题 (11) 中的不等式约束替换为

$$\left. \begin{aligned} R_F(\boldsymbol{\sigma}^e, \rho_e) &= \frac{1}{H} \left[\alpha J_1\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^e}{\rho_e^p}\right) + \sqrt{J_2'\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^e}{\rho_e^p}\right)} \right] - h_e \leq 0 \\ h_e &= 1 + \frac{\varepsilon}{\rho_e} - \varepsilon \quad (e = 1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中, $h_e \geq 1$ 为松弛系数, 它代表着相应约束条件的放松程度, $\varepsilon > 0$ 为松弛参数. 显然, 当人工相对密度 $\rho_e = 1$ 时, 无论 ε 取何值, 松弛约束 (12) 均退化为问题 (11) 中所示的原约束条件. 这意味着松弛约束条件 (12) 能够保证原约束在完全实心材料时得到满足, 而只有当 ρ_e 小于 1 时, 施加于单元上的 D-P 约束条件才得到放松, 且 ρ_e 值越小时, 放松程度越大.

这里, 松弛参数 ε 对低密度单元约束条件的放松程度起着决定性作用. 如图 2 所示, 直线 $h_e = 1$ 代表原约束条件, 其他曲线表示 ε 取不同值时的约束放松程度, 可见, ε 越大, 约束条件的放松程度也就越大. 总之, 该松弛处理改变了原约束在零密度处的不连续状态, 从而可以采用经典的数学规划算法来求解优化问题. 根据计算经验, 并参考图 2 的比例关系, 本文中取松弛参数 $\varepsilon = 0.1$.

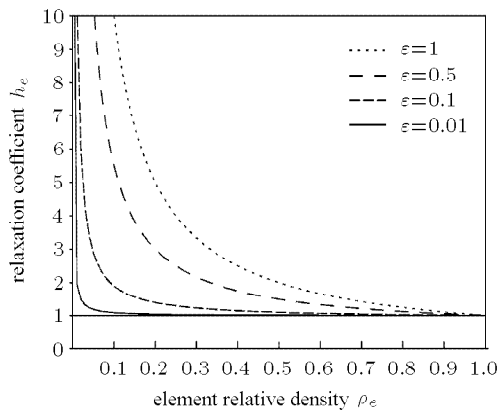


图 2 不同 ε 下松弛系数随单元相对密度的变化情况

Fig.2 Variation of the relaxation coefficient with element relative density under different values of ε

3 灵敏度分析

经过约束放松处理的拓扑优化问题可采用移动渐进线方法^[15]来求解, 因此需要推导式 (12) 所示约束函数对设计变量的灵敏度表达式. 常用的灵敏度分析方法主要有两种, 即直接法和伴随法. 其中, 直接法的计算量与设计变量的个数直接相关, 而伴随法主要计算量在于求解伴随方程, 与设计变量个数无关. 本文采用伴随法实现松弛约束条件 $R_F(\sigma^e, \rho_e)$ 对设计变量 (人工材料相对密度) 的灵敏度分析.

结构平衡方程采用有限元方法进行求解, 单元平均应力-位移关系为

$$\sigma^e = DBu = \rho_e^p D_0 Bu = \rho_e^p T_0 u \quad (13)$$

其中, B 为完全实心材料的应变-位移矩阵, $T_0 = D_0 B$ 为实心材料的应力矩阵.

约束条件 (12) 中的第一应力不变量和第二偏应力不变量可用矩阵形式表示

$$\left. \begin{aligned} J_1\left(\frac{\sigma^e}{\rho_e^p}\right) &= \frac{\sigma_{xx}^e + \sigma_{yy}^e + \sigma_{zz}^e}{\rho_e^p} = \\ w^T \frac{\sigma^e}{\rho_e^p} &= w^T T_0 u = W_0 u \\ J_2'\left(\frac{\sigma^e}{\rho_e^p}\right) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma^e}{\rho_e^p}\right)^T V \left(\frac{\sigma^e}{\rho_e^p}\right) = \\ \frac{1}{3} u^T T_0^T V T_0 u &= \frac{1}{3} u^T M_0 u \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, $W_0 = w^T T_0$, $M_0 = T_0^T V T_0$, 向量 w 和矩阵 V 是引入的与单元类型相关的常量. 例如, 对于平面应力问题, 有

$$w = \{1 \ 1 \ 0\}^T, \quad V = \begin{Bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

因此, 松弛约束条件 $R_F(\sigma^e, \rho_e)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} R_F(\sigma^e, \rho_e) &= \frac{1}{H} \left(\alpha W_0 u + \sqrt{\frac{1}{3} u^T M_0 u} \right) - \\ h_e &\leq 0 \quad (e = 1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \quad (16)$$

将式 (16) 对单元设计变量 $\rho_j (j = 1, 2, \dots, NE)$ 进行微分, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_F(\sigma^e, \rho_e)}{\partial \rho_j} &= \\ \frac{1}{H} \left(\alpha W_0 + \frac{u^T M_0}{\sqrt{3 u^T M_0 u}} \right) \frac{\partial u}{\partial \rho_j} - \frac{\partial h_e}{\partial \rho_j} &= \\ \frac{1}{H} (a^e)^T \frac{\partial u}{\partial \rho_j} - \frac{\partial h_e}{\partial \rho_j} \quad (e = 1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $a^e = (\alpha W_0 + u^T M_0 / \sqrt{3 u^T M_0 u})^T$ 是与第 e 个单元约束条件相对应的伴随载荷向量.

对平衡方程 $Ku = f$ 关于设计变量 ρ_j 求导得

$$\frac{\partial K}{\partial \rho_j} u + K \frac{\partial u}{\partial \rho_j} = \frac{\partial f}{\partial \rho_j} \quad (18)$$

假设外载荷情况不依赖于结构拓扑形状, 则等式 (18) 中的右端项 $\partial f / \partial \rho_j$ 为零. 将式 (18) 代入式 (17), 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_F(\sigma^e, \rho_e)}{\partial \rho_j} &= -\frac{1}{H} (a^e)^T K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \rho_j} u - \frac{\partial h_e}{\partial \rho_j} \\ (e = 1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

引入伴随向量 λ^e ($e = 1, 2, \dots, NE$), 使其满足方程系统

$$\mathbf{K}\{\lambda^1 \ \lambda^2 \ \dots \ \lambda^{NE}\} = \{\mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^{NE}\} \quad (20)$$

代入式 (19), 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_F(\sigma^e, \rho_e)}{\partial \rho_j} &= -\frac{1}{H}(\lambda^e)^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} - \frac{\partial h_e}{\partial \rho_j} \\ (e &= 1, 2, \dots, NE) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

应该指出, 本文优化问题的约束条件个数和设计变量个数均等于有限单元个数, 从理论上说采用直接法和伴随法的计算效率相当, 但实际上, 由于各约束条件的伴随方程 (20) 可以统一求解, 故采用伴随法实现松弛约束条件的灵敏度分析, 具有更高的计算效率.

4 数值算例

4.1 短悬臂梁结构拓扑优化设计

图 3 所示为短悬臂梁结构的平面设计域, 该矩形设计域左边固支, 尺寸为 $1\text{m} \times 3\text{m}$. 悬臂梁的右边正中央承受一方向向下的集中外载荷作用, 载荷大小为 $F = 1\text{kN}$. 实心材料的弹性模量 $E_0 = 100\text{MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 材料容许抗压强度和容许抗拉强度分别用 σ_c 和 σ_t 表示. 这里考虑 3 种不同的材料强度情况, 即 $\sigma_c = \sigma_t = 8\text{MPa}$, $\sigma_c = 3\sigma_t = 12\text{MPa}$ 和 $\sigma_c = 5\sigma_t = 13.33\text{MPa}$, 对该结构进行拓扑优化设计.

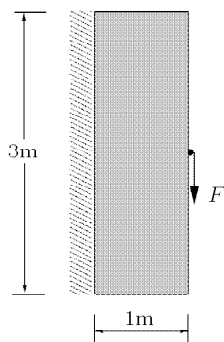
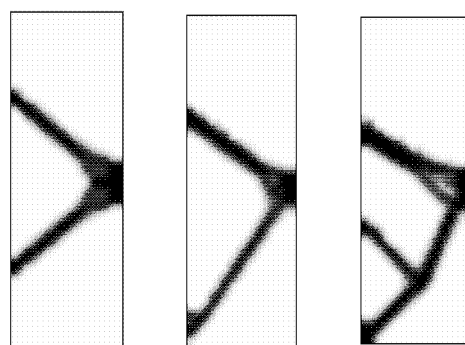


图 3 短悬臂梁设计域

Fig.3 Design domain for a short cantilever beam

整个设计域离散为 1600 (20×80) 个 8 节点平面应力有限单元. 选取初始材料相对密度为 0.5. 图 4 所示为不同情况下结构最优拓扑的材料相对密度灰度云图, 图中显示为该单元与其相邻单元密度值的平均化处理结果, 黑色区域代表优化后保留的实心材料, 白色区域代表孔洞. 可以看出, 当 $\sigma_c = \sigma_t =$

8MPa 时, 由于材料容许抗压强度和容许抗拉强度相等, 为压力无关材料, 设计出的拓扑形式表现为上下对称的两杆结构 (见图 4(a)). 这种情况优化结果与已有文献采用 von Mises 等效应力拓扑优化^[3] 或最小柔顺性拓扑优化^[20] 的结果类似. 但当材料抗拉压强度的不相等时, 如 $\sigma_c = 3\sigma_t = 12\text{MPa}$, 最优拓扑不再呈现为对称形式 (见图 4(b)). 随着压拉强度比 σ_c/σ_t 的增大, 优化设计不仅在受拉部位保留了更多的材料, 各杆件的位置也发生了明显改变. 当压拉强度比增加为 $\sigma_c/\sigma_t = 5$ 时, 结构拓扑进一步改变为图 4(c) 所示的四杆结构. 可见, 材料的压力相关特性会对结构最优拓扑设计产生重要影响.



(a) $\sigma_c = \sigma_t$ (b) $\sigma_c = 3\sigma_t$ (c) $\sigma_c = 5\sigma_t$

图 4 不同情况下拓扑优化结果比较

Fig.4 Comparison of optimal layouts for different cases

图 5 给出了拓扑优化的迭代历史, 表明本文算法具有良好的收敛性和稳定性. 表 1 中列出了各种情况下相应的优化结果数据, 包括材料体积率、总

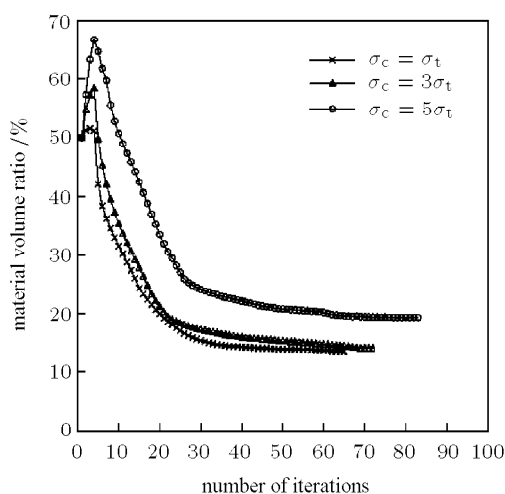


图 5 短悬臂梁结构拓扑优化迭代历史

Fig.5 Iteration history of topology optimization for the short cantilever beam

表 1 不同情况下短悬臂梁结构优化结果比较

Table 1 Comparison of optimization results for the short cantilever beam with different cases

Case	Material volume ratio/%	Number of iterations	Maximum of D-P constraints/MPa
$\sigma_c = \sigma_t$	13.528	65	0.015 2
$\sigma_c = 3\sigma_t$	13.948	72	0.039 6
$\sigma_c = 5\sigma_t$	19.327	83	0.032 5

迭代步和最大 D-P 约束值, 证明了算法的有效性.

4.2 两边固支矩形结构拓扑优化设计

如图 6 所示的平面结构, 其矩形设计域尺寸为 $0.12\text{ m} \times 0.06\text{ m}$, 左右两边固支. 设计域正中央受一方向向下的集中载荷 $F = 20\text{ N}$ 作用. 所采用实心材料具有压力相关特性, 其弹性模型为 $E_0 = 100\text{ MPa}$, 泊松比为 $\nu = 0.3$, 容许抗压强度和容许抗拉强度为 $\sigma_c = 4\sigma_t = 9.6\text{ MPa}$. 根据结构的对称性, 取设计域左半部分进行分析, 共划分为 $900(30 \times 30)$ 个 8 节点平面应力单元. 初始设计中材料相对密度取为 0.5, 对该结构进行拓扑优化设计.

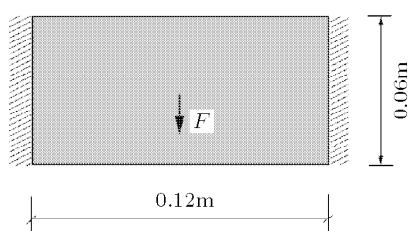


图 6 两边固支结构的设计域

Fig.6 Design domain for a two-side clamped four-point hinged structure

采用本文基于 D-P 屈服准则拓扑优化方法的最优拓扑如图 7(a) 所示, 经过 76 次优化迭代求解, 保留的材料体积率为 27.272%. 作为比较, 本算例继续采用文献 [3] 中的 von Mises 等效应力拓扑优化方法, 考虑 $\sigma_{\text{von}} = 4\text{ MPa}$ 的压力无关材料情况进行设计. 相应最优拓扑如图 7(b) 所示, 保留的材料体积率为 26.054%. 比较发现, 后者得到了上下完全对称的拓扑形式, 根据其承载方式还可以分为对称的受拉构件和受压构件, 且各自承担一半的外载荷. 本文方法由于考虑了材料受压性能好而受拉性能差的压力相关特征, 得到的最优材料分布中主要由受压构件来承担外力载荷.

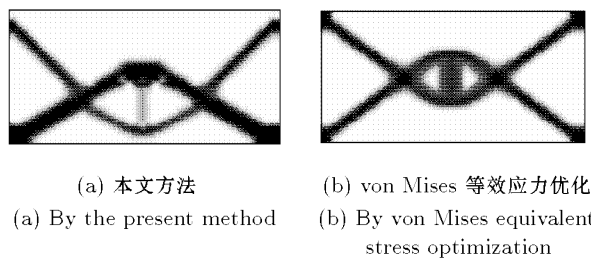


图 7 拓扑优化结果比较

Fig.7 Comparison of optimal layouts

4.3 两点铰支矩形结构拓扑优化设计

如图 8 所示的两点铰支结构初始平面设计域, 长 0.48 m , 宽 0.18 m . 左右两边的中点铰支, 设计域上边同时受两个集中载荷作用, 大小为 $F_1 = F_2 = 100\text{ N}$. 压力相关实心材料弹性模型为 $E_0 = 10^5\text{ MPa}$, 泊松比为 $\nu = 0.3$, 容许抗压强度和容许抗拉强度为 $\sigma_c = 5\sigma_t = 10.5\text{ MPa}$. 考虑结构及载荷的对称性, 取设计域的左半部分进行分析设计, 设定单元尺寸 7.5 mm , 共划分为 $768(32 \times 24)$ 个 8 节点平面应力单元, 选取初始材料相对密度为 0.8.

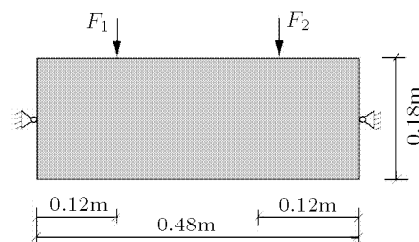
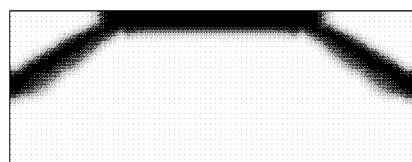


图 8 两点铰支矩形结构的设计域

Fig.8 Design domain for a two-point hinged rectangular structure

图 9(a) 所示为采用本文拓扑优化方法的最优材料布局, 保留的材料体积率为 16.242%. 如果不考虑材料的屈服情况, 采用 von Mises 等效应力拓扑优化方法, 假设 $\sigma_{\text{von}} = 6\text{ MPa}$, 基于相同的有限元分析模型, 设计出的最优材料分布如图 9(b) 所示. 可见, 由于后者结构拓扑形式采用了大量的受拉构件, 显然不适合用于压力相关材料, 而本文方法则设计出

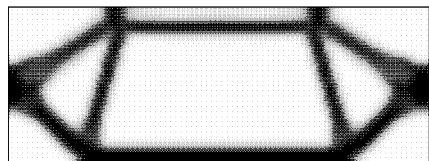


(a) 本文方法

(a) By the present method

图 9 拓扑优化结果比较

Fig.9 Comparison of optimal layouts



(b) von Mises 等效应力优化
(b) By von Mises equivalent stress optimization

图 9 拓扑优化结果比较 (续)

Fig.9 Comparison of optimal layouts (continued)

一完全受压的拱形承载结构. 该算例再一次证明了本文压力相关材料拓扑优化的意义和算法的有效性.

5 结 论

本文基于 D-P 屈服准则, 研究了压力相关材料连续体结构拓扑优化设计问题的数学模型和数值算法. 建立了以材料体积最小化为目标、考虑材料 D-P 屈服条件约束的优化数学模型. 结合 ε - 松弛方法和伴随法灵敏度公式, 采用基于梯度的连续变量优化算法求解优化问题.

算例结果表明, 材料的压力相关特性会对结构最优拓扑产生重要影响. 本文优化模型和算法为压力相关材料结构的概念性设计提供有效途径. 相比传统 von Mises 应力优化方法而言, 本文方法设计出的最优拓扑由于充分利用了压力相关材料的抗压能力, 因而更为合理和实用.

应该指出, 本文优化模型包含的约束条件个数等于划分单元数, 对于具有一定规模的优化问题 (如单元数超过 2000), 由于约束条件过多, 现有优化算法大多难以凑效. 若在此基础上继续发展优化问题的全局约束条件处理方法或紧约束选择处理策略, 以减少约束条件个数, 将会极大提高优化问题的求解效率.

参 考 文 献

- 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化. 大连理工大学学报, 1995, 35(1): 1-9 (Cheng Gengdong, Zhang Dongxu. Topological optimization of plane elastic continuum with stress constraints. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35(1): 1-9 (in Chinese))
- Shim PY, Manoochchri S. Generating optimal configurations in structural design using simulated annealing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(6): 1053-1069
- Duysinx P, Bendsøe MP. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43(8): 1453-1478
- Pereira JT, Fancello EA, Barcellos CS. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(1): 50-66
- Burger M, Stainko R. Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 45(4): 1447-1466
- Cheng GD, Guo X. ε -relaxed approach in structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1997, 13(4): 258-266
- Paris J, Navarrina F, Colominas I, et al. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(4): 419-437
- Paris J, Navarrina F, Colominas I, et al. Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures. *Advances in Engineering Software*, 2010, 41(3): 433-441
- 邓楚键, 何国杰, 郑颖人. 基于 M-C 准则的 D-P 系列准则在岩石工程中的应用研究. 岩土工程学报, 2006, 28(6): 735-739 (Deng Chujian, He Guojie, Zheng Yingren. Studies on D-P yield criterions based on M-C yield criterion and application in geotechnical engineering. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(6): 735-739 (in Chinese))
- 李云安, 葛修润, 糜崇蓉等. 岩 - 土 - 混凝土破坏准则及其强度参数估算. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(5): 770-776 (Li Yun'an, Ge Xiurun, Mi Chongrong, et al. Failure criteria of rock-soil-concrete and estimation of their strength parameters. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(5): 770-776 (in Chinese))
- Duysinx P. Topology optimization with different stress limit in tension and compression. In: Proceeding of 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO3). May 17-21, 1999. Buffalo. NY-USA. 1999
- Querin OM, Victoria M, Martí P. Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 42(1): 25-32
- 荣见华, 唐国金, 杨振兴等. 一种三维结构拓扑优化设计方法. 固体力学学报, 2005, 26(3): 289-296 (Rong Jianhua, Tang Guojin, Yang Zhenxing, et al. A three-dimension structural topology optimization design method. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2005, 26(3): 289-296 (in Chinese))
- 蔡坤, 陈颀松, 张洪武. 具有不同拉压性能材料的连续体结构拓扑优化. 力学学报, 2008, 40(5): 646-653 (Cai Kun, Chen Biaosong, Zhang Hongwu. Topology optimization of continuum structures with materials exhibiting different tensile and compressive properties. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(5): 646-653 (in Chinese))
- Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373

- 16 Chen WF, Han DJ. Plasticity for Structural Engineers. Florida: J Ross Publishing, 2007
- 17 Bendsoe MP, Sigmund O. Topology optimization: Theory, Methods, and Applications. Berlin Heidelberg: Springer, 2003
- 18 Sved G, Ginos Z. Structural optimization under multiple loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1968, 10: 803-805
- 19 Cheng G, Jiang Z. Study on topology optimization with stress constraints. *Engineering Optimization*, 1992, 20(2): 129-148
- 20 Huang X, Xie YM. Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications. West Sussex, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2010

(责任编辑: 陶彩军)

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF PRESSURE-DEPENDENT MATERIAL STRUCTURES BASED ON D-P CRITERION¹⁾

Luo Yangjun²⁾

(School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Many widely used materials, such as concrete, rocks, ceramics and polymers, have the feature of increasing shear strength as a result of hydrostatic pressure increases. Structures made of these pressure-dependent materials would typically hold the characteristic of better stress limit in tension than in compression. In this case, the von Mises criterion is incompetent while the D-P criterion described in terms of stress invariants is available as one of the simplest plasticity yield models. To take into account the asymmetrical compression and tension behaviors in the conceptual design of continuum structures, a practicable topology optimization strategy for pressure-dependent materials based on D-P yield criterion is presented in this paper. By using the element artificial relative densities as design variables, the optimization problem is formulated as to minimize the total material volume under D-P yield constraints on each element. In this optimization model, the SIMP interpolation for element stiffness and the power-law interpolation for the local stress of porous microstructures are adopted. In order to circumvent the stress singularity phenomenon, the ε -relaxation strategy is applied for relaxing the local yield constraints involved in the low-density elements. In this context, the sensitivity of the element constraints with respect to the design variables is efficiently derived by the adjoint variable method. Then, the optimal design is obtained by employing the gradient-based optimization algorithm. Finally, three numerical examples with different strength limits in compression and tension have been solved to illustrate the validity of the proposed optimization model as well as the efficiency of the numerical techniques. It is observed that the optimal material distribution designed by the present method may have a significant difference compared with one designed by the conventional von Mises stress constraint approach. The obtained optimization solutions are reasonable since they can make the best use of their strength in withstanding the compression. The meaning of the proposed method for pressure-dependent material structures is thus demonstrated.

Key words pressure-dependent material, Drucker-Prager criterion, topology optimization, sensitivity analysis

Received 4 January 2011, revised 1 June 2011.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (51008248) and NPU Foundation for Fundamental Research (JC200936).

2) E-mail: yangjunluo@nwpu.edu.cn