

圆弧足被动行走器非光滑动力学仿真研究¹⁾

段文杰^{*,2)} 王 琪^{*} 王天舒[†]

^{*}(北京航空航天大学动力学与控制系, 北京 100191)

[†](清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 传统的被动行走器动力学研究方法是将被动行走器模型视为双足轮流铰接于地面(或纯滚动)的倒立摆模型, 并应用角动量守恒假设计算支撑腿转换时足地碰撞后的系统运动状态. 但该方法不能分析足地之间的滑动现象、足地之间的非完全塑性碰撞现象和两足同时着地的情况. 采用基于线性互补的非光滑动力学方法, 给出了一种基于中点格式积分一步的时间步进方法, 可以有效地分析足地间的摩擦和碰撞现象. 应用该方法对被动行走器进行数值仿真, 发现了两种新的周期性步态, 一种是带摩擦滑动现象的步态, 另一种是支撑腿转换时发生多次碰撞现象的步态. 数值仿真结果还表明, 较大的摩擦系数和较小的法向恢复系数更有利于被动行走器实现稳定周期步态行走.

关键词 非光滑, 线性互补, 被动行走器, 库伦摩擦, 牛顿碰撞, 多体系统, 动力学

中图分类号: O313.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)04-0765-10

引 言

双足步行是仿生机器人研究的热点之一, 其动力学的研究对机器人、医学假肢等领域的研究有重要意义, 其中被动行走以其能耗低、步态自然而在近年来受到广泛关注.

最早在 1989 年 McGeer 首先提出被动行走 (passive dynamic walking) 概念, 研制出的无驱动简单机械装置, 可仅依靠自身重力及其结构特性平稳地走下斜坡, 并呈现出稳定的周期步态^[1-2]. McGeer 假设被动行走过程为两腿交替铰接于地面的倒立摆的运动过程, 足地间碰撞过程应用角动量守恒假设计算系统碰撞后的状态变量, 称之为 Step-to-Step 方法^[1-2], 该方法为被动行走器的研究奠定了理论基础. Cornell, Delt 和 MIT 等基于 McGeer 的研究也做了大量相关工作, 2005 年联合在 Science 杂志上发表了一篇被动行走的文章^[3], 引起了广泛的关注. 近几年很多学者仍致力于被动行走器动力学特性分析^[4-5]. 柳宁等也做了相关研究^[6-7], 采用 McGeer 的方法, 分析了平面直腿被动行走器模型和平面带膝关节被动行走器的动力学特性 (如稳定性和鲁棒性等), 并通过实验加以验证, 其成果丰富了

该领域的研究内容.

文献 [1-7] 在研究被动行走器的动力学问题时均将其力学模型视为双足轮流铰接于地面 (或纯滚动) 的倒立摆模型, 并作以下假设: 支撑足与地面之间无相对滑动; 足与地面的碰撞为完全塑性碰撞; 足地碰撞瞬间完成, 摆动腿足着地瞬间支撑腿足立即离地, 此时无支撑力冲量作用于离地足, 即忽略双足同时着地情况. 在这些假设的前提下, 文献应用的 Step-to-Step 方法 (传统方法) 是最为简洁有效的. 然而, 现有被动行走器动力学研究方法存在以下不足: 难以分析足地间存在的摩擦滑动现象, 难以分析支撑腿转换时足地间的非完全塑性碰撞现象, 不能分析双足同时着地的情况; 另外传统方法分析其构型转变时动力学模型的切换也相对繁琐. 以上存在的问题表明, 被动行走动力学的基本理论与方法还有待于进一步完善.

平面圆弧足被动行走器模型^[6] 可视为具有单边约束考虑摩擦与碰撞的多刚体系统, 其动力学方程是典型的非光滑多体系统动力学方程. 基于线性互补的非光滑多体系统动力学方法发展至今, 已经比较完善. 该方法采用刚体假设, 将线性互补问题 (LCP) 引入到非光滑系统中, 用包含形式表示接触法

2010-09-22 收到第 1 稿, 2010-05-24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10872102, 11072014).

2) E-mail: wenjie_duan@163.com

则,并最终建立标准线性互补方程.目前应用非光滑多体系统动力学方法分析多点摩擦碰撞问题的研究取得了大量的成果^[8-18],时间步进法(time-stepping method)是计算多点摩擦与碰撞问题有效的数值仿真方法.

为解决传统研究方法中存在的不足,进一步分析被动行走器的动力学特性,提供更为有效的算法,本文将非光滑多体系统动力学方法引入到被动行走器的建模与计算当中,采用库伦摩擦模型和牛顿碰撞模型^[8-10],建立被动行走器足地间接触法则的互补关系以及线性互补方程;给出一种基于线性互补和中点格式积分一步的时间步进方法;最后通过数值仿真分析足地间多种不同接触状态下被动行走器的动力学特性.

1 力学模型

1.1 力学模型及接触状态的描述

本文采用文献[6]中给出的被动行走器模型(如图1所示),该模型由腿1、腿2、足1和足2构成.两腿均视为直杆,通过柱铰链连接于髋关节 H 处(不计摩擦),圆弧足(半径为 R)与腿固连,系统在铅垂平面内运动.取直角坐标系(如图1所示),其中 y 轴垂直于斜面, x 轴平行于斜面,斜面与水平面的夹角为 γ .系统在初始位置时,髋关节 H 位于 y 轴上,其垂足 C_0 与坐标原点重合.设髋关节 H 的坐标为 (x_H, y_H) ,两腿与斜面法线间的夹角分别是 θ_1, θ_2 (逆时针为正).足与地面的摩擦模型为库伦摩擦模型,且设动、静摩擦系数相等,其值为 μ ;足与地面的碰撞模型为牛顿碰撞模型^[8],其法向恢复系数为 e_N ,切向恢复系数为 e_T .

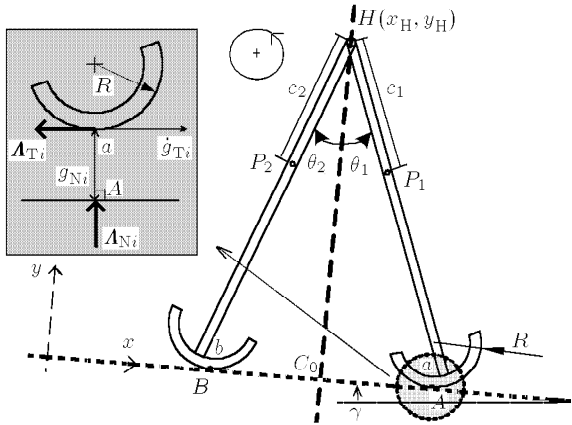


图1 圆弧足被动行走器模型

Fig.1 The passive dynamic walker model

在被动行走过程中,足地间接触-分离(contact-detachment)和黏滞-滑动(stick-slip)状态的改变使得系统构型和自由度发生变化.足与地面之间可能的接触点称为接触对 i ,如图1中的 A, a 两点. g_{Ni} 是接触对 i 的法向距离, $\dot{g}_{Ni}$ 是该接触对的法向相对速度, $\dot{g}_{Ti}$ 是接触对的切向相对速度, A_{Ni} 和 A_{Ti} 分别是作用在足上的法向力冲量和切向摩擦力冲量.

接触对的接触-分离存在以下的几种情况:

Detachment: $g_{Ni} > 0, A_{Ni} = 0$

Closed contact: $g_{Ni} = 0, A_{Ni} \geq 0$

Active contact: $g_{Ni} = 0, \dot{g}_{Ni} = 0, A_{Ni} > 0$

Contact-to-detachment:

$$g_{Ni} = 0, \dot{g}_{Ni} > 0, A_{Ni} = 0$$

Detachment-to-contact(impact):

$$g_{Ni} = 0, \dot{g}_{Ni} \leq 0, A_{Ni} > 0$$

当足地之间保持接触(active contact)时,接触对在切向方向存在以下4种情况:

Slip: $|\dot{g}_{Ti}| \geq 0, |A_{Ti}| - \mu_i A_{Ni} = 0$

Stick: $\dot{g}_{Ti} = 0, |A_{Ti}| < \mu_i A_{Ni}$

Stick-to-slip: $\dot{g}_{Ti} = 0, |A_{Ti}| - \mu_i A_{Ni} = 0$

Slip-to-stick: $\dot{g}_{Ti} = 0, |A_{Ti}| < \mu_i A_{Ni}$

由于被动行走器在行进过程中足与地面之间的接触状态不断变化,使得其构型和自由度(DOF)随之改变.表1给出了系统自由度与系统构型的对应关系.应用传统动力学方法研究被动行走问题时,

表1 被动行走器自由度与构型对应表

Table 1 The variant degrees of freedom under different contact configurations

DOF	Contact configurations
4	both feet detachment
3	· foot 1, active contact & slip; foot 2, detachment. · foot 2, active contact & slip; foot 1, detachment.
2	· foot 1, active contact & stick; foot 2, detachment. · foot 2, active contact & stick; foot 1, detachment. · both feet active contact & slip.
1	· foot 1, active contact & stick; foot 2, active contact & slip. · foot 2, active contact & stick; foot 1, active contact & slip.
0	both feet active contact & stick

若欲分析表 1 中的所有接触状态, 需要对每种构型分别建立系统的动力学方程, 并通过设置复杂的切入和跳出条件实现不同构型下系统动力学方程的转换. 而采用非光滑多体系统动力学方法, 通过建立约束指标集合和线性互补方程, 可以有效分析足地间的黏滞-滑动和接触-分离现象 (表 1 中的各种构型).

1.2 单边约束法向互补关系

首先建立非光滑单边约束系统常用的 2 个约束指标集合^[11]

$$\left. \begin{aligned} I_A &= \{1, \dots, n_A\} \\ I_C &= \underbrace{\{g_{Ni} = 0 | i \in I_A\}}_{n_C} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, I_A 是有可能接触点的集合, 共有 n_A 个元素 (本文中 $n_A = 2$), I_C 是足地间发生接触的接触对集合, 共有 n_C 个元素. 接触对 i 对应的约束面法向支撑力冲量和法向相对速度存在如下互补关系

$$\dot{g}_{Ni} > 0, \quad \Lambda_{Ni} > 0, \quad \dot{g}_{Ni} \perp \Lambda_{Ni} \quad (2)$$

互补关系式 (2) 还可以用集值函数 Upr 表示为^[13] 包含关系: $-\Lambda_{Ni} \in \text{Upr}(\dot{g}_{Ni})$, 如图 2(a) 所示.

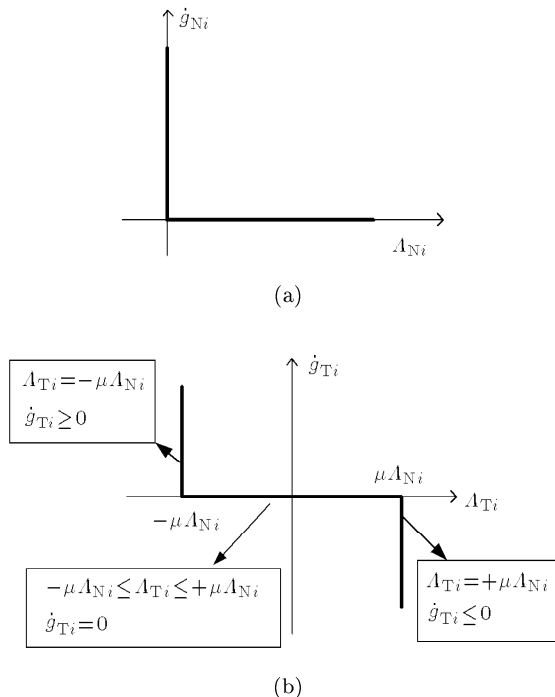


图 2 Upr 和 Sgn 集值函数

Fig.2 The map of set-valued laws Upr and Sgn

其具体数学表达式为

$$-\Lambda_{Ni} \in \begin{cases} 0, & \dot{g}_{Ni} > 0 \\ (-\infty, 0], & \dot{g}_{Ni} = 0 \end{cases} \quad (3a)$$

1.3 牛顿碰撞模型

冲量形式的库伦摩擦模型用集值函数可表示为包含关系 $-\Lambda_{Ti} \in \mu_i \Lambda_{Ni} \text{Sgn}(\dot{g}_{Ti})$, 其数学表达式为

$$-\Lambda_{Ti} \in \begin{cases} \mu_i \Lambda_{Ni}, & \dot{g}_{Ti} > 0 \\ [-\mu_i \Lambda_{Ni}, \mu_i \Lambda_{Ni}], & \dot{g}_{Ti} = 0 \\ -\mu_i \Lambda_{Ni}, & \dot{g}_{Ti} < 0 \end{cases} \quad (3b)$$

其中 μ_i 是接触对 i 的摩擦系数, 该包含关系可用图 2(b) 表示.

设接触对 i 在 t^* 时刻发生斜碰撞, $\dot{g}_{Ni}^+$ 和 $\dot{g}_{Ni}^-$ 分别为该接触对在碰撞后和碰撞前的法向相对速度; $\dot{g}_{Ti}^+$ 和 $\dot{g}_{Ti}^-$ 分别为该接触对在碰撞后和碰撞前的切向相对速度, e_{Ni} 和 e_{Ti} 分别是接触点切向和法向的恢复系数, 碰撞前后切向和法向的运动关系为^[8]

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_{Ni}^+ + e_{Ni} \dot{g}_{Ni}^- &= 0 \\ \dot{g}_{Ti}^+ + e_{Ti} \dot{g}_{Ti}^- &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

若定义一组新的变量^[8]

$$\left. \begin{aligned} \chi_N &= \{\chi_{Ni} = \dot{g}_{Ni}^+ + e_{Ni} \dot{g}_{Ni}^- | i \in I_C\} \\ \chi_T &= \{\chi_{Ti} = \dot{g}_{Ti}^+ + e_{Ti} \dot{g}_{Ti}^- | i \in I_C\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则含摩擦与碰撞的接触对的切向和法向的相关物理量关系可用集值函数表示为

$$\left. \begin{aligned} -\Lambda_N &\in \text{Upr}(\chi_N), \\ -\Lambda_T &\in \mu \Lambda_N \text{Sgn}(\chi_T), \end{aligned} \right\} \quad i \in I_C \quad (6)$$

其中, $\mu = \text{dig}\{\mu_i | i \in I_C\}$, $\Lambda_N = \{\Lambda_{Ni} | i \in I_C\}$, $\Lambda_T = \{\Lambda_{Ti} | i \in I_C\}$. 式 (6) 可以描述表 1 中列举的所有接触状态下接触力冲量的包含关系, 其中两个表达式分别是法向和切向的接触力冲量法则.

1.4 动力学方程

对于如图 1 所示的被动行走器模型, 取其广义坐标和广义速度分别为

$$\mathbf{q} = [x_H, y_H, \theta_1, \theta_2]^T, \quad \mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}_H, \dot{y}_H, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$$

接触对 i 的法向和切向相对速度可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_{Ni}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= W_{Ni} \mathbf{u} \\ \dot{g}_{Ti}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= W_{Ti} \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

其中

$$\mathbf{W}_{Ni} = \frac{\partial \dot{g}_{Ni}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{g}_{Ni}}{\partial \dot{x}_H} & \frac{\partial \dot{g}_{Ni}}{\partial \dot{y}_H} & \frac{\partial \dot{g}_{Ni}}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{g}_{Ni}}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{Ti} = \frac{\partial \dot{g}_{Ti}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{g}_{Ti}}{\partial \dot{x}_H} & \frac{\partial \dot{g}_{Ti}}{\partial \dot{y}_H} & \frac{\partial \dot{g}_{Ti}}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{g}_{Ti}}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix}$$

对 $i \in I_C$, 可得到如下矩阵形式的接触对切向和法向相对速度表达式

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_N(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \mathbf{W}_N \mathbf{u} \\ \dot{g}_T(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \mathbf{W}_T \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

其中

$$\dot{g}_N = \{\dot{g}_{Ni} | i \in I_C\}$$

$$\dot{g}_T = \{\dot{g}_{Ti} | i \in I_C\}$$

$$\mathbf{W}_N = [(\mathbf{W}_{N1})^T \cdots (\mathbf{W}_{Nk})^T]^T, \quad k = n_C$$

$$\mathbf{W}_T = [(\mathbf{W}_{T1})^T \cdots (\mathbf{W}_{Tk})^T]^T, \quad k = n_C$$

在研究含摩擦与碰撞的非光滑多体系统动力学问题时, 将其动力学方程在时间段 $\Delta t = [t^a, t^e]$ 上离散, 可得冲量形式的 Lagrange 方程^[13]

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \Delta t + \mathbf{W}_N^T \mathbf{A}_N + \mathbf{W}_T^T \mathbf{A}_T \quad (8)$$

其中, $\Delta \mathbf{u} = \int_{\Delta t} d\mathbf{u} = \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^a$.

将式 (7) 对时间求导并在时间段 $\Delta t = [t^a, t^e]$ 上采用隐式欧拉方法离散, 可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_N^e &= \mathbf{W}_N \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{W}}_N \Delta \mathbf{q} + \dot{g}_N^a \\ \dot{g}_T^e &= \mathbf{W}_T \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{W}}_T \Delta \mathbf{q} + \dot{g}_T^a \\ \Delta \mathbf{q} &= \mathbf{u}^e \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中, $\hat{\mathbf{W}}_N = \partial \mathbf{W}_N / \partial t$, $\hat{\mathbf{W}}_T = \partial \mathbf{W}_T / \partial t$.

由式 (5)~ 式 (9), 可得到系统的动力学方程组

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}, t)(\mathbf{u}^e - \mathbf{u}^a) &= \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \Delta t + \\ &\quad \mathbf{W}_N^T \mathbf{A}_N + \mathbf{W}_T^T \mathbf{A}_T \\ \Delta \mathbf{q} &= \mathbf{u}^e \Delta t \\ \text{if } I_C \neq \emptyset \text{ then} \\ &\quad -\mathbf{A}_N \in \text{Upr}(\chi_N) \\ &\quad -\mathbf{A}_T \in \mu \mathbf{A}_N \text{Sgn}(\chi_T) \\ \text{if } I_C = \emptyset \text{ then} \\ &\quad \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_T = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在式 (10) 中, 当 $I_C = \emptyset$ 时, 对应表 1 中 DOF=4 的情况, 此时被动行走器双足同时离开地面, 系统的动力学方程为光滑的常微分方程组, 可用常微分方程数值计算方法求解其动力学方程. 当 $I_C \neq \emptyset$ 时, 系统构型对应于表 1 中的 DOF=0~3 对应的接触状态, 此时被动行走器足地之间存在黏滞-滑动或接触与分离现象. 当接触对 i 摩擦黏滞时, $|\Lambda_{Ti}| \leq \mu_i \Lambda_{Ni}$, 摩擦力冲量是非光滑的, 此类非光滑动力学系统被称为第 2 类非光滑系统, 也称为 Fillipov 系统; 当碰撞发生时, Λ_{Ni} 的值会有瞬间脉冲跳跃现象, 系统动力学方程也是非光滑的, 此时的非光滑动力学系统为第一类非光滑系统, 也叫脉冲非光滑系统. 此两类非光滑现象给动力学方程组 (10) 的数值求解带来了困难. 下面将给出一种基于线性互补和中点格式积分一步的时间步进方法.

2 标准线性互补方程及仿真算法

2.1 含摩擦牛顿碰撞模型的互补形式

式 (6) 表示的接触力冲量法则中存在有 Sgn 集值函数, 将 Sgn 函数分解为 2 个 Upr 集值函数形式, 形成互补关系, 是本文采用的基本处理方法之一, 为此要引入以下变量^[8]

$$\left. \begin{aligned} \chi_T^+ &: \left\{ \chi_{Ti}^+ = \frac{1}{2}(|\chi_{Ti}| + \chi_{Ti}) | i \in I_C \right\} \\ \chi_T^- &: \left\{ \chi_{Ti}^- = \frac{1}{2}(|\chi_{Ti}| - \chi_{Ti}) | i \in I_C \right\} \\ \mathbf{A}_T^+ &= \mu \mathbf{A}_N + \mathbf{A}_T, \quad i \in I_C \\ \mathbf{A}_T^- &= \mu \mathbf{A}_N - \mathbf{A}_T, \quad i \in I_C \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式 (11) 定义的变量之间存在如下关系

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_T^+ \geq 0, \quad \chi_T^+ \geq 0, \quad \mathbf{A}_T^+ \perp \chi_T^+ \\ \mathbf{A}_T^- \geq 0, \quad \chi_T^- \geq 0, \quad \mathbf{A}_T^- \perp \chi_T^- \\ \mathbf{A}_T^+ + \mathbf{A}_T^- = 2\mu \mathbf{A}_N \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式 (11) 和式 (12) 将集值函数关系 $-\mathbf{A}_T \in \mu \mathbf{A}_N \text{Sgn}(\chi_T)$ 分解为两对互补关系式. 所以, 可用 Upr 函数关系表示库伦摩擦模型和牛顿碰撞模型, 得到如下包含形式的接触力冲量法则

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{A}_N &\in \text{Upr}(\chi_N) \\ -\mathbf{A}_T^+ &\in \text{Upr}(\chi_T^+) \\ -\mathbf{A}_T^- &\in \text{Upr}(\chi_T^-) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2.2 标准线性互补方程

当 $I_C \neq \emptyset$ 时, 被动行走器的动力学问题可转化为线性互补问题, 其关键点是互补方程的建立和求解. 由式 (5), (9) 和式 (10) 可得如下方程

$$\begin{bmatrix} \chi_N \\ \chi_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{NN} & G_{NT} \\ G_{TN} & G_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_N \\ A_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_N \\ B_T \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} G_{NN} &= (W_N + \hat{W}_N \Delta t) M^{-1} W_N^T \\ G_{NT} &= (W_N + \hat{W}_N \Delta t) M^{-1} W_T^T \\ G_{TN} &= (W_T + \hat{W}_T \Delta t) M^{-1} W_N^T \\ G_{TT} &= (W_T + \hat{W}_T \Delta t) M^{-1} W_T^T \\ b_N &= (W_N + \hat{W}_N \Delta t) M^{-1} h \Delta t + \\ &\quad \hat{W}_N u^a \Delta t + (I + \varepsilon_N) \dot{g}_N^a \\ b_T &= (W_T + \hat{W}_T \Delta t) M^{-1} h \Delta t + \\ &\quad \hat{W}_T u^a \Delta t + (I + \varepsilon_T) \dot{g}_T^a \end{aligned}$$

由式 (11) 和式 (12) 可得

$$\left. \begin{aligned} \chi_T &= \chi_T^+ - \chi_T^- \\ A_T &= A_T^+ - \mu A_N \\ A_T^+ + A_T^- &= 2\mu A_N \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

根据式 (10)~ 式 (15), 可得到标准线性互补方程

$$\begin{bmatrix} \chi_N \\ \chi_T^+ \\ A_T^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_{NN} - G_{NT}\mu) & G_{NT} & 0 \\ (G_{TN} - G_{TT}\mu) & G_{TT} & I \\ 2\mu & -I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_N \\ A_T^+ \\ \chi_T^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_N \\ b_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

方程 (16) 就是标准线性互补方程 $\xi = A^* \eta + b^*$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi \perp \eta$ 的形式. 本文采用牛顿光滑化迭代方法^[15]解线性互补方程 (16).

2.3 仿真方法

采用非光滑多体系统动力学方法数值仿真被动行走过程, 需要在计算的每一步判断足地之间的接触状态. 本文采用基于中点格式^[12]积分一步的时

间步进法仿真被动行走过程. 在时间段 $\Delta t = [t^a, t^e]$ 上, 计算 $k \rightarrow k+1$ 步时, 其计算步骤如下:

(1) 计算 $t^m = t^k + 0.5\Delta t$, $q^m = q^a + 0.5u^a\Delta t$, $M(q^m)$, $h(q^m, u^a)$.

(2) 建立 I_C .

If $I_C \neq \emptyset$

(a) 计算矩阵: $W_T(q^m)$, $\hat{W}_T(q^m, u^a)$, $W_N(q^m)$, $\hat{W}_N(q^m, u^a)$, $h(q^m, u^a)$, B_N , B_T , G_{NN} , G_{NT} , G_{TN} , G_{TT} .

(b) 求解标准线性互补方程 (16), 再根据式 (8) 和式 (15) 求出 u^e , $q^e = q^m + 0.5u^e\Delta t$.

If $I_C = \emptyset$

$u^e = M^{-1}h\Delta t + u^a$, $q^e = q^m + 0.5u^e\Delta t$.

(3) 置 $t^k \triangleq t^k + \Delta t$, $u^e \rightarrow u^a$, $q^e \rightarrow q^a$, $k \triangleq k+1$, 前进一步.

以上的计算过程可用流程图 3 表示. 采用该方法可以仿真表 1 中被动行走器的所有状态.

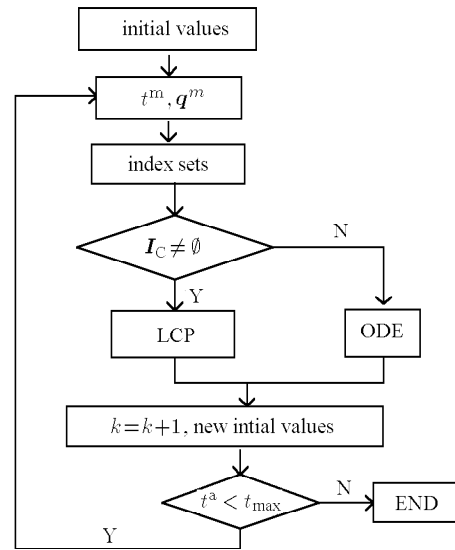


图 3 仿真流程图

Fig.3 Simulation flowchart

3 仿真算例

被动行走器模型如图 1 所示, 其中 P_1 和 P_2 分别是机器人两条腿的质心位置. 行走器足半径 $R_1 = R_2 = 0.1\text{ m}$, 腿长 (含足) $l_1 = l_2 = 0.4\text{ m}$; 腿质心到髋关节距离 $c_1 = c_2 = 0.1\text{ m}$, 斜面倾角 $\gamma = 0.01\text{ rad}$; 腿 (含足) 质量 $m_1 = m_2 = 1\text{ kg}$, 腿 (含足) 对质心转动惯量 $J_1 = J_2 = 0.008\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $g = 9.8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\Delta t = 0.0001\text{ s}$, 仿真总时间 $t_{\max} = 50\text{ s}$.

3.1 无滑动完全塑性碰撞情况

本算例仿真传统研究假设下被动行走器的动力学特性. 设接触参数 $\mu_i = 0.5$, $e_{Ni} = 0$, $e_{Ti} = 0$, $i = 1, 2$, 初始条件 $x_H = 0\text{m}$, $y_H = 0.394\text{m}$, $\dot{x}_H = 0.591\text{m/s}$, $\dot{y}_H = 0.089\text{m/s}$, $\theta_1 = 0.2\text{rad}$, $\dot{\theta}_1 = -1.5\text{rad/s}$, $\theta_2 = -0.2\text{rad}$, $\dot{\theta}_2 = -1\text{rad/s}$.

由数值仿真可知, 被动行走器经过起始几步调整后很快进入稳态周期运动, 其稳态仿真结果如图4所示(与文献[17]中的结果吻合). 其中图4(a)为 $\dot{\theta}_1$ 的时间历程图; 图4(b)是腿1与地面法线间夹角相图; 图4(c)是 Λ_N 的时间历程图. 在图4(a)中, T 为腿1运动的周期, 在 T_1 时间段内腿1作为支撑腿, 在 T_2 时间段内腿1作为摆动腿; D_1 为腿1作为摆动腿着地的时刻(由摆动腿转换为支撑腿的时刻), 该时刻也是腿2作为支撑腿离地的时刻; D_2 为腿1作为支撑腿离地的时刻(由支撑腿转换为摆动腿的时刻). 图4(b)中的相图是一个极限环, 表明被动行走器最终以稳定的周期步态行走. 在图4(c)中的 D_1 时刻, 足1(摆动腿)着地的瞬时地面支撑力的冲量较大 ($0.3351\text{N}\cdot\text{s}$); 但在此瞬时, 地面作用于足2(支撑腿)的冲量由 $0.00174\text{N}\cdot\text{s}$ 突变为零, 这

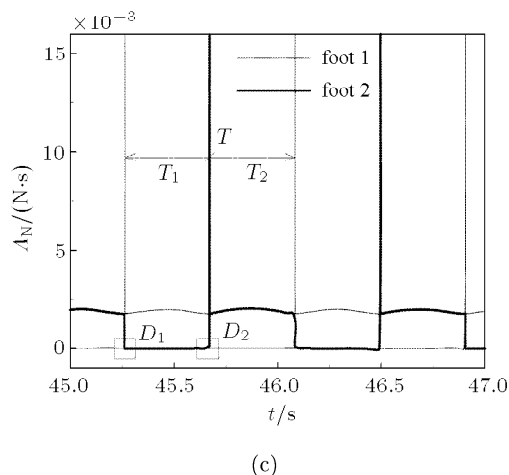


图4 仿真结果图

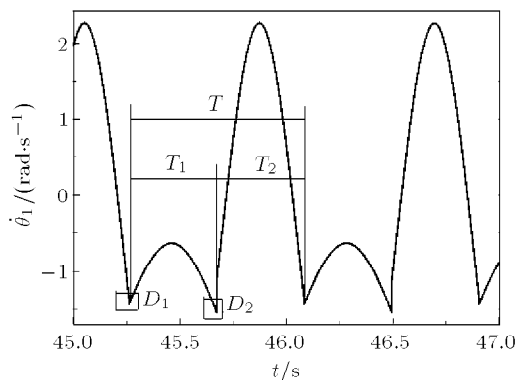
Fig.4 Simulation results

表明足2在该瞬时立即离开地面. 由此可知, 传统方法^[7]的基本假设是合理的, 即在无滑动完全塑性碰撞情况下以周期步态行走时, 被动行走器摆动腿着地的瞬时支撑腿立即离开地面, 不存在双足同时着地的情况. 从而进一步表明, 当足与地面发生碰撞时, 传统方法用系统对前足着地点的动量矩守恒假设是合理的.

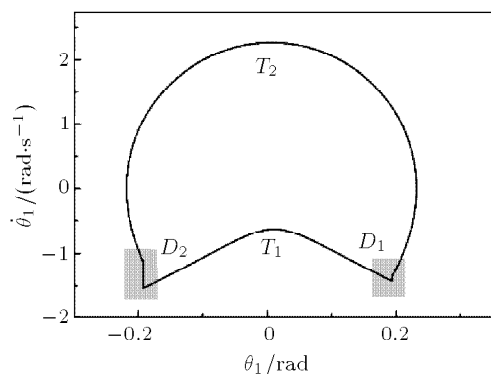
3.2 有滑动完全塑性碰撞情况

在传统的被动行走器研究中, 假设足与地面间无相对滑移, 但是当摩擦系数较小时, 足与地面间会产生滑动现象. 用传统方法不易研究这种情况下被动行走器的动力学行为. 在本算例中设接触参数 $\mu_i = 0.13$, $e_{Ni} = 0$, $e_{Ti} = 0$, $i = 1, 2$; 初始条件 $x_H = 0\text{m}$, $y_H = 0.394\text{m}$, $\dot{x}_H = 0.591\text{m/s}$, $\dot{y}_H = 0.089\text{m/s}$, $\theta_1 = 0.2\text{rad}$, $\dot{\theta}_1 = -1.5\text{rad/s}$, $\theta_2 = -0.2\text{rad}$, $\dot{\theta}_2 = -1\text{rad/s}$.

数值仿真结果表明, 被动行走器起始几步在其摆动腿到支撑腿转换的过程中, 两足与地面间均产生滑动现象, 经过几步调整后, 被动行走器进入稳定周期步态, 如图5(a)所示(两腿与铅垂线夹角的相图). 但在稳态行走时, 腿1由摆动腿到支撑腿碰撞转换时仍然会产生摩擦滑动现象(图中 S_1 区域), 腿2则不会产生摩擦滑动现象, 且两腿稳定周期步态下的极限环不一致. 图5(b)为系统的机械能随时间变化的曲线. 机械能是系统动能和势能的总和, 势能零点取在被动行走器初始运动状态时的 C_0 点(见图1). S_1 区域中足地之间摩擦与碰撞过程均要损耗机械能, S_2 区域中足地间只有碰撞过程损耗机械能. 在一个周期之内, 摩擦耗能和碰撞耗能之和与重力



(a)



(b)

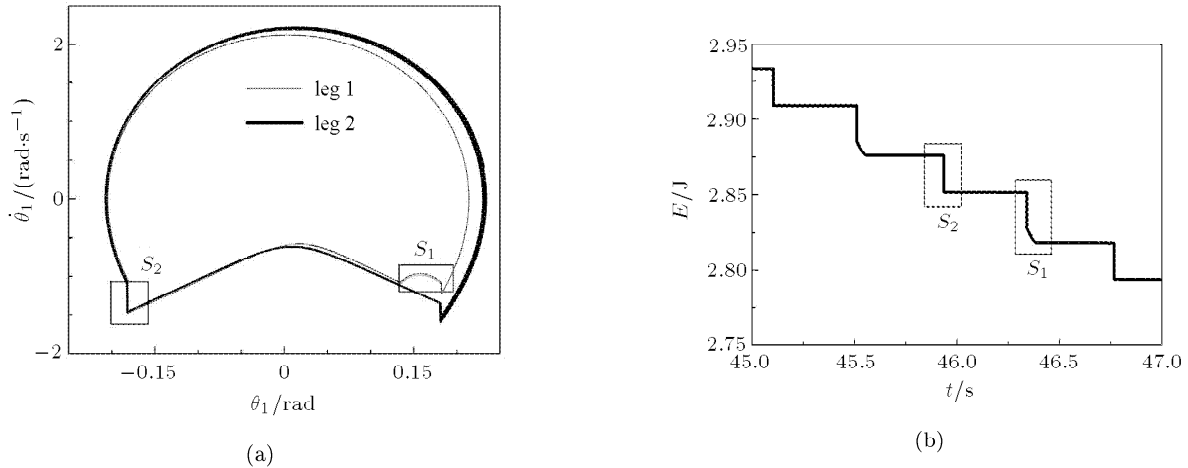


图 5 仿真结果

Fig.5 Simulation results

势能的输入相同,从而使系统实现稳定的周期运动,形成了一种带摩擦滑动的稳定周期步态。

3.3 无滑动非完全塑性碰撞情况

传统被动行走器动力学研究方法采用塑性碰撞假设,并且在碰撞转换时应用角动量守恒方法计算碰撞结束时两腿的角速度。该方法不易于研究非完全塑性碰撞情况。本算例通过数值仿真分析被动行走器足地之间为非完全塑性碰撞情况。设接触参数 $\mu_i = 0.5$, $e_{Ni} = 0.3$, $e_{Ti} = 0$, $i = 1, 2$; 初始

条件 $x_H = 0\text{m}$, $y_H = 0.394\text{m}$, $\dot{x}_H = 0.591\text{m/s}$, $\dot{y}_H = 0.089\text{m/s}$, $\theta_1 = 0.2\text{rad}$, $\dot{\theta}_1 = -1.5\text{rad/s}$, $\theta_2 = -0.2\text{rad}$, $\dot{\theta}_2 = -1\text{rad/s}$ 。

图 6 为被动行走器稳态行走时的仿真结果。其中,图 6(a) 是接触对之间法向距离的时间历程曲线,其中的 P 区域表示当摆动腿到支撑腿转换时,足地之间的碰撞过程。可见,足地间发生了多次碰撞;在发生第一次碰撞时,另一条腿立刻脱离地面;存在双足同时离开地面的现象。图 6(b) 是髋关节纵

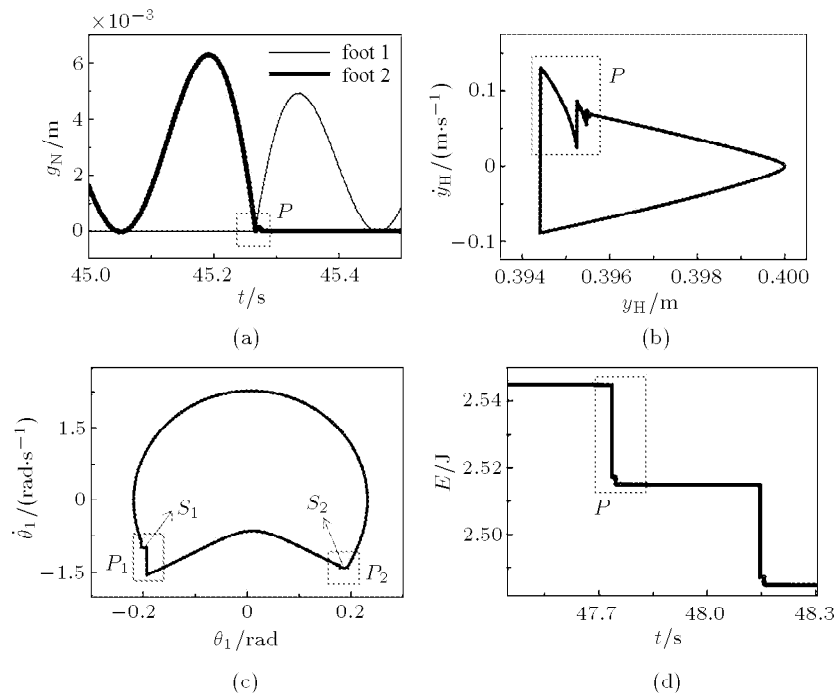


图 6 算例 III 仿真结果

Fig.6 Simulation results

坐标相图,从中可以看出,摆动腿到支撑腿转换时的多次碰撞对 $\dot{y}_H$ 的影响.图 6(c) 为腿 1 与地面法线夹角相图,其中 s_1 和 s_2 两段曲线对应摆动腿到支撑腿转换时足地碰撞后双足同时离开地面阶段.图 6(b) 和 6(c) 中的极限环表明:在本算例参数条件下,被动行走器可实现稳定周期步态.图 6(d) 为稳定周期步态行走时,系统机械能的时间历程曲线,在图的 P 区域中,机械能呈现多次阶梯形下降的现象也表明支撑腿转换时足地之间存在多次碰撞.数值仿真结果表明,在该参数和初始条件下,被动行走器可以形成稳定周期步态且在摆动腿转换为支撑腿时其足与地面会发生多次碰撞,存在两足同时离开地面的“腾空”现象,但仍然属于“走”的范围,不同于 McGeer 研究中的“跑”,是一种新型的行走步态 [16].

3.4 摩擦系数和恢复系数对运动的影响

当改变 3.2 节中的摩擦系数时,被动行走器行走的平均速度如图 7 所示.其中,当 $\mu < 0.13$ 时,行走器滑倒;当 $0.13 \leq \mu \leq 0.17$ 时,被动行走器可实现足地间有滑动的稳态行走;当 $\mu > 0.17$ 时,被动行走器可实现足地间无滑动的稳态行走.

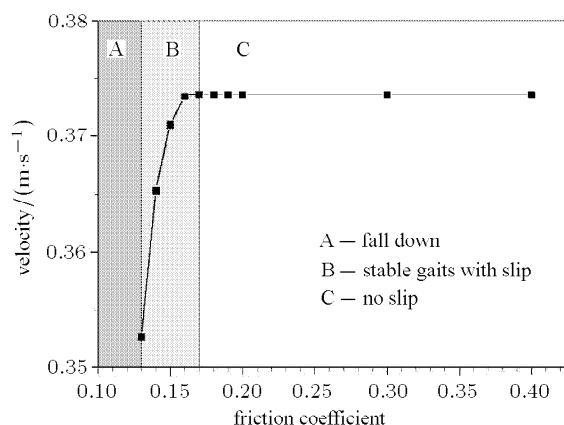


图 7 摩擦系数影响

Fig.7 Effects of friction coefficient

当改变 3.3 节中的法向恢复系数 (e_N) 时,被动行走器步态特性如表 2 所示.当法向恢复系数较小时,该恢复系数对被动行走器的步长、频率和平均速度的影响不大;当恢复系数接近于 1 时,在本文参数下,被动行走器不能实现稳态行走(摔倒).

由图 7 及表 2 可知,被动行走器在摩擦系数较大,而法向恢复系数较小的情况下,更有利于被动行走器实现稳定周期步态步行.

表 2 法向恢复系数的影响

Table 2 Effects of e_N

e_N	Step length	Step frequency	Average velocity
0	0.153 647 87	1.917 908 64	0.373 428 95
0.2	0.153 904 31	1.918 035 97	0.374 011 93
0.4	0.153 901 05	1.917 817 67	0.373 974 16
0.6	0.153 798 52	1.917 491 34	0.373 683 51
0.8	0.153 281 13	1.917 730 73	0.372 604 89
0.9	fall down		

4 结 论

本文采用非光滑多体系统动力学方法仿真被动行走器动力学问题,该方法具有以下特点:(1)通过建立接触力冲量法则的互补关系和线性互补方程,应用基于中点格式积分一步的时间步进方法仿真被动行走器模型,该方法易于编程计算,适应面更广.(2)给出的被动行走器的力学模型和数值仿真方法既适用于足地间无滑动塑性碰撞情况,也适用于有滑动非完全塑性碰撞情况,可应用此方法以有效地分析被动行走过程中足地间的滑动-黏滞和接触-分离现象.

通过数值仿真分析被动行走器的动力学特性,得到了以下结论:(1)当足地间无滑动塑性碰撞时,本文的仿真结果与传统方法的仿真结果相吻合,此时 McGeer 的 Step-to-Step 方法中的基本假设是合理的.(2)当足地间有滑动塑性碰撞时,在一定参数条件下,被动行走器仍然可实现稳定的周期步态.此时摩擦系数对被动行走器的平均速度影响较大.(3)当足地间为无滑动非完全塑性碰撞时,被动行走器也可以实现稳定周期步态行走,此时支撑腿转换时存在多次碰撞现象.另外法向恢复系数较小时,该恢复系数的变化对被动行走器的平均速度影响不大.(4)数值仿真结果还表明被动行走器在足地之间摩擦系数较大而法向恢复系数较小的情况下,更有利于实现稳定周期步态行走.

参 考 文 献

- McGeer T. Passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research*, 1990, 9(2): 62-82
- McGeer T. Passive dynamic walking with knees. In: Video Proc. of 1991 IEEE Robotics & Automation Conference, Sacramento, California, 1991
- Collins S, Ruina A, Tedrake R, et al. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers. *Science Magazine*, 2005, 307(5712): 1082-1085

- 4 Ali Tehrani Safa, Mohammad Ghaffari Saadat, Mahyar Naraghi. Passive dynamic of the simplest walking model: replacing ramps with stairs. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42(10): 1314-1325
- 5 Arthur DK. The six determinants of gait and the inverted pendulum analogy: a dynamic walking perspective. *Human Movement Science*, 2007, 2(4): 617-656
- 6 柳宁, 李俊峰, 王天舒. 双足模型步行中的倍周期步态和混沌步态现象. 物理学报, 2009, 58(6): 3772-3779 (Liu Ning, Li Junfeng, Wang Tianshu. Period-doubling gait and chaotic gait of biped walking model. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(6): 3772-3779 (in Chinese))
- 7 柳宁, 李俊峰, 王天舒. 用胞映射计算被动行走模型不动点的吸引盆. 工程力学, 2008, 25(10): 218-223 (Liu Ning, Li Junfeng, Wang Tianshu. Study of the basin of attraction of passive models by the aid of cell-to-cell mapping method. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(10): 218-223 (in Chinese))
- 8 Christoph Glocker, Christian Studer. Formulation and preparation for numerical evaluation of linear complementarity systems in dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2005, 13(4): 447-463
- 9 Leine RI, Van Campen DH. Nonlinear dynamics and modeling of various wooden toys with impact and friction. *Journal of Vibration and Control*, 2003, 9(1): 25-78
- 10 高海平, 王琪, 王士敏等. 单-双边约束多体系统的线性互补建模与数值积分方法. 振动与冲击, 2008, 27(8): 38-41 (Gao Haiping, Wang Qi, Wang Shimin, et al. Linear complementarity model and numerical integration scheme of multibody system with unilateral and bilateral constraints. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(8): 38-41(in Chinese))
- 11 Förg M, Pfeiffer F, Ulbrich H. Simulation of unilateral constrained systems with many bodies. *Multibody System Dynamics*, 2005, 14(2): 137-154
- 12 Moreau JJ. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 177(3-4): 329-349
- 13 Friedrich Pfeiffer. On non-smooth dynamics. *Meccanica*, 2008, 43(5): 533-554
- 14 Pfeiffer FG, Foerg MO. On the structure of multiple impact systems. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 42(2): 101-112
- 15 张洪武, 何素艳, 李兴斯. 求解摩擦接触问题的一个非内点光滑化算法. 应用数学和力学, 2004, 25(1): 42-52 (Zhang Hongwu, He Suyan, Li Xingsi. Non-interior smoothing algorithm for frictional contact problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(1): 42-52 (in Chinese))
- 16 McGeer T. Passive bipedal running. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 1990, 240(1297): 107-134
- 17 柳宁, 李俊峰. 双足被动行走器动力学仿真与实验研究. [博士论文]. 北京: 清华大学, 2008 (Liu Ning, Li Junfeng. Simulation and experimental study on the dynamics of passive bipedal walker. [PhD Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 2008 (in Chinese))
- 18 Liu Ning, Li Junfeng, Wang Tianshu. The effects of parameter variation on the gaits of passive walking models: Simulations and experiments. *Robotica*, 2009, 27(4): 511-528

(责任编辑: 周冬冬)

SIMULATION RESEARCH OF A PASSIVE DYNAMIC WALKER WITH ROUND FEET BASED ON NON-SMOOTH METHOD¹⁾

Duan Wenjie^{*,2)} Wang Qi^{*} Wang Tianshu[†]

^{*}(Department of Dynamics and Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

[†](School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Passive dynamic walkers can steadily walk down gentle slope under only action of gravity without any drivers and controls, and they have human-like characteristic of walk and high energy efficiency. The study on them has a key role in designing robots and medical prosthetics. Hence, it has attracted considerable public concern in recent years.

The contact configuration of the biped walkers also varies correspondingly due to the transitions between feet and ground from slip to stick or from contact to detachment. For the non-smooth and nonlinear model with variable structure, it is generally to simply regard the model as an inverted pendulum fixed at each foot

Received 22 September 2010, revised 24 May 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872102, 11072014).

2) E-mail: wenjie_duan@163.com

in turn by means of McGeer' Step-to-Step method. Here are the basic assumptions of the traditional method (Step-to-Step method): There is no slip between feet and ground, and plastic collision occurs at heelstrike while conserving angular momentum. In addition, it is assumed that stance leg and swing leg change instantaneously and no impulse acts on the swing foot. Although the traditional method is widely employed, the shortcomings of the method can not be neglected as follows: Firstly, slip phenomenon can not be dealt with; secondly, no direct simulation or experiment results support the assumption of angular momentum conservation of passive dynamic walker about heelstrike; thirdly, it is not suitable for analyzing general movements of the biped walker.

Planar straight-legged passive dynamic walker with round foot can be considered as a multibody system with unilateral constraints. Based on differential inclusions and complementary methods, the theory of non-smooth multibody dynamics with unilateral constraints has been well established, by which the multi-contact problems with friction and impact could be efficiently solved. In this paper, this passive walking phenomenon is simulated by using the non-smooth dynamic method. We mainly analyze the Coulomb friction and Newton impact phenomenon between feet and ground. Due to the collisions, the whole dynamical equation and contact laws are set up on base of impulse-velocity level. After establishing the complementary relationships of all contact laws, a linear complementary problem in standard form is given. And then, we choose a one-step mid-point time-stepping method for numerical simulation. The programming with the non-smooth method is easier than that of the traditional method.

The following conclusions are obtained from numerical simulations in this paper: (1) If there is no slip and the collisions are plastic, the simulation results agree with those of the traditional methods, which indicate that the assumptions of the Step-to-Step method are reasonable. (2) In the case of slip and plastic impact, stable periodic gaits could also be found with some suitable parameters. For this case, the friction coefficient has a significant effect on the average walking velocity in tangential direction. (3) If elastic impact occurs without slipping, passive dynamic walkers could also steadily walk down slopes with several collisions at the transition from swing leg to stance leg. Small normal coefficient of restitution has little effect on average walking speed. (4) The simulation results show that for a small normal coefficient of restitution and a large friction coefficient, it is easy for passive dynamic walkers to realize stable periodic gaits.

Key words non-smooth, linear complementary problem, passive dynamic walker, Coulomb friction, Newton impact, multibody system, dynamics