

可解尺度各向同性湍流的标度律¹⁾

马 威^{*,†} 方 乐^{*,†,2)} 邵 亮^{*} 陆利蓬[†]

^{*}(法国里昂中央理工大学流体声学研究室, 里昂 69134, 法国)

[†](北京航空航天大学, 北京 100191)

摘要 针对大涡模拟, 首先利用 EDQNM 能谱和传输谱理论, 在 3 种不同的过滤器下分别计算可解尺度各向同性湍流的二阶、三阶结构函数标度律, 并通过速度差扭率验证了可解尺度湍流的 ESS 理论. 研究了该可解尺度湍流标度律及速度差扭率与多个因素的关系, 这些因素包括: 两点距离与过滤尺度的比、大涡模拟雷诺数和过滤器类型. 结果显示, 当两点距离位于过滤尺度量级时或大涡模拟雷诺数较小时, 可解尺度标度律与未过滤流场的标度律相差很大进而必须加以修正, 而且可解尺度流场也不再总是满足 ESS 理论进而对应的速度差扭率也需要修正. 然后通过 3 个例子介绍了这些结果在大涡模拟亚格子模型中的应用.

关键词 湍流, 标度律, 大涡模拟, 过滤

中图分类号: O357.5+1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)02-0267-10

引 言

在 Kolmogorov 理论 (K41)^[1] 中提出了各向同性湍流的 $2/3$ 标度律. 标度律作为湍流最重要的基础理论之一, 在过去的半个多世纪一直吸引着各种研究. 为了介绍本文研究的背景, 在此介绍关于标度律研究的 3 个主要方向以及相关的重要理论:

(1) 惯性区的标度律一直是研究的热点. K41 理论是从量纲分析得到了二阶结构函数的 $2/3$ 标度律, 随后 Landau 对此标度律提出了质疑, 因而引起对奇异标度律的众多研究. 一般认为奇异标度律由湍流小尺度脉动的间歇性引起, Kolmogorov 和 She 等^[2-3] 根据某些模型提出了各自的修正标度律, 并已经在大量实验和数值计算中得到了验证. 然而由于奇异标度律依赖于高雷诺数假设, 因此在低雷诺数时适应范围较小. 为弥补这一缺陷 Benzi^[4] 的研究组提出了扩展自相似性标度律 (ESS), 认为结构函数的比值是常数, 这一结论较一般的奇异标度律具有更宽的适用范围, 在非常接近耗散尺度时仍然有效, 而且对雷诺数的依赖较弱.

针对奇异标度律, 也有少数学者持否定态度. Qian^[5-6] 通过一系列工作对奇异标度律提出质疑, 认为奇异标度律有可能是有限雷诺数效应的体现, 而在

无穷雷诺数时 K41 理论应当仍然满足. Barenblatt^[7] 通过量纲分析认为 ESS 理论中的相对标度指数不应该是 Benzi 等声称的 0.70 , 而仍应为 $2/3$. 这些争论仍然没有定论, 目前的学术界对奇异标度律和湍流间歇性的研究仍然是主流.

(2) 不论是 K41 理论还是奇异标度律理论都只适用于高雷诺数下的惯性区, 当尺度更小接近耗散尺度, 或者尺度更大接近含能尺度, 这些理论都不再适用. 为了研究惯性区以外的标度律, 通常使用的方法是结合 Kolmogorov 方程和 ESS 理论. ESS 理论在一定程度上能扩展标度律的适用范围, 但它的适用范围有限, 当研究耗散区和惯性区之间的过渡时仍然需要对扭率提出模型^[8]. 如果除去这一过渡区而分别对耗散区和惯性区建立微分方程则可以分别得到标度律的级数形式^[9].

但是, 标度指数从耗散区到惯性区的过渡特征仍没有很好的理论结果, 目前最精确的结果仍是 Batchelor^[10] 于 1951 年提出的半经验插值公式. 尽管这一公式是通过插值得出, 但和实验、理论结果都吻合得很好^[9,11-12]. 而对于标度指数从惯性区到含能区的过渡特征, 目前仍然没有足够的研究结果.

(3) 除此以外, 也有人研究在壁湍流等较复杂流动状况下的标度律, 如文献 [13-14]. 由于本文只讨

2010-02-02 收到第 1 稿, 2010-05-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10828204) 和北京航空航天大学 SJP 111 (B08009) 资助项目.

2) E-mail: le.fang@ec-lyon.fr

论各向同性湍流, 因此这些研究不在本文讨论范围内, 在此不赘述.

随着数值计算的发展, 大涡模拟 (LES) 方法已经在工程中得到了广泛的应用. 为了发展大涡模拟方法, 需要研究符合物理特性的亚格子模型, 在建模过程中, 标度律是描述湍流多尺度特性的一个重要工具^[15-16]. 需要注意到, 在大涡模拟中由于仅仅知道可解尺度湍流的信息, 因此无法使用全尺度标度律而必须研究可解尺度湍流的标度律.

以上已经介绍了非常丰富的标度律研究, 但是都缺乏对过滤后的可解尺度湍流标度律的分析, 以致在以往的亚格子建模中标度律总是被模糊使用. 例如: 在 Cui 等^[15]提出的 CZZS 模型中直接采用全尺度的标度律来用于可解尺度湍流, 本文将指出这一做法具有非常大的误差; Fang 等^[16]在提出 IVI 模型的过程中对可解尺度标度律做了尺度量级分析, 但仍然缺少定量的结果.

基于这一现状, 有必要对可解尺度湍流的标度律做一个较完整的修正工作, 这一工作将为大涡模拟提供一个更加可信的工具. 该修正主要与 3 个因素有关. 首先是两点距离和过滤尺度的比. 其次, 在标度律表达式中引入大涡模拟雷诺数, 这就意味着亚格子模型中将显含有限雷诺数效应, 因而能较正确地模拟有限雷诺数的流动. 最后, 考虑不同的过滤器对可解尺度标度律的影响. Berland 等^[17]通过 EDQNM 理论发现不同的过滤器会很大程度上影响亚格子应力, 但对可解尺度标度律目前仍然缺乏研究.

当今学术界对是否存在奇异标度律仍然有争议, 因此在这里强调, 本文的重点并不在于探讨奇异标度律是否正确, 而是首先假定已经可以对全尺度的湍流得到了正确的标度律 (比如通过 EDQNM 理论得到), 该标度律在惯性区或者满足 K41 标度律, 或者满足奇异标度律. 然后, 进一步研究由于大涡模拟的过滤操作带来的影响 (如: 惯性区大小的改变; 标度律与过滤尺度、大涡模拟雷诺数和过滤器类型的关系) 以及相应的修正. 最后介绍该修正标度律在大涡模拟建模中的应用.

1 基本概念

在正式分析之前, 需要简单介绍一些基本概念. 首先介绍大涡模拟中的过滤操作并定义 3 种过滤器, 然后分别介绍全尺度和可解尺度的结构函数, 最后介绍描述结构函数之间关系的全尺度和可解尺

度柯氏方程.

1.1 过滤

过滤是大涡模拟方法的核心, 以下将从傅立叶谱空间定义 3 种常见的过滤器. 对任意场函数 $f(\mathbf{k})$, 可以用过滤核 $G(k)$ 来表达过滤操作

$$f^<(\mathbf{k}) = \int G(|\mathbf{k}|) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1)$$

用 k_c 表示谱空间的过滤特征波数 (对应于物理空间的过滤尺度 $\Delta = \pi/k_c$), 并设 $\xi = \pi k/2k_c$, 谱截断 (cutoff) 过滤器表示为

$$G(k) = \begin{cases} 1, & k \leq k_c \\ 0, & k > k_c \end{cases} \quad (2)$$

平顶帽 (tophat) 过滤器表示为

$$G(k) = 3 [\sin(\xi) - \xi \cos(\xi)] / \xi^3 \quad (3)$$

高斯 (Gauss) 过滤器表示为

$$G(k) = \exp(-\xi^2/24) \quad (4)$$

1.2 结构函数

定义 m 阶纵向结构函数为

$$D_l^m(r) = \langle (u(x_1 + r) - u(x_1))^m \rangle \quad (5)$$

其中 r 是两点距离, u 是 x_1 方向上的速度分量, $\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均. 特别地, 二阶和三阶结构函数可分别记做

$$D_{II}(r) = \langle (u(x_1 + r) - u(x_1))^2 \rangle \quad (6)$$

$$D_{III}(r) = \langle (u(x_1 + r) - u(x_1))^3 \rangle \quad (7)$$

二阶结构函数和能谱 $E(k)$ 的转换公式为^[6]

$$D_{II}(r) = 4 \int_0^\infty E(k) \left(\frac{1}{3} + \frac{\cos(kr)}{(kr)^2} - \frac{\sin(kr)}{(kr)^3} \right) dk \quad (8)$$

相应的反变换公式可写为

$$E(k) = \frac{1}{2\pi k^2} \int_0^\infty (3r D_{II}(r) + r^2 D'_{II}(r)) \cos(kr) dr \quad (9)$$

其中上标 ' 表示对 r 求导.

三阶结构函数和传输谱 $T(k)$ 的转换公式为^[5] (注意 Qian 原文中的式 (2) 缺少一个系数 r)

$$D_{III}(r) = 12r \int_0^\infty T(k) \left[-\frac{\sin(kr)}{(kr)^3} - \frac{3 \cos(kr)}{(kr)^4} + \frac{3 \sin(kr)}{(kr)^5} \right] dk \quad (10)$$

相应的反变换公式可写为

$$T(k) = -\frac{1}{6\pi k^2} \int_0^\infty \left(\frac{(r^3 D_{III}(r))'' + (r^2 D_{III}(r))'}{r} \right)' \cos(kr) dr \quad (11)$$

式 (9) 和式 (11) 的推导过程见附录 A.

以二阶结构函数为例, 标度指数定义如下

$$n(2) = \frac{dD_{II}(r)}{dr} \frac{r}{D_{II}(r)} \quad (12)$$

在大涡模拟中, 相应的定义可解尺度的结构函数

$$D_{II}^<(r) = \langle (u^<(x_1 + r) - u^<(x_1))^2 \rangle \quad (13)$$

$$D_{III}^<(r) = \langle (u^<(x_1 + r) - u^<(x_1))^3 \rangle \quad (14)$$

它们和可解尺度能谱 $E^<(k)$, 可解尺度传输谱 $T^<(k)$ 的转换公式可以根据式 (8)~(11) 类似地写出. 标度指数的定义也与式 (12) 相同.

1.3 柯氏方程

Kolmogorov 首先导出了描述二阶和三阶结构函数关系的方程, 即全尺度的柯氏方程

$$D_{III}(r) = 6\nu \frac{dD_{II}(r)}{dr} - \frac{4}{5}\varepsilon r \quad (15)$$

其中, ν 是流体黏性, $\varepsilon = 2\nu \langle S_{ij}S_{ij} \rangle$ 是全尺度耗散, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 是剪切率张量.

对可解尺度湍流, 可以得到如下的可解尺度柯氏方程^[18-19]

$$D_{III}^<(r) = 6T_{l,II}(r) - \frac{4}{5}\varepsilon_f r + 6\nu \frac{\partial D_{II}^<(r)}{\partial r} - \frac{4}{5}\varepsilon^< r \quad (16)$$

其中, $\tau_{ij}^< = (u_i u_j)^< - u_i^< u_j^<$ 是亚格子应力, $\varepsilon_f = -\langle \tau_{ij}^< S_{ij}^< \rangle$ 是亚格子耗散, $\varepsilon^< = 2\nu \langle S_{ij}^< S_{ij}^< \rangle$ 是可解尺度耗散, 而 $T_{l,II} = \langle u_1^<(x_1) \tau_{11}^<(x_1 + r) \rangle$ 是可解尺度速度和亚格子应力之间的两点相关, 对应于谱空间非局部的能量传输.

当雷诺数很高时, 可忽略黏性项, 式 (16) 简化为

$$D_{III}^<(r) = 6T_{l,II}(r) - \frac{4}{5}\varepsilon_f r \quad (17)$$

2 可解尺度湍流的能谱和传输谱

由于可解尺度三阶结构函数无法通过全尺度三阶结构函数简单得到, 而只能通过能谱和传输谱模

型, 所以必须通过式 (8) 和式 (10), 才能从可解尺度能谱和传输谱同时得到可解尺度的二阶和三阶结构函数. 现有的能谱解析模型中, 被使用较多的有 Pope 的模型谱^[20] 和 Pao 的模型谱^[21], 但它们都没有相应的传输谱模型. DIA^[22] 和 TFM^[23] 等统计模型都可以得到能谱和传输谱, 但在物理性质上也都有所缺陷. 目前公认最精确的模型是通过湍流阻尼马尔可夫化准正则近似 (EDQNM)^[24-25] 得到的. EDQNM 的核心是认为四阶谱张量是二阶谱张量的函数从而构造谱空间封闭模型, 给定初始能谱即可计算出该能谱随时间的演化和相应的传输谱演化. 由于 EDQNM 理论的精确性, 本文将它作为主要的研究手段.

全尺度的能谱 $E(k)$ 在过滤核 $G(k)$ 的作用下可以得到可解尺度能谱

$$E^<(k) = G^2(k)E(k) \quad (18)$$

可解尺度传输谱的表达式则比较复杂. 将 $T(k)$ 写成三波作用的形式 $T(k) = \iint T(k, p, q) dp dq$, 在 EDQNM 理论中它是能谱的函数

$$T(k, p, q) = \theta_{kpq} \frac{k}{pq} b(k, p, q) E(q) \cdot [k^2 E(p) - p^2 E(k)] \quad (19)$$

其中 θ_{kpq} 和 b 均是波数 k, p, q 的函数. 在过滤核 $G(k)$ 的作用下应有

$$T^<(k, p, q) = \theta_{kpq} \frac{k}{pq} b(k, p, q) G^2(q) E(q) \cdot [k^2 G^2(p) E(p) - p^2 G^2(k) E(k)] \quad (20)$$

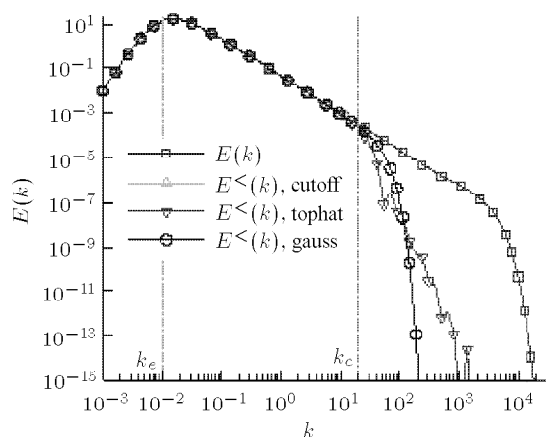
而可解尺度的传输谱为

$$T^<(k) = \iint T^<(k, p, q) dp dq \quad (21)$$

图 1 是雷诺数 $Re_\lambda \approx 33000$ 时的 EDQNM 结果. 过滤波数 k_c 位于惯性子区. 从能谱上看, 只有 cutoff 过滤器在谱空间是“干净的”截断, 而其他过滤器在高波数区均有泄漏. 从能谱形状上看, 可以近似认为过滤后的能谱和原能谱具有相似性, 而过滤器的作用近似于将耗散波数减小到过滤波数. 因此在大涡模拟中, 在可解尺度可以类似定义“大涡模拟”雷诺数^[21]

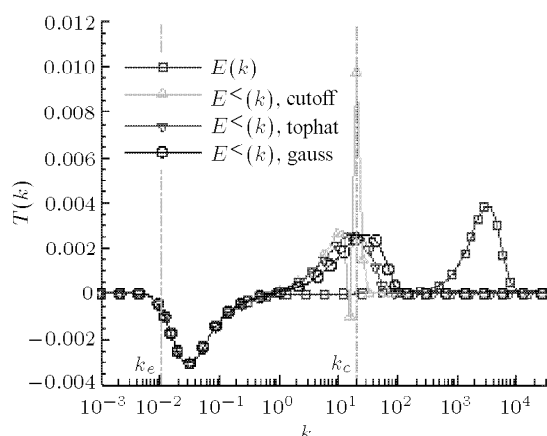
$$Re_\Delta = \frac{1}{\sqrt{15}} \left(\frac{k_c}{k_e} \right)^{2/3} \quad (22)$$

其中 k_e 是含能波数, 在该算例中 $k_e = 0.01$. Re_Δ 是大涡模拟的重要参数, 但由于现有的亚格子模型几乎都基于无限雷诺数的理想情形, 使得 Re_Δ 的作用无法显式体现在模型中^[26]. 本文将尝试将 Re_Δ 的作用引入现有的亚格子模型.



(a) 能谱

(a) Energy spectrum



(b) 传输谱

(b) Transfer spectrum

图 1 未过滤和过滤后的能谱、传输谱. 过滤波数 $k_c = 20$. 对应的雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 大涡模拟雷诺数 $Re_\Delta \approx 41$

Fig.1 Non-filtered and filtered spectra. Filter wave number $k_c = 20$. Corresponding Reynolds number $Re_\lambda \approx 33\,000$. LES Reynolds number $Re_\Delta \approx 41$

从传输谱上看, 在 k_c 附近 $T(k) \approx 0$, 意味着过滤波数位于惯性区. 但引入过滤器后, 由于能量传输的非线性特性, 可解尺度传输谱并不是全尺度传输谱的截断. 本应在耗散尺度上消耗掉的能量因为过滤器的影响而堆积在过滤尺度附近. 另外, cutoff

过滤器对应的可解尺度传输谱在 k_c 附近有明显的间断, 这是由于能谱在该点的高梯度引起的.

在无限雷诺数时, 若含能波数趋于 0, 另一个可以获得能谱和传输谱的方法是利用 Batchelor 的公式^[10] 得到全尺度结构函数, 并利用式 (9) 和 (11) 转换为全尺度能谱和传输谱. 全尺度能谱可以通过简单过滤得到可解尺度能谱, 但从全尺度传输谱无法简单得到可解尺度传输谱 (必须引入三波作用 $T(k, p, q)$). 所以相比可见利用 EDQNM 理论来研究可解尺度标度律是更合适的.

3 可解尺度湍流的标度律

在上节中已经利用 EDQNM 理论得到了可解尺度湍流的能谱和传输谱. 接下来根据式 (8) 和式 (10) 可以得到相应的可解尺度结构函数, 并根据标度律的定义 (12) 即可计算出可解尺度湍流的标度指数. 首先研究固定雷诺数 Re_λ 和过滤波数 k_c 时, 标度律随两点距离 r 的变化; 接着针对亚格子模型, 固定两点距离 r 而观察标度律随大涡模拟雷诺数 Re_Δ 的变化.

当雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 过滤波数 $k_c = 20$ 时, 标度指数随 r/Δ 的变化如图 2 所示. 此算例对应的含能尺度约为 1500Δ , 而过滤尺度位于惯性区, 所以当 $1 \leq r/\Delta \ll 1500$ 时可认为两点距离 r 位于惯性区. 当没有过滤时 (non-filtered 曲线), 二阶结构函数标度指数在惯性区几乎等于理论值 $2/3$, 但也有微小的不同. 此差异可解释为湍流间歇性引起的奇异标度^[2], 也可通过柯氏方程引入雷诺数参数来解释^[9], 本文在此不深入讨论. 类似的可以看到, 未过滤的三阶结构函数标度指数在惯性区几乎等于理论值 1.

有过滤器作用时, 可解尺度湍流的标度指数则有所不同. 尽管在大尺度 (含能尺度的量级) 趋势仍然相同, 但在较小尺度, 尤其是 $r/\Delta < 10$ 时, 即使这里是惯性区, 标度指数也严重偏离惯性区的理论值. 这一现象是由过滤器引起的, 而且不同的过滤器引起的偏差也有所不同. 二阶结构函数在 $r = \Delta$ 时用 cutoff 过滤器得到的可解尺度标度指数约为 1.79, 而用 tophat 和 gauss 过滤器得到的值分别约为 1.51 和 1.24. 这些数值与理论值 $2/3$ 均有很大的差别. 三阶结构函数在 $r = \Delta$ 时用 cutoff 过滤器得到的可解尺度标度指数约为 2.47, 与 Fang^[16] 在他的亚格子模型中建议的值 2.5 吻合, 而用 tophat 和 gauss 过滤器得到的值分别约为 2.03 和 1.65.

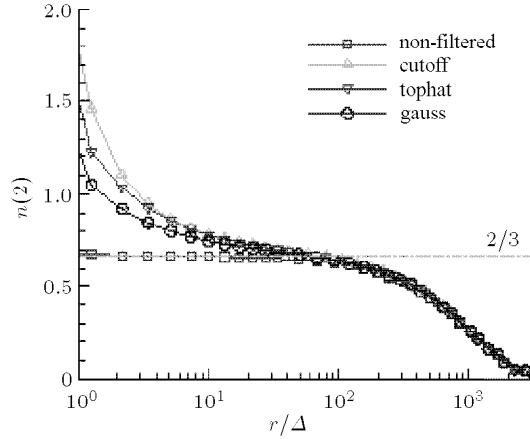
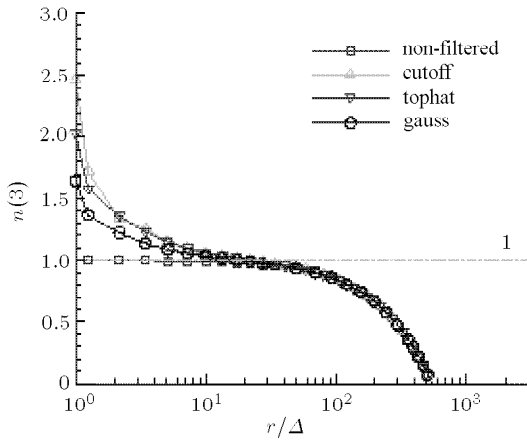
(a) 二阶结构函数标度指数 $n(2)$ (a) Scaling exponent of second-order structure function $n(2)$ (b) 三阶结构函数标度指数 $n(3)$ (b) Scaling exponent of third-order structure function $n(3)$

图 2 根据 EDQNM 能谱和传输谱计算得到的结构函数标度指数. 过滤波数 $k_c = 20$. 对应的雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 大涡模拟雷诺数 $Re_\Delta \approx 41$

Fig.2 Scaling exponents from EDQNM theory. Filter wave number $k_c = 20$. Corresponding Reynolds number $Re_\lambda \approx 33\,000$. LES Reynolds number $Re_\Delta \approx 41$

当雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 两点距离 $r = \Delta$ 时, 标度指数随大涡模拟雷诺数 Re_Δ 的变化 (也即随过滤波数 k_c 的变化) 如图 3 所示. 另外, 由于大涡模拟中也经常用到 $r = 2\Delta$, 因此将 $r = 2\Delta$ 的情形绘在图 4 中. 可以观察到 $10 < Re_\Delta < 70$ 时, 标度指数变化不大. 当 Re_Δ 很大时 Δ 和 r 都位于耗散区, 由于过滤器的作用标度指数变化规律较复杂, 且不同于全尺度湍流的标度律 (注意到尽管随截断波数增大, 可解尺度标度指数是趋于全尺度标度指数的, 但对递减的两点距离 $r = \Delta$ 或 $r = 2\Delta$ 并不满足这一趋势). 因为大涡模拟中过滤尺度不可能位于耗散

区, 而且由于计算代价问题大涡模拟雷诺数一般不可能很大 (比如 $Re_\Delta = 70$ 时至少需要 256^3 的计算网格, 开销非常大), 所以对大涡模拟雷诺数很大的情形本文不讨论. 另一方面, 当 $Re_\Delta < 10$ 时可观察到标度指数随大涡模拟雷诺数是递增的, 在此区域内应当进行标度律的修正. 为了进一步对大涡模拟雷诺数有直观概念, 下面举例说明: 假设某大涡模拟算例用 48^3 网格计算均匀各向同性湍流, 由于含能尺度不应当大于计算域尺寸, 因此含能尺度与过滤尺度的比最多为 48, 利用式 (22) 即可算出对应的大涡模拟雷诺数只有约 3.4. 由图 3 和图 4 可观察到此时的标度指数与大涡模拟雷诺数有关, 因此用大涡模拟雷诺数进行修正是必要的.

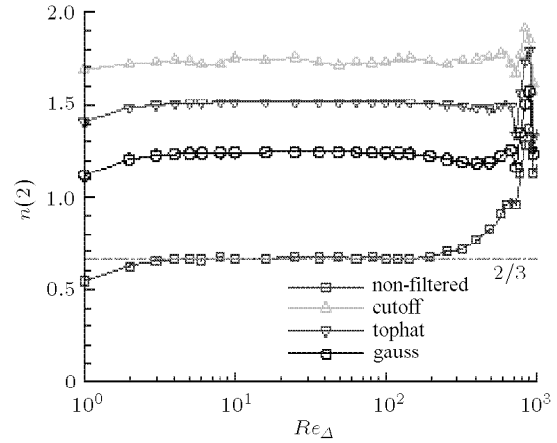
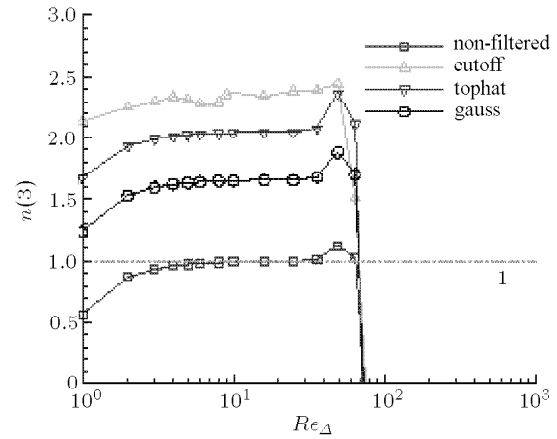
(a) 二阶结构函数标度指数 $n(2)$ (a) Scaling exponent of second-order structure function $n(2)$ (b) 三阶结构函数标度指数 $n(3)$ (b) Scaling exponent of third-order structure function $n(3)$

图 3 根据 EDQNM 能谱和传输谱计算得到的结构函数标度指数. 雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 两点距离 $r = \Delta = \pi/k_c$

Fig.3 Scaling exponents from EDQNM theory. Reynolds number $Re_\lambda \approx 33\,000$. Two-point distance $r = \Delta = \pi/k_c$

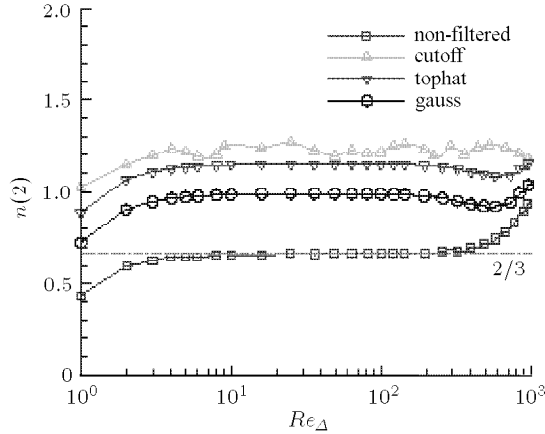
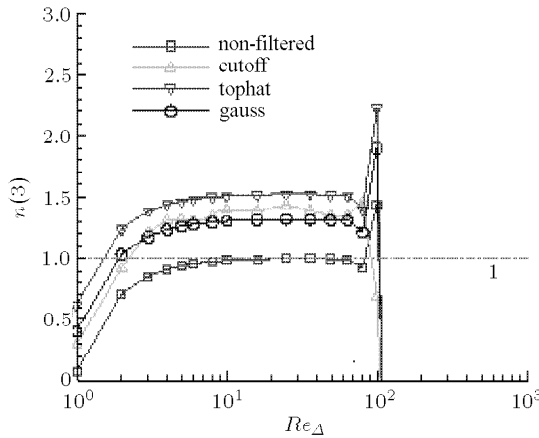
(a) 二阶结构函数标度指数 $n(2)$ (a) Scaling exponent of second-order structure function $n(2)$ (b) 三阶结构函数标度指数 $n(3)$ (b) Scaling exponent of third-order structure function $n(3)$

图 4 根据 EDQNM 能谱和传输谱计算得到的结构函数标度指数.

雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 两点距离 $r = 2\Delta = 2\pi/k_c$

Fig.4 Scaling exponents from EDQNM theory. Reynolds

number $Re_\lambda \approx 33\,000$. Two-point distance $r = 2\Delta = 2\pi/k_c$

在简化情形下, 为了提供同时考虑两点距离 r 和大涡模拟雷诺数 Re_Δ 时的可解尺度标度指数的解析表达式, 下面根据一个简单的能谱解析模型来得到二阶结构函数标度律的解析式. 设含能波数为 k_e , 过滤波数为 k_c , 采用 cutoff 过滤器, 建立如下能谱模型

$$E^<(k) = \begin{cases} Ak^{-5/3}, & k_e < k < k_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

该模型如图 5 所示.

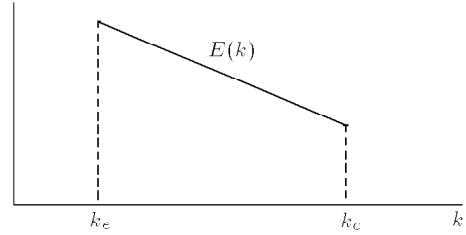


图 5 能谱模型示意图

Fig.5 Sketch of energy spectrum model

根据式 (8) 和式 (12), 二阶结构函数标度指数可写作

$$n(2) = \frac{3 \int_{x_e}^{x_c} x^{-5/3} \left(-\frac{\sin(x)}{3x} - \frac{\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x^3} \right) dx}{\int_{x_e}^{x_c} x^{-5/3} \left(\frac{1}{3} + \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right) dx} \quad (24)$$

其中 $x_e = k_e r$, $x_c = k_c r$. 将能谱模型 (23) 代入并经过推导, 得到

$$n(2) = \frac{\mathcal{F}(x_c) - \mathcal{F}(x_e)}{\mathcal{H}(x_c) - \mathcal{H}(x_e)} \quad (25)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= -\frac{9}{11} \frac{\sin(x)}{x^{11/3}} + \frac{9}{11} \frac{\cos(x)}{x^{8/3}} + \frac{6}{55} \frac{\sin(x)}{x^{5/3}} + \\ &\quad \frac{9}{55} \frac{\cos(x)}{x^{2/3}} - \frac{9}{220} \mathcal{T}(x) \\ \mathcal{H}(x) &= -\frac{1}{2x^{2/3}} + \frac{3}{11} \frac{\sin(x)}{x^{11/3}} - \frac{3}{11} \frac{\cos(x)}{x^{8/3}} + \\ &\quad \frac{9}{55} \frac{\sin(x)}{x^{5/3}} + \frac{27}{110} \frac{\cos(x)}{x^{2/3}} - \frac{27}{440} \mathcal{T}(x) \\ \mathcal{T}(x) &= (1 + i\sqrt{3})\Gamma(1/3, ix) + \\ &\quad (1 - i\sqrt{3})\Gamma(1/3, -ix) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中, i 是虚数单位, $\Gamma(s, x)$ 是不完全伽玛函数

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

在大涡模拟中经常取两点距离 r 为整数倍过滤尺度, 即 $r/\Delta = m$, $x = \pi r/\Delta = m\pi$, $m \in \mathbb{N}^*$. 若进一步假定雷诺数为无穷, 即 $k_e = 0$, 则函数 $\mathcal{F}(x)$ 和 $\mathcal{H}(x)$ 可简化为

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \frac{9}{11} \frac{(-1)^m}{(m\pi)^{8/3}} + \frac{9}{55} \frac{(-1)^m}{(m\pi)^{2/3}} - \\ &\quad \frac{9}{110} \mathcal{T}(m\pi) \\ \mathcal{H}(x) &= \frac{27}{110} \frac{(-1)^m}{(m\pi)^{2/3}} - \frac{1}{2(m\pi)^{5/3}} - \\ &\quad \frac{3}{11} \frac{(-1)^m}{(m\pi)^{8/3}} - \frac{27}{220} \mathcal{T}(m\pi) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

相应的标度指数如表 1 所示. 为了进一步验证结果的正确性, 利用 John-Hopkins 大学公布的直接数值模拟 (DNS) 湍流数据库^[27] 中对某个时间步 ($t = 2.09$) 的速度场进行过滤得到可解尺度速度场. 原流场雷诺数 $Re_\lambda = 420$, 取位于惯性区的过滤尺度 $k_c = 16$, 采用谱截断过滤器进行过滤. 改变两点距离 r 所得到的标度指数与表 1 模型值的对比如图 6 所示. r 较大时由于含能尺度的影响结果与模型值有偏差, 但实际大涡模拟一般均采用较小的两点距离 (不超过 3 倍网格尺度), 此时 DNS 的结果与模型值吻合很好. 这意味着实际大涡模拟建模中当精度要求不高时, 可以采用表 1 的数据作为参考值.

表 1 根据模型 (25) 计算得到的标度指数 ($k_e = 0$)

Table 1 Scaling exponent from Eq.(25) ($k_e = 0$)

r/Δ	1	2	3	4	5
$n(2)$	1.742 7	1.246 7	0.999 6	0.932 7	0.877 5
r/Δ	6	7	8	9	10
$n(2)$	0.850 5	0.825 9	0.811 0	0.796 8	0.787 2

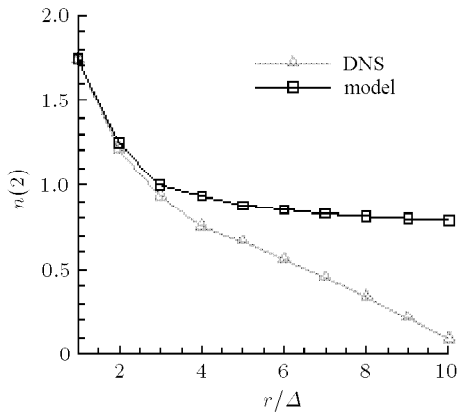


图 6 模型与 DNS 结果比较

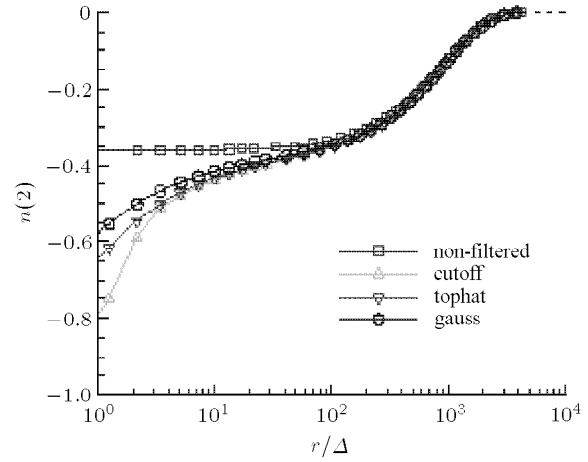
Fig.6 Comparison between model and DNS results

4 可解尺度湍流的 ESS 理论验证

在以上工作中, 根据模型谱 (EDQNM 模型或者简单能谱模型) 得到了可解尺度的结构函数及其标度律. 由于在结构函数的应用中, 某些时候不使用绝对标度指数而使用相对标度律^[15,28], 因而本节在可解尺度范围内对相对标度律 (ESS) 进行验证. 相对标度指数通过速度差的扭率来定义

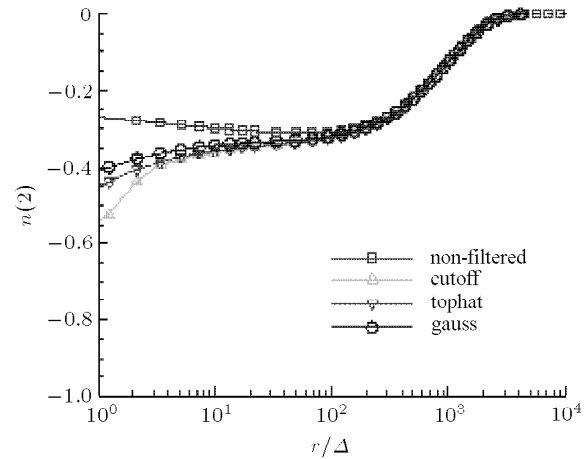
$$\left. \begin{aligned} S_k(r) &= \frac{D_{III}(r)}{(D_{II}(r))^{3/2}} \\ S_k^<(r) &= \frac{D_{III}^<(r)}{(D_{II}^<(r))^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

对未过滤的流场, ESS 理论认为扭率在相当大的范围内是常数, 即 $S_k(r) = \text{constant}$. 但这一理论是否能扩展到可解尺度扭率 $S_k^<(r)$ 尚需研究. 在这里只需研究固定大涡模拟雷诺数 Re_Δ 时扭率随两点距离 r 的变化. 与第 3 节的做法类似, 采用 EDQNM 理论生成模型谱, 当雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 过滤波数 $k_c = 20$ 时, 速度差扭率随 r/Δ 的变化如图 7(a) 所示. 当速度场未过滤时, 在惯性区 $1 < r/\Delta < 100$ 的



(a) 不考虑间歇性

(a) Intermittency is not considered



(b) 考虑间歇性

(b) Intermittency is considered

图 7 根据 EDQNM 能谱和传输谱计算得到的速度差扭率. 过滤波数 $k_c = 20$. 对应的雷诺数 $Re_\lambda \approx 33\,000$, 大涡模拟雷诺数 $Re_\Delta \approx 41$

Fig.7 Skewness of velocity increment from EDQNM theory. Filter wave number $k_c = 20$. Corresponding Reynolds number $Re_\lambda \approx 33\,000$. LES Reynolds number $Re_\Delta \approx 41$

扭率几乎是常数. 但过滤后, 在过滤尺度附近 ($r/\Delta \sim 1$) 扭率不再是常数, 仅在很小的范围内 $r/\Delta \approx 100$ 与全尺度扭率相近. 因此可以看出, 对可解尺度湍流, ESS 理论的适用范围也随之缩小, 在亚格子模型中的扭率也应当需要修正.

当考虑间歇性时, ESS 理论可描述为 $D_{II}(r) \propto D_{III}(r)^{\zeta(2)}$, 其中 $\zeta(2)$ 约为 0.7. 类似地, 可以定义“间歇”速度差扭率

$$\left. \begin{aligned} S_k^i(r) &= \frac{D_{III}(r)}{(D_{II}(r))^{1/\zeta(2)}} \\ S_k^{i<}(r) &= \frac{D_{III}^<(r)}{(D_{II}^<(r))^{1/\zeta(2)}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

同样算例计算得到的扭率值如图 7(b) 所示. 可以观察到未过滤的速度场扭率不再是常数, 但过滤后存在一段范围 ($10 < r/\Delta < 100$) 扭率近似是常数. 这一结果符合支持 K41 理论的学者的一派观点^[6-7], 他们认为奇异标度律 (包括绝对的和相对的) 是有限雷诺数效应的结果而并非湍流本身的性质 (对应本文的例子, 有限雷诺数体现在未过滤的流场雷诺数非常大而过滤后的流场对应的大涡模拟雷诺数很小). 由于 EDQNM 理论提供的能谱也有待验证, 所以本文对此观点仅作参考.

5 可解尺度湍流标度律在大涡模拟中的应用

研究可解尺度湍流标度律的目的是为了给大涡模拟亚格子模型提供更精确的工具. 在本节通过一些例子说明可解尺度湍流标度律的用途.

CZZS 模型 CZZS 亚格子模型^[15] 是从可解尺度的柯氏方程出发而得到, 其中的非线性传输项在引入涡黏假设后写为二阶结构函数的导数形式, 进一步简化需要利用可解尺度二阶结构函数的标度律. 在原论文中假设标度指数为 2/3 而得到了简化模型, 但在本文已经看到 r/Δ 和 Re_Δ 都对标度指数有影响, 因而修正的 CZZS 模型可以写为

$$\nu_t = \frac{-5D_{III}^<(r)}{8\langle S_{ij}^<S_{ij}^<\rangle r - 30n(2)D_{II}^<(r)/r} \quad (30)$$

其中, ν_t 是涡黏系数, $n(2)$ 是 r/Δ 和 Re_Δ 的函数, 可以用解析模型 (25) 来计算, 也可以从图 2(a), 图 3(a) 或图 4(a) 中获得. 例如对 48^3 网格数算例, 采用 gauss 过滤器, 当 $r = \Delta$ 时约有 $Re_\Delta = 3.4$, 根据图 3 查得 $n(2) \approx 1.22$.

CZZS 模型的另一个简化形式采用了速度差扭

率. 该简化模型可以写为

$$\nu_t = -\frac{S_k}{8} r \sqrt{D_{II}^<(r)} \quad (31)$$

其中 S_k 是可解尺度的速度差扭率, 可以从图 7 中查出. 如采用 gauss 过滤器, 当 $r = \Delta$ 时应有 $S_k \approx -0.58$.

IVI 模型 IVI 模型^[16] 是一个新提出的亚格子模型, 它不是基于涡黏假设而是基于 Brun 等提出的速度差假设, 因而在亚格子模型的表达形式里面出现了三阶结构函数. 模型的动态形式为

$$C_f = \frac{2D_{III}^<(r)}{4(n(3) - 1)D_{II}^<(r) - D_{II}^<(2r)} \quad (32)$$

其中 C_f 是模型系数. 在槽道湍流中 Fang 根据 DNS 数据计算得到 $r = \Delta$ 时 $n(3)$ 约为 2.5, 与本文的结果一致. 通过本文图 2(b), 图 3(b) 和图 4(b) 可以根据两点距离和大涡模拟雷诺数对此数值进行修正.

Pumir 的 SPH 模型 Pumir 和 Shraiman 在光滑粒子动力学 (SPH) 的大涡模拟中提出一种时间可逆的涡黏模型^[29], 其中关键的一步求解过程利用了可解尺度二阶结构函数的标度律, 但作者仍然使用 2/3 标度律而未加修正. 与在 CZZS 模型中的情形类似, 该 SPH 大涡模拟模型也应当根据两点距离和大涡模拟雷诺数进行修正.

6 总 结

本文利用较成熟的 EDQNM 能谱和传输谱理论, 分别引入 3 种不同的过滤器, 计算可解尺度各向同性湍流的二阶、三阶结构函数标度律, 并通过速度差扭率验证了可解尺度湍流的 ESS 理论. 研究了该可解尺度湍流标度律及速度差扭率与多个因素的关系, 这些因素包括:

(1) 两点距离与过滤尺度的比 r/Δ . 相对于经典标度律中两点距离与耗散尺度的比 r/η , 过滤器的作用相当于把耗散尺度增大到过滤尺度, 因而使得根据标度律观察到的惯性区变窄 (图 2 和图 7). 对于标度指数和速度差扭率都有类似的结论, 这意味着在大涡模拟模型中不论使用标度律还是 ESS 理论都应当进行修正.

(2) 大涡模拟雷诺数 Re_Δ . 由于大涡模拟滤去了耗散尺度的信息, 在可解尺度部分只剩下了过滤尺度和含能尺度这两个特征尺度. 大涡模拟雷诺数就是根据这两个尺度提出的反映大涡模拟尺度范围的重要物理量. 本文的结果显示, 可解尺度湍流的标度律与大涡模拟雷诺数相关 (图 3 和图 4).

(3) 过滤器类型. 本文对 3 种经典过滤器 (cutoff, tophat 和 gauss) 分别进行了研究, 结果显示可解尺度湍流的标度律与过滤器类型有关. 针对 cutoff 过滤器, 本文提出可解尺度二阶结构函数标度律的一个解析模型, 其结果显含 r/Δ 和 Re_Δ .

这些因素对可解尺度湍流标度律影响均比较大, 因而本文进一步根据这些结果对现有的亚格子模型进行了修正. 以简化的 CZZS 模型为例, $r = \Delta$ 时, 采用 cutoff 过滤器过滤后的扭率值和未过滤的扭率值相差一倍以上, 因而此修正是重要的.

致谢 方乐感谢 Wouter Bos 对 EDQNM 计算的帮助.

参 考 文 献

- Kolmogorov AN. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number. *Proceedings of Mathematical and Physical Sciences*, 1941, 30: 301
- Kolmogorov AN. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, 13: 82-85
- She ZS, Leveque E. Universal scaling law in fully developed turbulence. *Physics Review Letters*, 1994, 72: 336
- Benzi R, Ciliberto S, Baudet C, et al. On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, 1995, 80: 385-398
- Qian J. Inertial range and the finite reynolds number effect of turbulence. *Physical Review E*, 1997, 55(1): 337-342
- Qian J. Normal and anomalous scaling of turbulence. *Physical Review E*, 1998, 58(6): 7325-7329
- Barenblatt GI, Chorin AJ, Prostokishin VM. Comment on the paper "On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence" by Benzi et al. *Physica D*, 1999, 127: 105-110
- Tatarskii VI. Use of the 4/5 Kolmogorov equation for describing some characteristics of fully developed turbulence. *Physics of Fluids*, 2005, 17:035110
- Fang L, Bos WJT, Zhou XZ, et al. Corrections to the scaling of the second-order structure function in isotropic turbulence. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, 26(2): 151-157
- Batchelor GK. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Proc Cambridge Philos Soc*, 1951, 47: 359-373
- Lohse D, Muller-Groeling A. Bottleneck effects in turbulence: scaling phenomena in r versus p space. *Physical Review Letters*, 1995, 74(10): 1747-1750
- Meneveau C. Transition between viscous and inertial-range scaling of turbulence structure functions. *Physical Review E*, 1996, 54(4): 3657
- 李新亮, 马延文, 傅德薰. 可压槽道湍流的直接数值模拟及标度律分析. 中国科学: A 辑, 2001, 31(2): 153-164 (Li Xinliang, Ma Yanwen, Fu Dexun. Direct numerical simulation and scaling analysis of compressible channel turbulence. *Science in China: A*, 2001, 31(2): 153-164 (in Chinese))
- 夏振炎, 姜楠, 王振东等. 壁湍流边界层奇异标度律的实验研究. 实验力学, 2005, 20(4): 532-538 (Xia Zhenyan, Jiang Nan, Wang Zhendong, et al. anomalous scaling law in turbulent boundary layer. *Journal of Experimental Mechanics*, 2005, 20(4):532-538 (in Chinese))
- Cui GX, Zhou HB, Zhang ZS, et al. A new dynamic subgrid eddy viscosity model with application to turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 2004, 16(8): 2835-2842
- Fang L, Shao L, Bertoglio JP, et al. An improved velocity increment model based on Kolmogorov equation of filtered velocity. *Physics of Fluids*, 2009, 21(6): 065108
- Berland J, Bogey C, Bailly C. Investigation using statistical closure theory of the influence of the filter shape on scale separation in large-eddy simulation. *Journal of Turbulence*, 2008, 9(21): 1
- Meneveau C. Statistics of turbulence subgrid-scale stresses: Necessary conditions and experimental tests. *Physics of Fluids*, 1994, 6(2): 815-833
- Fang L. Applying the Kolmogorov equation to the problem of subgrid modeling for Large-Eddy Simulation of turbulence. [PhD thesis]. Ecole Centrale de Lyon, 2009
- Pope S. Turbulent Flows. America: Cambridge University Press, 2000
- Hinze. Turbulence. 2 edn. Columbus: McGraw-Hill, 1975
- Kraichnan RH. Dynamics of nonlinear stochastic systems. *J Math Phys*, 1961, 2: 124-148
- Edwards SF. The statistical dynamics of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, 18: 239-273
- Orszag SA. Lectures on the statistical theory of turbulence. Wakefield: Flow Research Inc, 1974
- Lesieur M. Turbulence in Fluids. Dordrecht: Kluwer Academic, 1997
- Sagaut P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. London: Springer, 2006
- Li Y, Perlman E, Wan M, et al. A public turbulence database cluster and applications to study Lagrangian evolution of velocity increments in turbulence. *Journal of Turbulence*, 2008, 9(31): 1-29
- Fang L, Boudet J, Shao L. Les échanges inter-échelles en simulation des grandes échelles. 18^e Congrès Français de Mécanique, 2007
- Pumir A, Shraiman BI. Lagrangian particle approach to large eddy simulations of hydrodynamic turbulence. *Journal of Statistical Physics*, 2003, 113: 693-700

附录 A 能谱、传输谱和结构函数的转换公式推导

根据式 (8), 将 $E(k)$ 在 $\mathbb{R}$ 上做偶延拓, 得到

$$D_{ll} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} E(k) \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos(kr)}{(kr)^2} - \frac{\sin(kr)}{(kr)^3} \right] dk$$

对 r 的一阶导数可写为

$$D'_{ll} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} kE(k) \left[-\frac{\sin(kr)}{(kr)^2} - \frac{3\cos(kr)}{(kr)^3} + \frac{3\sin(kr)}{(kr)^4} \right] dk$$

因此

$$3D_{ll} + rD'_{ll} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} E(k) \left[1 - \frac{\sin(kr)}{kr} \right] dk$$

两边同乘以 r 并对 r 求三阶导数, 得到

$$(3rD_{ll} + r^2D'_{ll})''' = 2 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 E(k) \cos(kr) dk$$

根据傅立叶变换公式即可得到二阶结构函数到能谱的转换式 (9).

根据式 (10), 将 $T(k)$ 在 $\mathbb{R}$ 上做偶延拓, 得到

$$\frac{D_{lll}}{r} = 6 \int_{-\infty}^{\infty} T(k) \left[-\frac{\sin(kr)}{(kr)^3} - \frac{3\cos(kr)}{(kr)^4} + \frac{3\sin(kr)}{(kr)^5} \right] dk$$

分别计算 $(r^3 D_{lll})''$ 和 $(r^2 D_{lll})'$ 并相加, 得到

$$(r^3 D_{lll})'' + (r^2 D_{lll})' = 6 \int_{-\infty}^{\infty} rT(k) \frac{\sin(kr)}{k} dk$$

两边同除以 r 并对 r 求三阶导数, 得到

$$\left(\frac{(r^3 D_{lll})'' + (r^2 D_{lll})'}{r} \right)''' = -6 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 T(k) \cos(kr) dk$$

根据傅立叶变换公式即可得到三阶结构函数到传输谱的转换式 (11).

(责任编辑: 刘 丽 刘俊丽)

SCALING LAW OF RESOLVED-SCALE ISOTROPIC TURBULENCE¹⁾

Ma Wei^{*,†} Fang Le^{*,†,2)} Shao Liang^{*} Lu Lipeng[†]

^{*}(LMFA, Ecole Centrale de Lyon, Université Lyon, Ecully 69130, France)

[†](School of Jet Propulsion, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract In large-eddy simulation (LES), EDQNM theory is employed to calculate the scaling laws of second- and third-order structure functions, and the skewness of velocity increment, in resolved-scale isotropic turbulence with three different filters, respectively. The scaling law and skewness are affected by several factors, such as the ratio of two-point distance to filter size, the LES Reynolds number, and the type of filter. Results show that, when two-point distance is the same magnitude as filter size, or LES Reynolds number is small, both the scaling law and skewness of resolved-scale turbulence are far from those of full-scale turbulence and should be corrected. Three examples of subgrid modeling using these results are then introduced.

Key words turbulence, scaling law, large-eddy simulation, filter

Received 2 February 2010, revised 15 May 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10828204) and BUAA SJP 111 program.

2) E-mail: le.fang@ec-lyon.fr