

外激励作用下亚音速二维壁板分岔及响应研究¹⁾

李 鹏* 杨翊仁^{†,2)} 鲁 丽[†]

*(西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031)

[†](西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 研究了亚音速流中二维壁板在外激励作用下的分岔和响应问题. 采用 Galerkin 方法将非线性运动控制方程离散为常微分方程组. 采用 Runge-Kutta 数值方法进行了数值计算, 研究了壁板系统非单周期区在参数空间的分布情况. 结果表明: 在参数空间中, 非单周期区和单周期区会交替出现; 在不同的单周期区内, 系统运动轨线也有规律的变化; 系统由单周期运动进入混沌运动是经过一系列周期倍化分岔产生的.

关键词 壁板, 亚音速流, 参数空间, 周期倍化分岔, 混沌

中图分类号: O354.1 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)04-0746-09

引 言

自 20 世纪 60 年代日本建成时速达 210 km/h 的东海道新干线以来, 世界铁路的高速化技术得到迅速发展. 高速客运专线、城际快速铁路已经成为我国铁路发展的主流方向. 随着列车运行速度的提高, 低速运行时被忽略的气动力将成为列车高速运行及影响列车安全运行的主要因素^[1]. 高速列车运行速度越高其气动弹性问题将愈发突出. 气动弹性问题是发展高速列车需要解决的关键问题之一^[2].

由于高速列车车身蒙皮及车窗等都属于壁板结构, 这些结构在轮轨激扰和气流联合作用下将会发生振动. 当列车运行速度较低时, 其振动幅度虽然较小但也是难以抑制的. 随着列车运行速度的增高, 这些结构的振动将越来越显著, 如在武广客运专线试验中, 当列车运行速度达到 350 km/h 时, 车身蒙皮的振动非常显著, 并会产生很大的辐射噪声. 另外, 车身表面气体的流动将会对车体形成波动载荷, 迫使整个车身产生较大幅度振动. 因此有必要对车身蒙皮等壁板结构进行气动弹性分析.

在壁板气动弹性领域, 已发表的论文大多数是以超音速流中的壁板为对象, 研究其气动弹性颤振响应及其稳定性. 如文献 [3-4] 采用了准静态线性活塞气动力理论, 应用 von Karman 非线性应变位移关

系, 研究了壁板结构气动弹性颤振的临界动压、极限环响应、幅值随动压变化关系以及系统的混沌运动等. 文献 [5] 采用微分求积法 (differential quadrature method, DQM) 对壁板结构运动偏微分方程进行离散化处理, 建立了一种新的气动弹性系统离散方法, 结合数值积分法研究了几何非线性壁板的极限环颤振响应. 对于高速列车中的壁板结构, 按照高速列车的运行速度推算, 马赫数大约在 0.3 左右, 基本上处于低亚音速范围. 文献 [6] 指出, 对边简支壁板能够在马赫数为 0.125 时发生颤振, 并得到风洞试验结果的证实. 尽管低亚音速范围内壁板是否发生颤振还存在争议 (如文献 [7] 论述了低流速下两端简支板不存在颤振的理由), 但对于高速列车的壁板气动弹性问题而言, 其与航空结构壁板气动弹性有所区别, 壁板除单面受气动载荷作用外, 还将受到由于轮轨激扰而传递到壁板上的激扰力. 所以, 高速列车的壁板在气动力和轮轨激扰下可能出现复杂的响应, 有待于深入研究. 对于有外激励作用和参数激励下的动力系统, 大量学者做了深入的研究^[8-13]. 文献 [14-16] 均采用了二维参数空间的方法来研究动力系统的复杂运动.

本文拟采用 Galerkin 方法对激振力作用下二维壁板在亚音速气流中的非线性动力学方程进行离散, 并采用数值方法研究壁板系统非单周期区在参

2010-03-24 收到第 1 稿, 2011-02-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10972185), 中央高校基本科研业务费专项资金 (2010Z707) 和高等学校博士点基金新教师基金 (20070613032) 资助项目.

2) E-mail: yangyiren05@126.com

数空间中的分布情况. 着重考察激振力幅值、黏性阻尼系数和来流动压 3 个参数对系统非单周期区分布的影响.

1 基本方程

考虑图 1 所示的对边简支-对边自由且中部受约束的二维壁板, 其长度为 l , 厚度为 h , 且 $h \ll l$, 壁板单位长度的质量为 ρ . 上表面作用有沿 x 方向的亚音速气流, 其中来流速度为 U_∞ , 空气密度 ρ_∞ . 同时壁板作用有初始中面内力 N_0 及垂直壁板方向上的轮轨激扰力 $P(x, t) = P(x) \cos(\omega t)$. 壁板的中间作用有非线性弹簧 K 及黏性阻尼装置, c 为黏性阻尼系数. 该模型中, 壁板中点的非线性弹簧约束为立方非线性, 即弹簧约束力与壁板位移的关系为

$$f(w) = (k_1 w + k_2 w^3) \delta(x - l/2) \quad (1)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数, $w(x, t)$ 为壁板的位移, k_1, k_2 分别为弹簧的线性和非线性刚度系数.

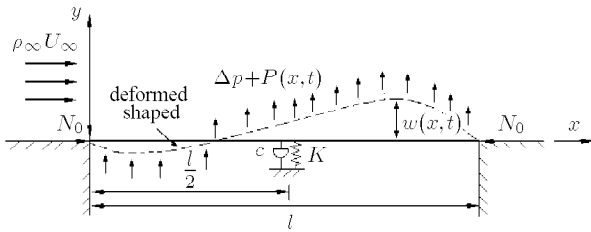


图 1 二维壁板的几何形状

Fig.1 Sketch of the two-dimension thin plate

由文献 [17-18] 可得作用在壁板单侧的气动压力为

$$\Delta p = \frac{\rho_\infty}{\pi} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U_\infty \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} \right) \ln \left| \frac{x - \xi}{l} \right| d\xi + \frac{\rho_\infty}{\pi} \int_0^l \left(U_\infty \frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \frac{l}{x - \xi} d\xi \quad (2)$$

基于 Kirchhoff-Love 假设, 采用 Hamilton 原理, 可得激振力和气动力联合作用下板的横向弯曲振动方程

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w) + c \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x - l/2) = \Delta p + P(x) \cos(\omega t) \quad (3)$$

式中, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 为板的弯曲刚度, ν 为泊松比.

简支边界条件为

$$w|_{x=0,l} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,l} = 0 \quad (4)$$

方程 (3) 为无限维偏微分方程, 采用 Galerkin 方法将其进行离散化, 设

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \quad (5)$$

其中 $q_i(t)$ 为广义坐标, 将式 (5) 代入式 (2), 可得

$$\Delta p = \sum_{i=1}^N \left\{ - \left(2\rho_\infty U_\infty \frac{dq_i}{dt} \right) \cos \left(\frac{i\pi x}{l} \right) + \left(\rho_\infty U_\infty^2 \frac{i\pi}{l} q_i - \frac{\rho_\infty l}{i\pi} \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right) \sin \left(\frac{i\pi x}{l} \right) \right\} \quad (6)$$

引入如下无量纲参数

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{q_i}{h}, \quad \eta = \frac{x}{l}, \quad \mu = \frac{\rho_\infty l}{\rho h \pi} \\ \lambda &= \frac{\rho_\infty U_\infty^2 l^3}{D}, \quad \omega_0 = \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} \frac{1}{l^2} \\ \tau &= \omega_0 t, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \\ \theta_1 &= \frac{k_1 l^3}{D}, \quad \theta_2 = \frac{k_2 l^3 h^2}{D} \\ R_x &= \frac{N_0 l^2}{D}, \quad f = \frac{P(\eta) l^3}{D h}, \quad \sigma = \frac{c l^3}{D} \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式 (5)~(7) 代入式 (3), 利用主振型的正交性得到离散系统的动力学方程

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\mu}{i} \right) \ddot{u}_i + [(i\pi)^4 - R_x (i\pi)^2 - \lambda (i\pi)] u_i + \\ & 4 \left(\frac{\lambda \mu}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{i \neq j, j=1}^N \frac{[1 - (-1)^{i+j}] i}{i^2 - j^2} \dot{u}_j + \\ & 2\theta_1 \sin \left(\frac{i\pi}{2} \right) \left[\sum_{j=1}^N u_j \sin \left(\frac{j\pi}{2} \right) \right] + \\ & 2\theta_2 \sin \left(\frac{i\pi}{2} \right) \left[\sum_{j=1}^N u_j \sin \left(\frac{j\pi}{2} \right) \right]^3 + \\ & 2\sigma \sin \left(\frac{i\pi}{2} \right) \left[\sum_{j=1}^N \dot{u}_j \sin \left(\frac{j\pi}{2} \right) \right] = \\ & 2F_i \cos(\Omega \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $F_i = \int_0^1 f \sin(i\pi \eta) d\eta$.

2 系统平衡点的叉式分岔

对式 (8) 截取 2 阶模态 (即 $i = j = 2$), 并考虑 $P(x) = P$ 为常数. 对式 (8) 引入如下的状态变

量 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2)$, 可得系统 (8) 的范式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-1}{1+\mu} \left[(\pi^4 - \lambda\pi - R_x\pi^2 + 2\theta_1)x_1 - \frac{8}{3} \left(\frac{\lambda\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} x_4 - 2\sigma x_2 \right] - \frac{2\theta_2}{1+\mu} x_1^3 + \frac{2F_1}{1+\mu} \cos(\Omega\tau) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-2}{2+\mu} \left[(16\pi^4 - 2\lambda\pi - 4R_x\pi^2)x_3 + \frac{16}{3} \left(\frac{\lambda\mu}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} x_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

考虑系统的无阻尼自由振动, 即式 (9) 中 $\sigma = 0$, $F_1 = 0$, 令式 (9) 等于零可求得系统的平衡点, 并可通过平衡点处的 Jacobi 矩阵的特征值确定平衡点的稳定性.

设 $s_1 = -(\pi^4 - \lambda\pi - R_x\pi^2 + 2\theta_1)$, $s_2 = 2\theta_2$. 由平衡点静态分岔临界曲线 $s_1 = 0$, 得临界动压 $\lambda_c = \pi^3 + 2\theta_1/\pi - R_x\pi$. 当 $\lambda \leq \lambda_c$ 时, 系统 (9) 唯一的平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ 为稳定的中心. 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统 (9) 有 3 个平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$, $O_1(-\sqrt{s_1/s_2}, 0, 0, 0)$ 及 $O_2(\sqrt{s_1/s_2}, 0, 0, 0)$. 其中平衡点 O 为不稳定的鞍点, 两个新的平衡点 O_1, O_2 为稳定的中心. 故方程 (9) 在 $\lambda = \lambda_c$ 处出现叉式分岔.

以我国高速列车蒙皮采用较广泛的国产铝合金薄板为例^[19], 该类材料的弹性模量 $E = 69 \text{ GPa}$, 取蒙皮宽度 $l = 800 \text{ mm}$, 厚度 $h = 2.5 \text{ mm}$. 文中取无量纲参数 $R_x = -10$, $\theta_1 = 20$, $\theta_2 = 20$, 得到 $\lambda_c = 75.125$. 由来流动压的定义可得 λ_c 对应的气流速度即列车的运行速度 $U_\infty = 385.103 \text{ km/h}$, 说明高速列车在运行中, 临界来流动压可能会出现. 图 2 给出了系统平衡

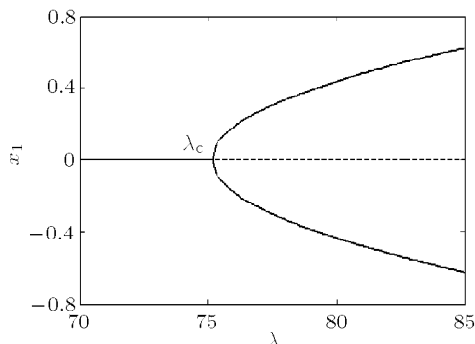


图 2 平衡点的叉式分岔

Fig.2 Pitchfork bifurcation of the equilibrium points

点数目、位置及稳定性随 λ 变化的情况, 其中实线表示稳定的平衡点, 虚线表示不稳定的平衡点. 图 3 给出了 $\lambda = 80.125$ 时的相图 $(x_1, \dot{x}_1)$.

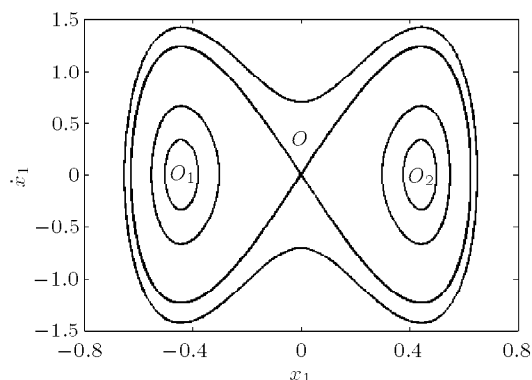


图 3 $\lambda = 80.125$ 时系统相图 $(x_1, \dot{x}_1)$

Fig.3 Phase portraits $(x_1, \dot{x}_1)$ for $\lambda = 80.125$

3 系统非单周期区的分布

对于系统 (9), 令 $\beta = F_1$. 当 $\lambda \leq \lambda_c$ 时, 在周期外力的作用下系统最后将绕平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ 作单周期运动. 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统有一个不稳定和两个稳定的平衡点, 情况就完全不一样. 当 β 较小时, 系统最后将绕其中一个平衡点作单周期运动, 趋于哪个平衡点取决于系统初值. 当 β 较大时, 系统将在两个平衡点附近往返运动, 系统将会呈现复杂运动行为. 下面就对 β 较大时, 系统的复杂运动响应进行研究, 着重考察激振力幅值 β 、阻尼 σ 和来流动压 λ 3 个参数对系统运动响应的影响.

对系统 (9) 引入变换 $S : (x_1, x_2, x_3, x_4, \tau) \rightarrow (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, \tau + \pi)$. 在 S 变换下, 式 (9) 将保持不变. 也就是说如果 X 是系统 (9) 的解, 那么 $S : X$ 也是系统 (9) 的解. 为了便于描述系统 (9) 的不同运动响应, 将运动周期与外激励力周期 $2\pi/\Omega$ 相等的运动称为单周期运动, 将运动不是单周期的参数区称为非单周期区, 在非单周期区内包含了周期倍化分岔等分岔细节及混沌等复杂运动响应. 为便于描述不同运动响应的变化, 引入符号 $P_s(m, n)$, $P_a^\pm(m, n)$ 和 B , 它们分别表示对称的单周期运动、非对称单周期运动和非单周期区, 其中 m 表示在相空间中单周期运动轨线从正 x_2 变为负 x_2 穿过负 x_1 轴的次数, n 表示在相空间中单周期运动轨线从负 x_2 变为正 x_2 穿过正 x_1 轴的次数, “ $\pm$ ”表示由 S 相关联的一组解, 即, 若 $P_a^-(m, n)$ 为 X , 则 $S : X$

为 $P_a^+(m, n)$. m, n 越大, 在一个周期内轨线绕平衡点的绕数越多, 但在绕数增加的过程中, 运动的周期保持不变.

采用四阶 Runge-Kutta 方法对系统 (9) 进行数值积分, 以研究系统的非单周期区在参数空间的分布情况. 在计算中, 取 $\mu = 0.01, \Omega = 1.0$, 并引入参数 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_c$. 值得强调的是, 本文主要讨论参数条件下系统非单周期区的分布情况, 而对非单周期区内的分岔细节及各种复杂运动响应将另做研究, 在本文中不加讨论.

固定 $\Delta\lambda = 1.0$, 图 4 给出了 σ - β 参数空间非单周期区的分布图. 图中阴影部分表示为非单周期区, 其余为单周期区, β_s 为非单周期区的开始值, s 为系统轨线左右绕数之和, 即 $s = m + n$. 由图 4 可知, 随着 σ 的增大, 系统非单周期区的数目将不断减少. 对于固定的 σ , 每个非单周期区的开始值随着 β 的增大而增大. 值得指出的是对称单周期运动在经过非单周期区之前将会发生轨道对称性的破坏.

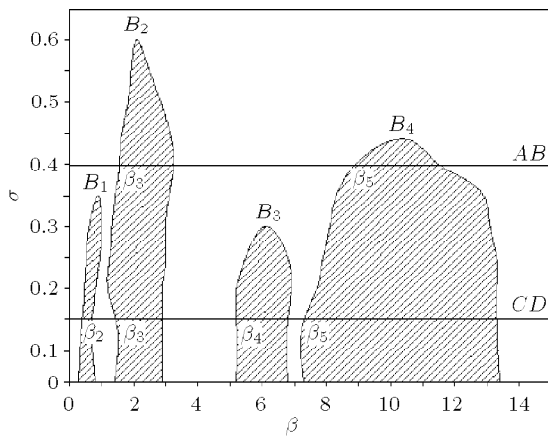


图 4 $\Delta\lambda = 1.0$, σ - β 参数空间, 非单周期区分布图

Fig.4 Distribution of non-single period areas in the σ - β parameter plane for $\Delta\lambda = 1.0$

当 σ 较大时, 如图 4 中的直线 AB, 随着 β 的增大, 系统不同运动响应的变化过程可以表示为

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_2 \rightarrow \\ & P_s(2, 2) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow \\ & B_4 \rightarrow P_s(3, 3) \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $\{\cdot\}_D$ 表示周期倍化分岔, 括号 $\{\cdot\}$ 表示两组关联解共存. 在式 (10) 给出的变化过程中, 系统从

非对称的单周期运动 $\left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\}$ 恢复到对称的单周期运动 $P_s(3, 3)$ 共经过了 2 个非单周期区, 且从对称或非对称的单周期运动恢复到左右绕数都增加 1 的对称或非对称的单周期运动需要经过 1 个非单周期区.

当 σ 较小时, 如图 4 中的直线 CD, 随着 β 的增大, 系统不同运动响应的变化过程可以表示为

$$\begin{aligned} & P_s(1, 1) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 1) \\ P_a^-(1, 1) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_1 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\} \rightarrow \\ & \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_2 \rightarrow P_s(2, 2) \rightarrow \\ & \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 2) \\ P_a^-(2, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_3 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\} \rightarrow \\ & \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_4 \rightarrow P_s(3, 3) \end{aligned} \quad (11)$$

在式 (11) 给出的变化过程中, 系统从对称的单周期运动 $P_s(1, 1)$ 恢复到对称单周期运动 $P_s(3, 3)$ 共经过了 4 个非单周期区, 且从对称或非对称的单周期运动恢复到左右绕数都增加 1 的对称或非对称的单周期运动需要经过 2 个非单周期区.

固定 $\sigma = 0.2$, 图 5 给出了 $\Delta\lambda$ - β 参数空间非单周期区的分布图. 由图可知随 $\Delta\lambda$ 的增大, 系统非单周期区的数目将先增加而后减少.

(1) 直线 AB: 随着 β 的增大, 系统不同运动响应的变化过程与式 (10) 表示的变化过程相同.

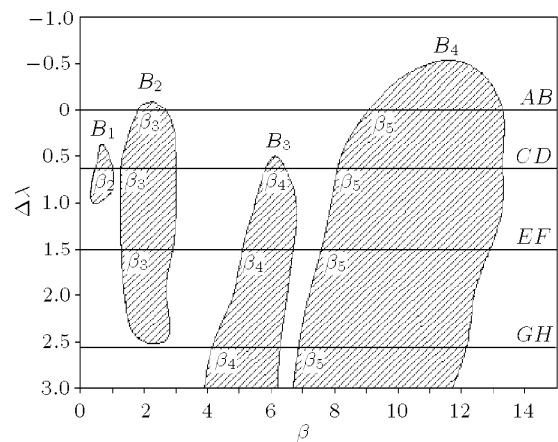


图 5 $\sigma = 0.2$, $\Delta\lambda$ - β 参数空间, 非单周期区分布图

Fig.5 Distribution of non-single period areas in the $\Delta\lambda$ - β parameter plane for $\sigma = 0.2$

(2) 直线 CD : 随着 β 的增大, 系统不同运动响应的变化过程与式 (11) 表示的变化过程相同.

(3) 直线 EF : 随着 β 的增大, 系统不同运动响应的变化过程可以表示为

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_2 \rightarrow \\ P_s(2, 2) &\rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 2) \\ P_a^-(2, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_3 \rightarrow \\ \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow \\ B_4 &\rightarrow P_s(3, 3) \end{aligned} \quad (12)$$

在式 (12) 给出的变化过程中, 系统从非对称的单周期运动 $\left\{ \begin{matrix} P_a^+(1, 2) \\ P_a^-(2, 1) \end{matrix} \right\}$ 恢复到对称的单周期运动 $P_s(3, 3)$ 共经过了 3 个非单周期区, 且从对称或非对称的单周期运动恢复到左右绕数都增加 1 的对称或非对称的单周期运动需要经过 2 个非单周期区.

(4) 直线 GH : 随着 β 的增大, 系统不同运动响

应的变化过程可以表示为

$$\begin{aligned} P_s(2, 2) &\rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 2) \\ P_a^-(2, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_3 \rightarrow \\ \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2, 3) \\ P_a^-(3, 2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_4 \rightarrow P_s(3, 3) \end{aligned} \quad (13)$$

在式 (13) 给出的变化过程中, 系统从对称的单周期运动 $P_s(2, 2)$ 恢复到对称单周期运动 $P_s(3, 3)$ 共经过了 2 个非单周期区, 且从对称的单周期运动恢复到左右绕数都增加 1 的对称单周期运动需要经过 2 个非单周期区.

在 σ - β 参数空间以及 $\Delta\lambda$ - β 参数空间中, 随着外激励幅值 β 的增加, 单周期和非单周期区交替出现, 在不同单周期区里, m 和 n 也在有规律的变化. 经过式 (10)~式 (13) 中的任意一个变化过程, 系统周期解在一个周期内绕平衡点的绕数左右都将增加. 图 6 为 $\sigma = 0.2$, $\Delta\lambda = 1.0$ 时, 系统不同单周期运动的相图 $(x_1, \dot{x}_1)$. 从图 6 可以看到, 随着 β 的不断增大, 单周期运动的相轨线的绕数也在逐一增加. 图 7 为 $\sigma = 0.2$, $\Delta\lambda = 1.0$ 时, 系统从单周期运动经周期倍化分岔通向混沌.

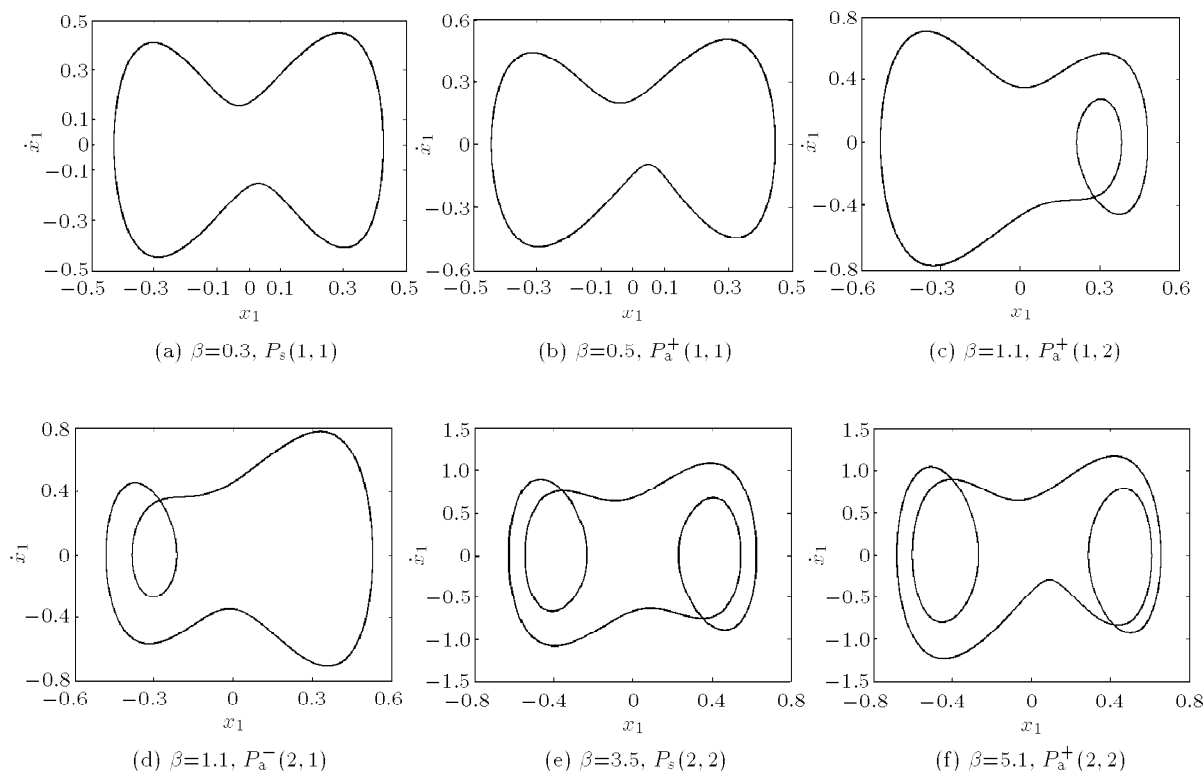


图 6 $\sigma = 0.2$, $\Delta\lambda = 1.0$ 时, 不同的单周期运动相图 $(x_1, \dot{x}_1)$

Fig.6 Phase portraits $(x_1, \dot{x}_1)$ of single period motion with different β values for $\sigma = 0.2$, $\Delta\lambda = 1.0$

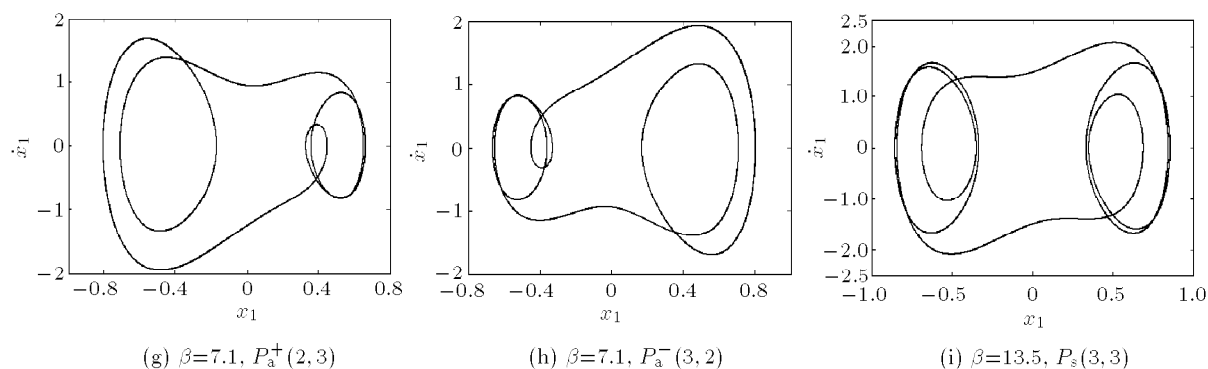
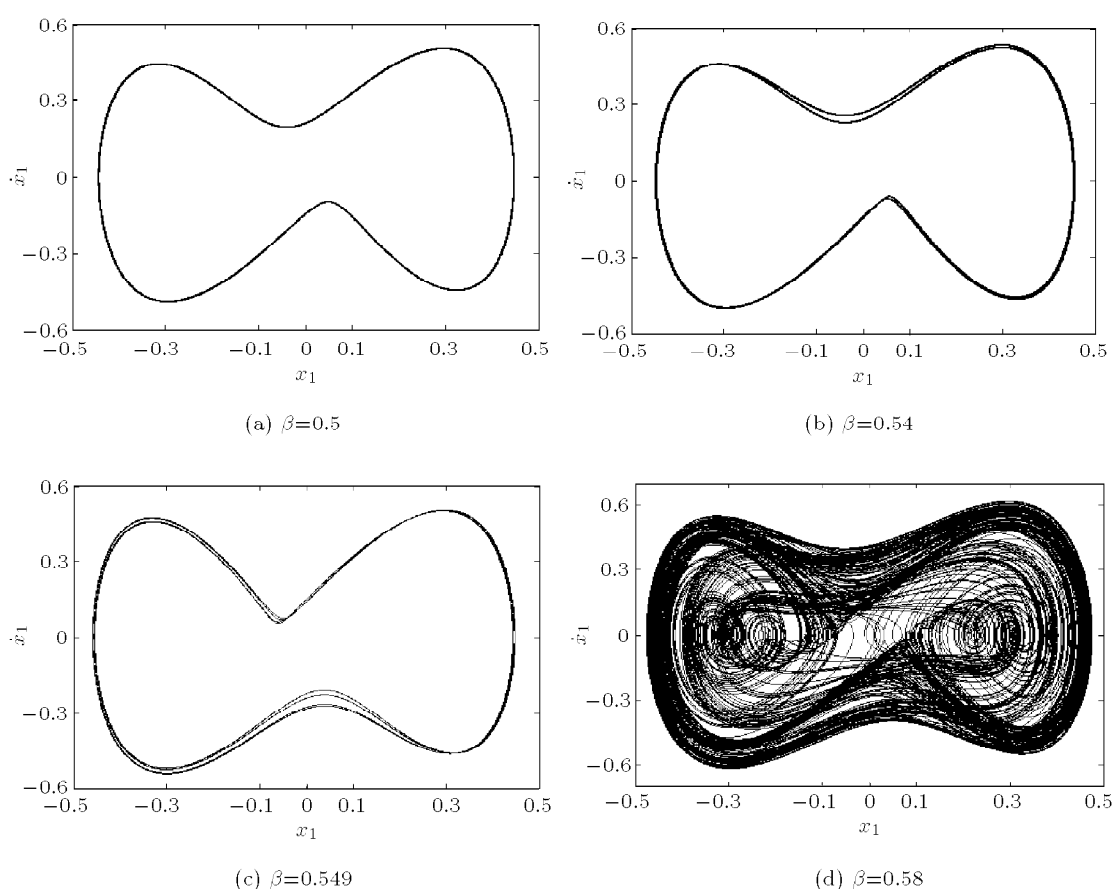
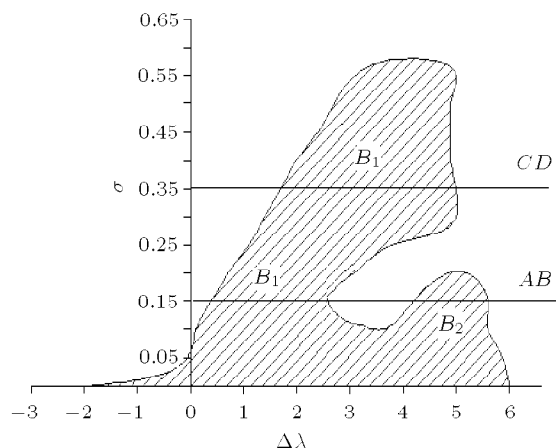
图 6 $\sigma = 0.2, \Delta\lambda = 1.0$ 时, 不同的单周期运动相图 $(x_1, \dot{x}_1)$ (续)Fig.6 Phase portraits $(x_1, \dot{x}_1)$ of single period motion with different β values for $\sigma = 0.2, \Delta\lambda = 1.0$ (continued)图 7 $\sigma = 0.2, \Delta\lambda = 1.0$ 时, 系统从单周期运动经周期倍化分岔进入混沌运动Fig.7 Phase portraits $(x_1, \dot{x}_1)$ of single period motion to chaos by period-doubling process for $\sigma = 0.2, \Delta\lambda = 1.0$

图 8 为 $\beta = 6.0$ 时, σ - $\Delta\lambda$ 参数空间非单周期区的分布图. 从图可知, 当 $\Delta\lambda > 0$, 即 $\lambda > \lambda_c$ 时, 系统非单周期区呈现非对称的双峰分布. 随着 σ 的增加, 系统非单周期区的数目也将先增加而后减小. 在 $\Delta\lambda > 0$ 一侧的非单周期区要比 $\Delta\lambda < 0$ 一侧的非单周期区要大得多, 其中的运动响应也将更为复杂, 这是由于系统的平衡点数目及稳定性在 $\Delta\lambda > 0$ 后改变而造成的影响, 这说明外激励较大时, 系统

由于 λ 变化而导致的多平衡点的结构对系统的响应有重要的影响.

当 σ 较小时, 如直线 AB , 随着 $\Delta\lambda$ 的增大, 系统在经过第 1 个非单周期区后, 系统从单周期运动 $P_s(2,2)$ 恢复到左或右绕数增加 1 的单周期运动

$\left\{ \begin{matrix} P_a^+(2,3) \\ P_a^-(3,2) \end{matrix} \right\}$. 但在经过第 2 个非单周期区后, 系统

图 8 $\beta = 6.0$, σ - $\Delta\lambda$ 参数空间, 非单周期区分布图Fig.8 Distribution of non-single period areas in the σ - $\Delta\lambda$ parameter plane for $\beta = 6.0$

由绕 3 个平衡点的运动恢复到绕 O_1 和 O_2 中的一个平衡点的运动. 为方便表示该分岔过程, 引入符号 $P_O^\pm$ 来表示系统绕平衡点 O_2 或 O_1 的单周期运动,

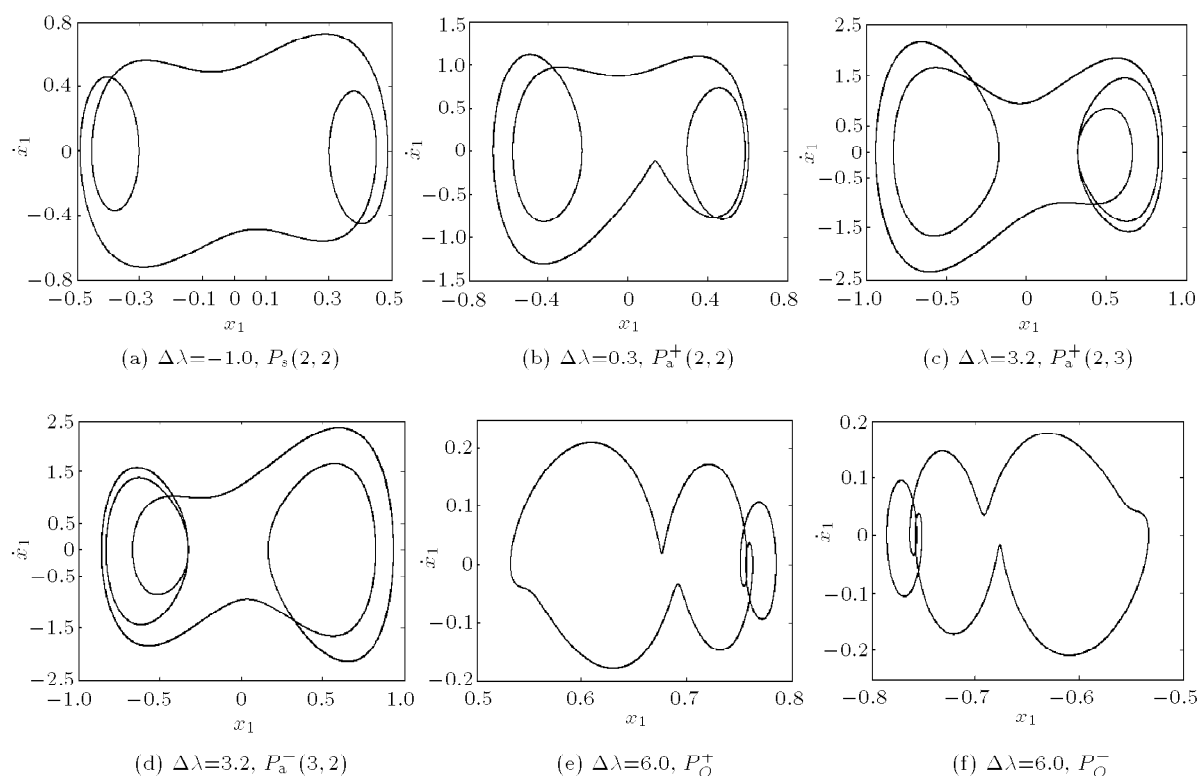
那么上述系统不同运动响应的变化过程可以表示为

$$P_s(2,2) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2,2) \\ P_a^-(2,2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_1 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2,3) \\ P_a^-(2,3) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_2 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_O^+ \\ P_O^- \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

当 σ 较大时, 如直线 CD , 随着 $\Delta\lambda$ 的增大, 系统只经过了 1 个非单周期区. 经过该非单周期区后, 系统由绕 3 个平衡点的运动也将恢复到绕 O_1 和 O_2 中的一个平衡点的运动. 上述系统不同运动响应的变化过程可以表示为

$$P_s(2,2) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_a^+(2,2) \\ P_a^-(2,2) \end{matrix} \right\}_D \rightarrow B_1 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} P_O^+ \\ P_O^- \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

图 9 给出了 $\sigma = 0.2, \beta = 6.0$ 时, 系统不同单周期运动的相图 $(x_1, \dot{x}_1)$. 从图 9 可以看到, 随着 $\Delta\lambda$ 的增大, 系统由绕 3 个平衡点的运动恢复到绕 O_1 和 O_2 中的一个平衡点的运动.

图 9 $\sigma = 0.2, \beta = 6.0$ 时, 不同的单周期运动相图 $(x_1, \dot{x}_1)$ Fig.9 Phase portraits $(x_1, \dot{x}_1)$ of single period motion with different $\Delta\lambda$ values for $\sigma = 0.2, \beta = 6.0$

4 结 语

从以上计算结果来看, 在超过一定的来流动压

后, 系统平衡点的个数和稳定性均会发生变化. 在不同的单周期区内, 系统的运动轨线也是在有规律地变化.

(1) 在 σ - β 参数空间的非单周期区的分布图中, 随着 σ 的不断增大, 系统非单周期区将依次消失. 随着外激励幅值 β 的增加, 系统单周期区和非单周期区交替出现;

(2) 在 $\Delta\lambda$ - β 参数空间的非单周期区的分布图中, 随着 $\Delta\lambda$ 的不断增大, 系统非单周期区将先依次出现而后依次消失. 随着外激励幅值 β 的增加, 系统单周期区和非单周期区也会交替出现;

(3) 在 σ - $\Delta\lambda$ 参数空间的非单周期区的分布图中, 当 $\Delta\lambda > 0$ 时, 即系统来流流动压超过临界动压时, 系统的非单周期区将呈现非对称的双峰结构. 随着 σ 的增加, 系统非单周期区的数目将先增加后减小;

(4) 系统由周期运动进入混沌运动是经过一系列周期倍化分岔产生的.

值得指出的是非单周期区内的丰富而又复杂的运动特性, 在本文未加讨论, 这正是下一步需要进行的工作.

参 考 文 献

- Schetz JA. Aerodynamics of high-speed trains. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2001, 33: 371-414
- Raghunathan RS, Kim HD, Setoguchi T. Aerodynamics of high-speed railway trains. *Progress in Aerospace sciences*, 2002, 38(6/7): 469-514
- Koo KN, Hwang WS. Effects of hysteretic and aerodynamic damping on supersonic panel flutter of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273(3): 569-583
- Chin C, Nayfeh AH, Mook DT. The response of nonlinear system with non semisimple one-to-one response to a combination parametric resonance. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1995, 5(4): 971-982
- Chen DL, Yang YR, Fan CG. Nonlinear flutter of a two-dimension thin plate subjected to aerodynamic heating by differential quadrature method. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24(1): 45-50
- Dugundji J, Dowell E, Perkin B. Subsonic flutter of panels on continuous elastic foundations. *AIAA Journal*, 1963, 1(5): 1146-1154
- Guo CQ, Paidoussis MP. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow. *Journal of Applied Mechanics*, 2000, 67(1): 171-176
- Wang L, Ni Q, Huang YY. Bifurcations and chaos in a forced cantilever system with impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(4/5): 1068-1078
- Jing ZJ, Wang RQ. Complex dynamics in Duffing system with two external forcings. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(2): 399-411
- Huang JC, Jing ZJ. Bifurcations and chaos in three-well Duffing system with one external forcing. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 40(3): 1449-1466
- Kenfack A. Bifurcation structure of two coupled periodically driven double-well Duffing oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 15(2): 205-218
- 叶敏, 陈予恕. 弹性屈曲梁在参数激励下的周期倍化分岔. 固体力学学报, 1998, 19(4): 361-364(Ye Min, Chen Yushu. Period doubling bifurcation in elastic bulked beam under parametric excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 19(4): 361-364 (in Chinese))
- 张伟, 霍拳忠. 参数激励和强迫激励联合作用下非线性振动的分岔. 力学学报, 1991, 23(4): 464-474(Zhang Wei, Huo Quanzhong. Bifurcation of nonlinear oscillation system under combined parametric and forcing excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 23(4): 464-474(in Chinese))
- Zhao LC, Yang ZC. Chaotic motion of an airfoil with nonlinear stiffness in incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 138(2): 245-254
- Dowell E. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, 85(3): 333-344
- 朱顺泉, 谢发根, 胡岗. Duffing 方程的分岔结构及其标度特性. 物理学报, 1992, 41(10): 1638-1646(Zhu Shuquan, Xie Fa-geng, Hu Gang. Bifurcation structure and scaling property of Duffing's equation. *Acta Physica Sinica*, 1992, 41(10): 1638-1646 (in Chinese))
- Bisplinghoff RL, Ashley H, Halfman RL. Aeroelasticity. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1955. 285-326
- Dowell E. Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden, Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1975. 40-43
- 王元良, 骆德阳, 王一戎. 我国高速列车焊接技术及其新发展. 电焊机, 2008, 38(8): 8-12(Wang Yuanliang, Luo Deyang, Wang Yirong. Welding and its development of bullet train. *Electric Welding Machine*, 2008, 38 (8): 8-12(in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

BIFURCATION AND RESPONSES ANALYSIS OF TWO-DIMENSION PANEL WITH EXTERNAL EXCITATION IN SUBSONIC FLOW¹⁾

Li Peng* Yang Yiren^{†,2)} Lu Li[†]

^{*}(National Traction Power Laboratory, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

[†](School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract Along with the development of high speed multiple unite train and intercity railroad, the high speed technology has become the development direction of train. With the increase of speed, the aerodynamic problems of such train are emerging, while neglected in low speed. Future trains will increase their speeds substantially, and if so, aerodynamic forces may influence train running safety and affect passenger's comfort. So the aeroelasticity of high speed train is the problem to be urgently and promptly solved. Because the high speed train adopts stream line design to decrease running resistance, lots of panel structures such as body skin are widely used. When train runs with lower speed, these panel structures will vibrate with small amplitude and can not be inhibited at all. But under combined aerodynamic forces and wheel-rail excitation, complicated aeroelasticity phenomena of these panel structures may occur.

The bifurcation and responses of two-dimension panel with external excitation in subsonic flow are studied in this paper. Based on the potential theory of incompressible flow, the aerodynamic pressure for air acting on the top side of the panel is acquired. The wheel-rail excitation is simplified as external forcing acting on the panel. The cubic stiffness and viscous damper in middle of the panel are considered. The nonlinear governing motion equations are reduced to a series of ordinary differential equations by the Galerkin method. The Runge-Kutta numerical method is used to conduct numerical simulations. The distribution of non-single period areas of the panel system are indicated in differential parameter planes. The effect of three dimensionless parameters, namely viscous damping coefficient σ , external forcing amplitude β and dynamic pressure increment $\Delta\lambda$, is emphatically investigated.

The results of this paper show that the pitchfork bifurcation occurs with the increase of dynamic pressure, and the number and stability of the equilibrium points change after the dynamic pressure exceeds the critical value. In differential single period regions, the system motion trajectories in phase-plane portraits change rhythmically.

1. In the parameter plane σ - β , the number of non-single period regions decreases with the increase of σ ; the non-single period regions and single period regions appear alternately with the increase of β .

2. In the parameter plane $\Delta\lambda$ - β , the non-single period region number firstly increases and then decreases with the increase of $\Delta\lambda$; the non-single period regions and single period regions appear alternately with the increase of β .

3. In the parameter plane σ - $\Delta\lambda$, the non-single period regions present asymmetric double-peak structure when $\Delta\lambda > 0$; the non-single period region number firstly increases and then decreases with the increase of σ .

4. The route from periodic motion to chaos is via doubling-period bifurcation.

Key words panel, subsonic flow, parameter planes, doubling-period bifurcation, chaos

Received 24 March 2010, revised 15 February 2011.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10972185), the Fundamental Research Funds for Central Universities (2010Z707) and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20070613032).

2) E-mail: yangyiren05@126.com