

输入受限 LQ 控制的参变量变分原理和算法¹⁾

彭海军* 高 强*,2) 张洪武* 吴志刚† 钟万勰*

*(大连理工大学, 工业装备结构分析国家重点实验室, 工程力学系, 大连 116024)

†(大连理工大学, 工业装备结构分析国家重点实验室, 航空航天学院, 大连 116024)

摘要 在最优控制理论中根据模拟理论思想发展了塑性力学和接触力学中的参变量变分原理, 并建立了控制输入受限的线性二次 (linear quadratic, LQ) 最优控制问题的求解新方程——耦合的 Hamilton 正则方程与线性互补方程. 通过将连续时间离散成一系列等间距时间区段, 在离散时域内采用参数二次规划方法给出数值求解输入受限的 LQ 最优控制问题的新算法. 数值仿真验证了该算法在求解控制输入受限的 LQ 最优控制问题中的有效性, 并且该算法具有较快的收敛性, 在大步长下具有较高的计算精度.

关键词 LQ 最优控制, 控制输入受限, 线性互补, 参数二次规划, 参变量变分原理

中图分类号: O232 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)03-0488-08

引 言

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分之一, 在求解最优控制问题方面有 3 种著名的方法: 经典变分原理、极大值原理和动态规划^[1-2]. 由于经典变分原理只能解决无约束条件下的最优控制问题, 所以在处理闭集性约束最优控制问题中经常采用极大值原理和动态规划. 这两种方法从不同角度出发, 发展了经典变分法, 且都把经典变分法作为自己的特例, 所以又被称为最优控制理论中的“现代变分法”^[3]. 近年来, 在状态空间中发展了基于分析结构力学理论及保持哈密顿体系结构特征的精细积分算法, 专著^[4]精确高效地求解了最优控制和 H_∞ 鲁棒控制中的系统设计和仿真问题. 从这种模拟理论角度出发, 应用力学中塑性力学问题就是物性饱和问题. 因此, 塑性力学的方法论也可运用于考虑饱和和因素的最优控制系统设计及求解.

参变量变分原理是塑性力学与接触力学等强非线性问题分析的有力手段, 且已经在塑性力学与接触力学等强非线性工程结构分析中得到了广泛应用^[3,5]. 参变量变分原理的建立旨在解决经典变分原理应用的局限性, 可以处理许多复杂的经典变分原理勉强处理或者根本无法解决的问题. 同时也

使问题的计算方法大为改变, 对于强非线性问题避免了冗长、反复的迭代过程, 也使问题求解的数值稳定性与精度大大提高.

LQ 最优控制问题是最优控制理论中最基本核心的问题之一. 因此, 有关 LQ 最优控制系统设计及数值算法的成果颇丰^[1]. 但大多数工作都限于系统无约束的情况, 对于系统受约束情况, 尤其是控制输入受约束仍然是个值得研究的问题. 文献^[6]将连续系统离散得到差分方程, 用来表示系统状态方程及性能指标, 通过区段混合能合并求解含有控制输入与状态线性等式约束的 LQ 最优控制问题. 文献^[7]进一步将精细积分法引入含有控制输入与状态线性等式约束的 LQ 最优控制问题, 提高控制系统的求解精度. 另外, 从控制理论界的角度来讲, 模型预测控制 (model predictive control, MPC) 在处理多变量约束系统, 尤其是慢变动力系统, 已成为一种被广泛研究的控制策略^[8-12]. 模型预测控制的本质是在离散时间域求解一定区段长度内的约束最优控制问题, 并只采用初始区段端点上的控制输入值, 在下一个递推时间步仍然在一定区段长度内计算约束最优控制问题的解^[8]. 由于在每一个离散区段内采用优化的方法求解最优控制问题加大了在线计算量, 文献^[9]基于模型预测控制理论采用线性规划的方

2010-07-15 收到第 1 稿, 2010-11-12 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10902020, 11072044, 2010CB832704, 2009AA044501), 辽宁省博士启动基金 (20081091), 辽宁省重点实验室 (2009S018) 和中央高校基本科研业务费资助项目.

2) E-mail: qgao@dlut.edu.cn

法得到最优控制问题的显式解. 文献 [10] 对 LQ 控制问题受状态和控制输入约束问题提出了一种显式计算状态反馈解的方法, 避免模型预测控制的大量在线计算工作.

本文针对控制输入受限的 LQ 最优控制以及包含终端状态受约束的终端控制问题, 根据模拟理论思想发展了控制输入受限的 LQ 最优控制问题的参变量变分原理. 在新引入的参变量作用下, 参变量变分原理将控制输入受限的 LQ 最优控制问题转化为相互耦合的 Hamilton 正则方程与线性互补方程. 为求解这组相互耦合的方程组, 通过将连续时间离散成一系列等间距的时间区段, 而后采用二次规划算法求解满足耦合方程组的参变量乘子. 根据确定的参变量乘子信息完成控制输入、协态变量与状态变量的求解过程. 这种基于模拟理论思想而发展的参变量变分原理方法为控制输入受限的 LQ 最优控制问题的求解提出了新思路.

1 控制输入受限的 LQ 最优控制问题描述

本文考虑在连续有限时间域内的 LQ 最优控制问题. 在控制时间给定的情况下, 受控系统的动力学方程采用状态空间描述为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

其中 x_0 是动力系统的初值, 状态变量 $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 控制输入 $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, 系数矩阵分别为 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. LQ 最优控制要求满足线性状态微分方程 (1) 的情况下极小化性能指标式 (2), 即

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

其中 t_f 是给定控制时间, 状态加权矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 控制加权矩阵 $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 末端状态加权矩阵 $S_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 并且假设 Q 和 S_f 是对称非负定矩阵, R 是对称正定矩阵. 本文考虑输入受限的 LQ 最优控制问题, 因此假设控制输入须满足如下约束

$$\underline{u} \leq Cu \leq \bar{u} \quad (3)$$

其中控制输入 u 的上下限分别为 $\bar{u} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 和 $\underline{u} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, 系数矩阵 $C \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

在连续有限时间域内输入受限的 LQ 最优控制问题最终可以由式 (1)~(3) 来描述. 若系统还受如下的终端状态约束

$$x(t_f) = x_f \quad (4)$$

其中 x_f 是系统终端期望状态, 则由式 (1)~(4) 构成连续有限时间域内输入受限的 LQ 最优终端控制问题.

本文以下部分主要针对上述输入受限的 LQ 最优控制式 (1)~(3) 以及输入受限的 LQ 最优终端控制式 (1)~(4), 采用参变量变分原理并提出了数值求解此问题的新方法.

2 控制输入受限的 LQ 最优控制问题的参变量变分原理

参变量变分原理是在现代变分法的基础上发展起来的, 旨在解决经典变分原理应用的局限性. 由于参变量不参加变分, 使得经典变分过程能够得以继续, 通过调整参变量达到满足控制约束的目的 [3].

引入变量 $\bar{\alpha}$ 和 $\underline{\alpha}$ 将带有控制不等式约束问题转换为等式约束问题, 即

$$Cu - \bar{u} + \bar{\alpha} = 0, \quad \bar{\alpha} \geq 0 \quad (5)$$

$$\underline{u} - Cu + \underline{\alpha} = 0, \quad \underline{\alpha} \geq 0 \quad (6)$$

通过引入拉式乘子 λ , 参变量乘子 $\bar{\beta}$ 与 $\underline{\beta}$, 将微分方程 (1) 与等式约束 (5) 和 (6) 引入到性能指标 J , 得到无约束扩展的性能指标为

$$J_A = \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) + \int_0^{t_f} \left[\frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu - \dot{x}) + \bar{\beta}^T (Cu - \bar{u} + \bar{\alpha}) + \underline{\beta}^T (\underline{u} - Cu + \underline{\alpha}) \right] dt \quad (7)$$

根据最优控制的必要条件, 得到控制输入 u 的表达式为

$$u = R^{-1} (-B^T \lambda - C^T \bar{\beta} + C^T \underline{\beta}) \quad (8)$$

根据控制输入 u 的表达式 (8), 以及参变量乘子 $\bar{\beta}$ 和 $\underline{\beta}$ 不参加变分, 则可根据方程 (7) 得到如下的 Hamilton 函数的表达式

$$\bar{H} = \frac{1}{2} (x^T Q x - \lambda^T B R^{-1} B^T \lambda) + \lambda^T A x - \lambda^T B R^{-1} C^T \bar{\beta} + \lambda^T B R^{-1} C^T \underline{\beta} \quad (9)$$

根据参变量变分原理 [3-5], 原问题须满足如下变分原理, 即

$$\delta_{x, \lambda} \int_0^t \bar{H} dt = 0 \quad (10)$$

其中 $\delta_{x,\lambda}$ 表示仅对状态变量 x 和协态变量 λ 变分, 而参变量 $\bar{\beta}$ 和 $\underline{\beta}$ 不参加变分. Hamilton 函数式 (9) 对状态变量 x 和协态变量 λ 求变分得到如下的 Hamilton 正则方程

$$\dot{x} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda} = \bar{A}x - \bar{D}\lambda + f, \quad x(0) = x_0 \quad (11)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = -\bar{B}x - \bar{A}^T \lambda, \quad \lambda(t_f) = S_f x(t_f) \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= A, \quad \bar{B} = Q, \quad \bar{D} = BR^{-1}B^T \\ f &= BR^{-1}C^T(\underline{\beta} - \bar{\beta}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

同时, 原问题还需满足约束方程 (5) 和 (6). 将控制 u 的表达式 (8) 代入式 (5) 和式 (6) 得到

$$\bar{\alpha} + CR^{-1}(-B^T \lambda - C^T \bar{\beta} + C^T \underline{\beta}) - \bar{u} = 0 \quad (14)$$

$$\underline{\alpha} - CR^{-1}(-B^T \lambda - C^T \bar{\beta} + C^T \underline{\beta}) + \underline{u} = 0 \quad (15)$$

根据参变量变分原理^[3-5], 参数二次规划参变量 $\bar{\alpha}$ 和 $\underline{\alpha}$ 及参变量乘子 $\bar{\beta}$ 和 $\underline{\beta}$ 需满足如下约束

$$\bar{\alpha} \geq 0, \quad \bar{\beta} \geq 0, \quad \bar{\alpha}^T \bar{\beta} = 0 \quad (16)$$

$$\underline{\alpha} \geq 0, \quad \underline{\beta} \geq 0, \quad \underline{\alpha}^T \underline{\beta} = 0 \quad (17)$$

因此, 输入受限的 LQ 最优控制问题通过参变量变分原理转换为 Hamilton 正则方程 (11) 和式 (12), 而 Hamilton 正则方程中包含未知参变量乘子 $\bar{\beta}$ 和 $\underline{\beta}$. 所以, 需要通过参数二次规划求解方程 (14)~(17) 所构成的线性互补问题, 以得到参变量乘子 $\bar{\beta}$ 和 $\underline{\beta}$, 它们与 Hamilton 正则方程耦合. 第 3 节通过将连续时间系统离散, 求解离散格式的线性互补问题得到参变量乘子 $\bar{\beta}$ 和 $\underline{\beta}$, 状态变量 x , 协态变量 λ 以及控制输入 u .

3 Hamilton 正则方程及线性互补问题的求解

由于 Hamilton 正则方程式 (11) 和式 (12) 及线性互补方程式 (14)~式 (17) 相互耦合, 直接求解存在困难. 同时, 数值计算时也只需得到离散时间点上的状态、协态变量和控制输入. 因此, 首先将连续时间离散成一系列的等间距区段, 即

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \eta, \dots, \quad t_k = k\eta, \dots, \quad t_N = t_f \quad (18)$$

其中, η 是离散时间区段长度, N 是整个连续时间被离散的区段个数.

将 Hamilton 正则方程式 (11) 和式 (12) 写成如下矩阵形式

$$\dot{v} = Hv + F \quad (19)$$

其中

$$v = \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{D} \\ -\bar{B} & -\bar{A}^T \end{bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

一阶常微分方程 (19) 的解可以采用矩阵指数以及 Duhamel 积分表示为^[13]

$$v(t) = \exp(Ht)v_0 + \int_0^t \exp[H(t-\tau)]F d\tau \quad (21)$$

其中 v_0 是一阶常微分方程 (19) 的初值. 所以, 在离散时间域内若认为任意时间区段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内的非齐次项是常数 $F_k (k=1, 2, \dots, N)$, 则微分方程 (19) 在离散时间点 t_k 上的解 v_k 可以写为

$$v_k = \Phi_k v_0 + \sum_{i=1}^k \Psi_{k-i} F_i \quad (22)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k &= T^k \\ \Psi_k &= T^k \int_0^\eta \exp(H\tau) d\tau \\ T &= \exp(H\eta) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

为了下文表述需要, 将方程 (23) 中的矩阵写为分块形式, 即

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k &= \begin{bmatrix} \Phi_k^{11} & \Phi_k^{12} \\ \Phi_k^{21} & \Phi_k^{22} \end{bmatrix} \\ \Psi_k &= \begin{bmatrix} \Psi_k^{11} & \Psi_k^{12} \\ \Psi_k^{21} & \Psi_k^{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (24)$$

对于方程 (22), 当 $k = N$ 时, 并考虑方程 (13) 中 f 的定义, 可得到初始时刻状态、协态变量 $v_0 = \begin{Bmatrix} x_0^T & \lambda_0^T \end{Bmatrix}^T$ 与终端时刻状态、协态变量 $v_N = \begin{Bmatrix} x_N^T & \lambda_N^T \end{Bmatrix}^T$ 之间的关系, 即

$$x_N = \Phi_N^{11} x_0 + \Phi_N^{12} \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \Psi_{N-k}^{11} BR^{-1}C^T(\underline{\beta}_k - \bar{\beta}_k) \quad (25)$$

$$\lambda_N = \Phi_N^{21} x_0 + \Phi_N^{22} \lambda_0 + \sum_{k=1}^N \Psi_{N-k}^{21} BR^{-1}C^T(\underline{\beta}_k - \bar{\beta}_k) \quad (26)$$

对于 LQ 最优控制问题, 由于协态变量的终端边界条件为 $\lambda(t_f) = S_f x(t_f)$, 则利用方程 (25) 和 (26), 可得到初始协态变量 λ_0 的表达式为

$$\lambda_0 = (S_f \Phi_N^{12} - \Phi_N^{22})^{-1} [(\Phi_N^{21} - S_f \Phi_N^{11})x_0 + \sum_{k=1}^N (\Psi_{N-k}^{21} - S_f \Psi_{N-k}^{11}) B R^{-1} C^T (\beta_k - \bar{\beta}_k)] \quad (27)$$

对于 LQ 最优终端控制问题, 由于状态变量的终端边界条件为 $x(t_f) = x_f$, 则可以根据方程 (25) 得到初始协态变量 λ_0 的表达式为

$$\lambda_0 = (\Phi_N^{12})^{-1} [x_f - \Phi_N^{11} x_0 - \sum_{k=1}^N \Psi_{N-k}^{11} B R^{-1} C^T (\beta_k - \bar{\beta}_k)] \quad (28)$$

由方程 (27) 或 (28) 确定的初始协态变量 λ_0 是参变量乘子 β_k 和 $\bar{\beta}_k$ 的函数, 所以下一步应该根据线性互补条件确定参变量乘子。

根据递推公式 (22), 将所有离散时间点上的协态变量 $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 表示为如下形式

$$\bar{\lambda} = \bar{\Phi}_{21} x_0 + \bar{\Phi}_{22} \lambda_0 + \bar{\Psi}_{21} M_1 (\beta - \tilde{\beta}) \quad (29)$$

其中

$$\bar{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda_1^T & \lambda_2^T & \dots & \lambda_N^T \end{Bmatrix}^T \quad (30)$$

$$\bar{\Phi}_{21} = \begin{bmatrix} (\Phi_1^{21})^T & (\Phi_2^{21})^T & \dots & (\Phi_N^{21})^T \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

$$\bar{\Phi}_{22} = \begin{bmatrix} (\Phi_1^{22})^T & (\Phi_2^{22})^T & \dots & (\Phi_N^{22})^T \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

$$\beta = \begin{Bmatrix} \beta_1^T & \beta_2^T & \dots & \beta_N^T \end{Bmatrix}^T$$

$$\tilde{\beta} = \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1^T & \bar{\beta}_2^T & \dots & \bar{\beta}_N^T \end{Bmatrix}^T \quad (33)$$

$$M_1 = \text{diag}([B R^{-1} C^T, B R^{-1} C^T, \dots, B R^{-1} C^T]) \quad (33)$$

$$\bar{\Psi}_{21} = \begin{bmatrix} \Psi_0^{21} & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_1^{21} & \Psi_0^{21} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \Psi_{N-1}^{21} & \Psi_{N-2}^{21} & \dots & \Psi_0^{21} \end{bmatrix} \quad (34)$$

将初始协态变量 λ_0 的表达式 (27) 或 (28) 代入方程 (29), 即可得到完全由已知变量和未知参变量乘子 $\tilde{\beta}$ 和 β 表示的各个离散时间点上组成的协态变量 $\bar{\lambda}$. 然后, 根据连续时域内的线性互补方程 (14)~(17), 可得到离散时域内的线性互补方程如下

$$\tilde{\alpha} - (M_1^T \bar{\lambda} + M_2 \tilde{\beta} - M_2 \beta + E \bar{u}) = 0 \quad (35)$$

$$\alpha - (-M_1^T \bar{\lambda} - M_2 \tilde{\beta} + M_2 \beta - E \bar{u}) = 0 \quad (36)$$

$$\tilde{\alpha} \geq 0, \quad \tilde{\beta} \geq 0, \quad \tilde{\alpha}^T \tilde{\beta} = 0 \quad (37)$$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha^T \beta = 0 \quad (38)$$

其中

$$\tilde{\alpha} = \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}_1^T & \tilde{\alpha}_2^T & \dots & \tilde{\alpha}_N^T \end{Bmatrix}^T$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_1^T & \alpha_2^T & \dots & \alpha_N^T \end{Bmatrix}^T \quad (39)$$

$$E = \begin{bmatrix} I_p & I_p & \dots & I_p \end{bmatrix}^T, \quad I_p \text{ 为单位矩阵} \quad (40)$$

$$M_2 = \text{diag}([C R^{-1} C^T, C R^{-1} C^T, \dots, C R^{-1} C^T]) \quad (41)$$

离散时域内的线性互补条件式 (35)~(38) 一般采用线性二次规划方法求解, 本文选用最著名的旋转类算法 — Lemke 算法求解此线性互补问题, 所以将线性互补条件式 (35)~(38) 式进一步整理成 Lemke 算法所表示的形式如下

$$Mz + q \geq 0 \quad (42)$$

$$z \geq 0 \quad (43)$$

$$z^T (Mz + q) \geq 0 \quad (44)$$

其中

$$z = \{\tilde{\beta}^T \quad \beta^T\}^T \quad (45)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_2 - M_1^T \bar{\lambda}_2 & M_1^T \bar{\lambda}_2 - M_2 \\ M_1^T \bar{\lambda}_2 - M_2 & M_2 - M_1^T \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$q = \begin{Bmatrix} E \bar{u} + M_1^T \bar{\lambda}_1 \\ -E \bar{u} - M_1^T \bar{\lambda}_1 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

$$\bar{\lambda}_1 = [\bar{\Phi}_{21} + \bar{\Phi}_{22} (S_f \Phi_N^{12} - \Phi_N^{22})^{-1} (\Phi_N^{21} - S_f \Phi_N^{11})] x_0 \quad (48)$$

$$\bar{\lambda}_2 = [\bar{\Phi}_{22} (S_f \Phi_N^{12} - \Phi_N^{22})^{-1} (\Omega_{21} - S_f \Omega_{11}) + \bar{\Psi}_{21}] M_1 \quad (49)$$

$$\Omega_{21} = \begin{bmatrix} \Psi_{N-1}^{21} & \Psi_{N-2}^{21} & \dots & \Psi_0^{21} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = \begin{bmatrix} \Psi_{N-1}^{11} & \Psi_{N-2}^{11} & \dots & \Psi_0^{11} \end{bmatrix} \quad (50)$$

对于输入受限的 LQ 最优终端控制问题, 同样可通过线性互补问题 (42)~(44) 求解, 且系数矩阵形式与式 (45)~(47) 完全相同, 不同之处在方程 (48) 和 (49) 应由如下两个方程替代

$$\bar{\lambda}_1 = [\bar{\Phi}_{21} - \bar{\Phi}_{22}(\Phi_N^{12})^{-1}\Phi_N^{11}]x_0 + \bar{\Phi}_{22}(\Phi_N^{12})^{-1}x_f \quad (51)$$

$$\bar{\lambda}_2 = [\bar{\Psi}_{21} - \bar{\Phi}_{22}(\Phi_N^{12})^{-1}\Omega_{11}]M_1 \quad (52)$$

至此, 无论是对输入受限的 LQ 最优控制还是 LQ 最优终端控制问题, 只需调用成熟的 Lemke 算法求解线性互补问题 (42)~(44), 即可得到所有离散时刻点上的参变量乘子 $\tilde{\beta}$ 和 β .

当计算出参变量乘子 $\tilde{\beta}$ 和 β 后, 还应当确定各个离散时间点上的状态变量、协态变量和各个离散区段内的控制输入. 根据已知的参变量乘子 $\tilde{\beta}$ 和 β , 通过方程 (29) 得到各个离散时间点上的协态变量值 $\bar{\lambda}$. 根据连续时域内的最优控制输入的表达式 (8) 和已知的参变量乘子 $\tilde{\beta}$ 和 β 以及各个离散时间点上的协态变量 $\bar{\lambda}$, 即可得到各个离散区段内的最优控制输入, 即

$$u = R^{-1}(-B^T\bar{\lambda} - C^T\tilde{\beta} + C^T\beta) \quad (53)$$

离散时间点上状态向量的计算类似于离散时间点上协态变量 $\lambda_k(k = 1, 2, \dots, N)$ 的推导过程, 即根据递推方程 (22), 将所有离散时间点上的状态变量 $x_k(k = 1, 2, \dots, N)$ 表示为如下形式

$$\bar{x} = \bar{\Phi}_{11}x_0 + \bar{\Phi}_{12}\lambda_0 + \bar{\Psi}_{11}M_1(\beta - \tilde{\beta}) \quad (54)$$

其中

$$\bar{x} = \left\{ x_1^T \quad x_2^T \quad \dots \quad x_N^T \right\}^T \quad (55)$$

$$\bar{\Phi}_{11} = \left[(\Phi_1^{11})^T \quad (\Phi_2^{11})^T \quad \dots \quad (\Phi_N^{11})^T \right]^T$$

$$\bar{\Phi}_{12} = \left[(\Phi_1^{12})^T \quad (\Phi_2^{12})^T \quad \dots \quad (\Phi_N^{12})^T \right]^T \quad (56)$$

$$\bar{\Psi}_{11} = \begin{bmatrix} \Psi_0^{11} & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_1^{11} & \Psi_0^{11} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \Psi_{N-1}^{11} & \Psi_{N-2}^{11} & \dots & \Psi_0^{11} \end{bmatrix} \quad (57)$$

输入受限的 LQ 最优控制问题与 LQ 最优终端控制问题在状态变量的计算上都具有统一的表达

式 (54), 不同之处体现在初始协态变量 λ_0 的计算公式不同. 根据不同类型的问题, 可以选取方程 (27) 或方程 (28) 计算 λ_0 , 然后完成各个离散时间点上状态变量的计算.

至此, 无论是对输入受限的 LQ 最优控制还是 LQ 最优终端控制问题, 都可以通过参变量变分原理, 将它们转换为 Hamilton 正则方程和线性互补方程. 而通过参数二次规划方法则可以求解线性互补问题, 并得到各个离散区段内的参变量乘子 $\tilde{\beta}$ 和 β , 进一步基于已知的参变量乘子信息, 可计算得到所有离散区段内的状态向量、协态向量以及最优控制输入.

4 数值算例

考虑一个近地轨道航天器交会对接问题^[14], 这是一个最优终端控制问题. 假设地球平均半径为 6378 km, 目标航天器在位于距离地球 390 km 的圆轨道上运行, 追踪航天器在另一椭圆轨道上运行 (轨道半短轴 373 km, 轨道半长轴 500 km, 偏心率 0.0093, 轨道倾角 0.0789). 在交会过程中, 假设目标和追踪航天器都为刚体, 并且只受到地球引力和推力器产生的推力, 不考虑其他引力摄动和干扰的影响. 以目标航天器为坐标原点, 建立追踪航天器相对目标航天器的轨道相对动力学方程, 即 C-W 方程如下

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= a_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y &= a_y \\ \ddot{z} + \omega^2z &= a_z \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

其中 a_x , a_y 和 a_z 分别为追踪航天器沿 x , y 和 z 轴方向所产生的推力加速度, ω 为目标轨道角速度. 将 C-W 方程改写成如式 (1) 所示的状态空间形式, 状态向量 x 由交会相对位置和速度组成, 即

$$x = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T \quad (59)$$

控制输入 u 由 x , y 和 z 轴方向所产生的推力加速度组成, 即

$$u = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \quad (60)$$

系统矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 3\omega^2 & 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

航天器轨道交会要求燃料消耗最少, 因此性能指标选取为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) dt \quad (62)$$

其中 $t_f = 600$ s, 即交会过程要在 10 min 之内完成. 并且追踪航天器沿 x , y 和 z 轴方向所产生的推力加速度受到如下约束

$$\left. \begin{aligned} a_x^{\min} \leq a_x \leq a_x^{\max}, \quad a_y^{\min} \leq a_y \leq a_y^{\max} \\ a_z^{\min} \leq a_z \leq a_z^{\max} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

本文中推力加速度的具体约束范围为

$$\mathbf{u}^{\min} = \begin{bmatrix} a_x^{\min} & a_y^{\min} & a_z^{\min} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.15 & -0.3 & -0.1 \end{bmatrix}^T \quad (64)$$

$$\mathbf{u}^{\max} = \begin{bmatrix} a_x^{\max} & a_y^{\max} & a_z^{\max} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}^T \quad (65)$$

给定交会对接航天器的相对初始条件与期望终端条件分别为

$$x(0) = 30 \text{ km}, \quad y(0) = -15 \text{ km}, \quad z(0) = 7.5 \text{ km} \quad (66)$$

$$\dot{x}(0) = -60 \text{ m/s}, \quad \dot{y}(0) = -15 \text{ m/s}, \quad \dot{z}(0) = -6 \text{ m/s} \quad (67)$$

$$x(t_f) = y(t_f) = z(t_f) = \dot{x}(t_f) = \dot{y}(t_f) = \dot{z}(t_f) = 0 \quad (68)$$

采用本文方法计算此多输入系统受上下限约束的 LQ 最优终端控制问题. 图 1 给出性能指标 J , 也就是燃料消耗随离散区段数目 N 不断增加的变化

情况, 从中可以看出, 当离散的时间区段数 N 按照 $2^k (k = 1, 2, \dots, 10)$ 规律变化时, 性能指标 J 随离散区段数目的增多不断趋于收敛并稳定. 图 2~ 图 4 分别给出控制加速度和交会相对位置以及交会相对速度随时间变化过程, 其中 “○” 表示离散区段数目为 $N = 2^4$ 时, 本文方法计算得到的控制加速度、交会相对位置以及交会相对速度, 而 “—” 表示离散区段数目为 $N = 2^{10}$ 时, 本文方法计算得到的控制加速度、交会相对位置以及交会相对速度. 图 2~ 图 4 表明, 采用离散区段数目 $N = 2^4$ 与 $N = 2^{10}$ 得到的控制加速度、交会相对位置以及交会相对速度的数值结果几乎重合, 这说明在离散区段数目相差 64 倍的大步长情况下, 本文方法仍然能够给出很好的数值结果, 这表明本文方法在大步长下具有较好的精度. 图 2 表明, 本文方法计算得到的控制输入满足事先给定的约束条件, 这说明本文给出的线性互补

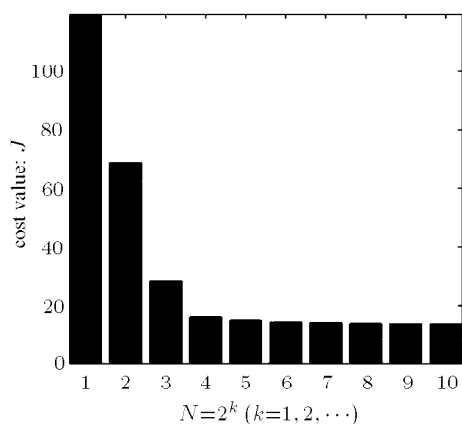


图 1 性能指标随离散区段个数的变化

Fig.1 Cost function values change with the number of intervals

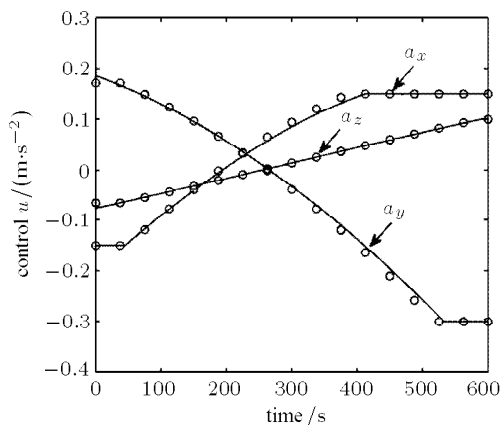


图 2 不同步长下加速度随时间变化

Fig.2 Accelerations change with different steps

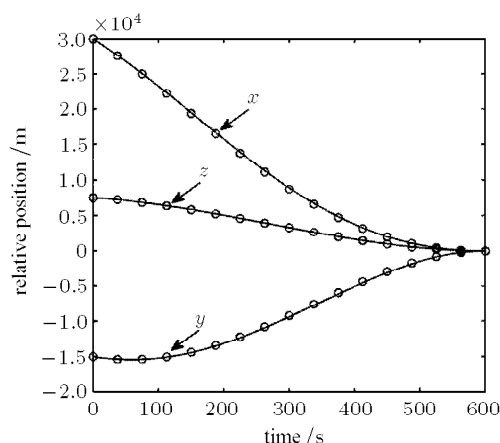


图 3 不同步长下交会位置随时间变化

Fig.3 Rendezvous positions change with different steps

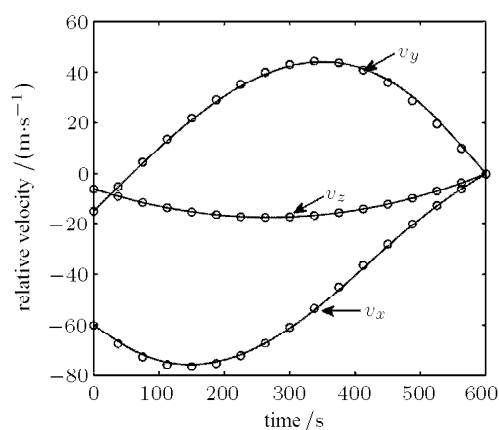


图 4 不同步长下交会速度随时间变化

Fig.4 Rendezvous velocity change with different steps

问题及相应的二次规划求解方法适用于控制受限 LQ 最优控制问题。

5 结 论

针对控制输入受限的 LQ 最优控制问题, 基于模拟理论思想, 将塑性力学和接触力学中的参变量变分原理应用于受约束 LQ 最优控制问题的求解。通过将连续时间离散成一系列等间距区段, 采用二次规划方法数值求解了相互耦合的 Hamilton 正则方程与线性互补方程, 最终得到满足约束的控制输入、状态与协态变量。同时, 数值仿真表明:

(1) 通过本文算法得到的最优控制输入满足事先给定的约束条件, 同时对终端状态约束问题也得到了满足终端约束条件的最优状态轨迹。

(2) 随着离散时间区段数目的增加, 控制输入受限的 LQ 最优控制问题的性能指标逐渐趋于收敛, 并且具有较强的收敛性与收敛速度。

(3) 在较大步长下得到的控制输入和状态轨迹都与小步长下的数值结果吻合, 说明本文算法具有大步长下的高精度特点。

参 考 文 献

- 1 Bryson AE, Ho YC. Applied Optimal Control. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975
- 2 解学书. 最优控制理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 1986 (Xie Xueshu. Optimal Control Theory and Application. Beijing: Tsinghua University Press, 1986 (in Chinese))
- 3 钟万镒, 张洪武, 吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用. 北京: 科学出版社, 1997 (Zhong Wanxie, Zhang Hongwu, Wu Chengwei. Parameter Variational Principle and its Applications in Engineering. Beijing: Beijing Science Press, 1997 (in Chinese))
- 4 钟万镒, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算. 北京: 科学出版社, 2007 (Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Tan Shujun. Theory and Computation of State Space Control Systems. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese))
- 5 张洪武. 参变量变分原理与材料和结构力学分析. 北京: 科学出版社, 2010 (Zhang Hongwu. Parameter Variational Principle for the Mechanical Analysis of Materials and Structures. Beijing: Science Press, 2010 (in Chinese))
- 6 邓子辰. 连续时间线性等式约束 LQ 控制的混合能消元算法. 自动化学报, 1994, 20(5): 600-604 (Deng Zichen. The mixed-energy condensation algorithm for the continuous time and linear equality constraint LQ control problem. *Acta Automatica Sinica*, 1994, 20(5): 600-604 (in Chinese))
- 7 邓子辰, 钟万镒. 连续时间线性约束 LQ 控制问题的时程精细积分方法. 计算力学学报, 2001, 18(3): 312-315 (Deng Zichen, Zhong Wanxie. Time precision integration algorithm for continuous-time and linear constraint LQ control problem. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, 18(3): 312-315 (in Chinese))
- 8 Kojima A, Morari M. LQ control for constrained continuous-time systems. *Automatica*, 2004, 40(7): 1143-1155
- 9 Bemporad A, Borrelli F, Morari M. Model predictive control based on linear programming—the explicit solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(12): 1974-1985
- 10 Bemporad A, Morari M, Dua V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 2002, 38(1): 3-20
- 11 Scokaert POM, Rawlings JB. Constrained linear quadratic regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(8): 1163-1169
- 12 Goebel R, Subbotin M. Continuous time linear quadratic regulator with control constraints via convex duality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 886-892
- 13 彭海军, 高强. 线性非齐次常微分方程两端边值问题精细积分法. 大连理工大学学报, 2010, 50(4): 475-480 (Peng Haijun, Gao Qiang. Precise integration method for two-point

boundary value problems of linear nonhomogeneous ordinary differential equations. *Journal of Dalian University of Technology*, 2010, 50(4): 475-480 (in Chinese))

14 顾大可, 段广仁, 张卯瑞. 有限推力交会的最省燃料轨迹. 宇

航学报, 2010, 31(1): 75-81 (Gu Dake, Duan Guangren, Zhang Maorui. Fuel-optimal trajectories for finite-thrust rendezvous. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(1): 75-81 (in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

PARAMETRIC VARIATIONAL PRINCIPLE AND NUMERICAL ALGORITHM FOR LQ OPTIMAL CONTROL WITH CONSTRAINED CONTROL INPUT¹⁾

Peng Haijun* Gao Qiang*,²⁾ Zhang Hongwu* Wu Zhigang[†] Zhong Wanxie*

*(Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

[†](School of Aeronautics and Astronautics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Based on the theory of analogy, the parametric variational principle derived from plastic mechanics and contact mechanics is developed and applied to the theory of optimal control. New coupled equations of Hamilton canonical equation and linear complementarity equation are established for the problem of LQ optimal control with constrained control input. By dividing the continuous time into a series of equidistant intervals, a new numerical algorithm based on the parametric quadratic programming method for solving the coupled-equations is proposed in the discrete time domain. Numerical simulations show that the algorithm given in this paper is effective for the problem of LQ optimal control with constrained control input and the convergence speed and accuracy of the algorithm is satisfactory.

Key words LQ optimal control, constrained control input, linear complementarity problem, parametric quadratic programming, parametric variational principle

Received 15 July 2010, revised 12 November 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10902020, 11072044, 2010CB832704, 2009AA044501), the Doctoral Fund of Liaoning (20081091), the Key Laboratory of Liaoning (2009S018) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities.

2) E-mail: qgao@dlut.edu.cn