

大型结构大修改下的静力重分析方法¹⁾

黄冀卓^{*,**,2)} 王 湛^{†,**}^{*}(福州大学土木工程学院, 福州 350108) [†](华南理工大学土木工程系, 广州 510641)^{**}(华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510640)

摘要 对于大型结构发生参数大修改时, 采用组合近似算法进行结构位移重分析会使所得的近似解与真实解误差较大. 为了解决组合近似算法在大型结构发生参数大修改时的求解精度不足缺陷, 提出了 3 种改进的结构静力重分析方法. 该 3 种改进算法都是基于组合近似算法, 并分别通过位移迭代修正、刚度逐步逼近等措施使求解精度不断提高. 通过 2 个算例验证了 3 种改进算法的有效性和高效性, 并对 3 种改进算法之间的求解效率进行了比较.

关键词 静力重分析, 近似重分析, 组合近似法, 大型结构, 大修改

中图分类号: TU311.1, O242.2 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)02-0355-07

引 言

在结构优化问题中, 对每一次修改后的结构进行重分析是一项很重要的工作, 其占用结构优化过程的大部分时间. 可以说, 结构优化速度的快慢很大程度上取决于结构重分析的效率, 一个高效的结构重分析算法将极大提升结构优化问题的求解效率. 为了减少精确重分析所耗费的大量计算时间, 快速而有效地近似重分析方法成为了国内外众多学者研究的热点. 如采用预处理共轭梯度法 (PCG) 的近似重分析技术^[1-3]、基于摄动和 Padé 逼近的近似重分析方法^[4-5]和组合近似法 (combined approximation, CA)^[6-15]. 其中, 组合近似法具有简单、通用、结果精确等优点^[7], 目前已被成功推广应用于各个领域、各种类型的结构重分析, 如振动重分析^[8-9]、非线性静力重分析^[10]、非线性动力重分析^[11-12]、拓扑优化^[13,15]等.

由于组合近似法是取二项式级数展开的前若干项作为基本向量组对原方程进行缩减和求解的, 因此其对于小规模 and 中等规模的结构、结构整体刚度变化不大的情况是非常有效的. 但当结构规模较大 (具有成百上千个自由度), 且结构参数发生大的修改 (特别是修改幅度严重不均) 时, 采用组合近似法进行重分析得到的结果将与真实解偏差较大 (可参见

文中算例). 此外, 随着进化算法 (如遗传算法、蚁群算法、微粒群算法等) 在结构优化中的日益广泛应用, 其结构重分析问题显得尤为突出. 当采用进化算法进行结构优化时, 各个体之间的差异往往是复杂无规律的, 因此各个体之间的结构整体刚度变化也是复杂多样的: 某些单元可能发生微小的修正而另一些单元则可能发生大幅度的变化. 在这种情况下, 采用有效的重分析技术对于提升算法的优化效率显得尤为关键.

本文在组合近似法的前提下, 给出 3 种改进的结构静力重分析算法, 并通过数值算例验证 3 种改进算法在大型结构发生大修改 (特别是修改幅度严重不均) 时的有效性, 同时对 3 种改进算法的求解效率进行比较.

1 问题描述

对于一个静力线弹性系统, 假定结构的初始设计刚度和载荷向量分别为 $\mathbf{K}_0$ 和 $\mathbf{R}_0$, 则结构的位移 $\mathbf{r}_0$ 可由下列平衡方程求得

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0 \quad (1)$$

如果设计中结构发生变化, 则修改后的结构平衡方程可描述为

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (2)$$

2009-12-07 收到第 1 稿, 2010-06-04 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (50808116) 和华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室开放基金 (2008KB25) 资助项目.

2) E-mail: jzhuang-fj@sohu.com

其中 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}$, $\Delta\mathbf{K}$ 是结构刚度矩阵的增量, $\Delta\mathbf{R}$ 是载荷向量的增量. 为了表达上的方便, 本文假定 $\Delta\mathbf{R} = 0$, 即 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$.

结构重分析方法研究的目的是为了提高求解结构新位移 $\mathbf{r}$ 的效率, 即在不求解方程 (2) 的前提下, 通过结构修改前的位移 $\mathbf{r}_0$ 和某种分析技术, 获得比较良好的结构新位移 $\mathbf{r}$ 的近似解.

2 CA 方法

基本 CA 方法包括以下步骤:

(1) 计算基向量矩阵 $\mathbf{r}_B$

$$\mathbf{r}_B = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s] \quad (s \text{ 为基向量个数}) \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i = \mathbf{B}\mathbf{r}_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, s) \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K} \quad (5)$$

(2) 计算缩减的刚度矩阵 $\mathbf{K}_R$ 和载荷向量 $\mathbf{R}_R$

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{K} \mathbf{r}_B, \quad \mathbf{R}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{R} \quad (6)$$

(3) 计算下列 $s \times s$ 阶方程求解未知系数向量 $\mathbf{y}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$

$$\mathbf{K}_R \mathbf{y} = \mathbf{R}_R \quad (7)$$

(4) 通过线性近似可获得结构最终位移为

$$\mathbf{r} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + \dots + y_s \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_B \mathbf{y} \quad (8)$$

CA 方法适用于中、小规模的结构, 且 $\Delta\mathbf{K}$ 不大的情况. 对于大型结构、且 $\Delta\mathbf{K}$ 较大时, CA 方法通常不能得到良好的近似解.

3 大型结构大修改下的静力重分析方法

为了改进基本 CA 方法在求解大型结构发生大修改情况下的不足, 本文提出了 3 种改进的方法.

3.1 改进方法 1(ICA1)

在结构变化较大的情况下, 假设用 CA 方法求得的近似位移为 $\mathbf{r}$, 显然此时 $\mathbf{K}\mathbf{r} \neq \mathbf{R}$. 记 $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{K}\mathbf{r}$, 此为结构的不平衡载荷向量. 为了修正 $\mathbf{r}$, 可进一步通过解方程 $\mathbf{K}\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{R}$ 求得修正位移 $\mathbf{r}'$, 用修正后的位移 $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$ 替代 $\mathbf{r}$ 作为结构的近似位移. 显然, 修正后的位移 $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$ 要比修正前的位移 $\mathbf{r}$ 更接近真实值.

基于上述的位移修正思路, 可给出如下的静力重分析方法 (ICA1):

(1) 令

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{K} \quad (9)$$

(2) 对于 $j = 1, 2, \dots, ss + 1$ (ss 为位移修正次数), 计算

$$\Delta\mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{R} - \mathbf{K}\mathbf{r}^{(j-1)} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1^{(j)} &= \mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{R}^{(j)}, \quad \mathbf{r}_i^{(j)} = \mathbf{B}\mathbf{r}_{i-1}^{(j)} \\ (i &= 2, 3, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\mathbf{r}_B^{(j)} = [\mathbf{r}_1^{(j)}, \mathbf{r}_2^{(j)}, \dots, \mathbf{r}_s^{(j)}] \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_R^{(j)} = \mathbf{r}_B^{(j)T} \mathbf{K} \mathbf{r}_B^{(j)} \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_R^{(j)} = \mathbf{r}_B^{(j)T} \Delta\mathbf{R}^{(j)} \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_R^{(j)} \mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{R}_R^{(j)} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{r}}^{(j)} = \mathbf{r}_B^{(j)} \mathbf{y}^{(j)} \quad (16)$$

$$\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}^{(j-1)} + \bar{\mathbf{r}}^{(j)} \quad (17)$$

(3) 结构位移近似取 $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(ss+1)}$.

3.2 改进方法 2(ICA2)

由于基本 CA 方法对 $\Delta\mathbf{K}$ 不大的情况比较有效, 因此当 $\Delta\mathbf{K}$ 较大时, 可考虑将 $\Delta\mathbf{K}$ 转化为一列较小变化的 $\Delta\mathbf{k}_i$ ($\Delta\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \Delta\mathbf{k}_i$), 然后再由 CA 方法逐步逼近结构的真实位移.

如果令 $\Delta\mathbf{k} = \Delta\mathbf{K}/m$ (m 为正整数), 则有

$$(\mathbf{K}_0 + m \cdot \Delta\mathbf{k})\mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (18)$$

首先, 按照第 2 节中的基本 CA 方法计算下式位移 $\mathbf{r}^{(1)}$

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{k})\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{R} \quad (19)$$

其中式 (5) 中的 $\mathbf{B}$ 用下式替代

$$\mathbf{B} = -\mathbf{K}_0^{-1}\Delta\mathbf{k} \quad (20)$$

然后, 考虑如下的方程

$$(\mathbf{K}_0 + 2\Delta\mathbf{k})\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{R} \quad (21)$$

令 $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{k}$, 则方程 (21) 可改写为

$$(\mathbf{K}_1 + \Delta\mathbf{k})\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{R} \quad (22)$$

将式 (4) 和式 (5) 中的 $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{B}$ 分别用下列两式替代

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{r}^{(1)}, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{B}\mathbf{r}_{i-1} \quad (23)$$

$$B = -K_1^{-1} \Delta k \approx -K_0^{-1} \Delta k \quad (24)$$

则利用 CA 方法可进一步求解出 $r^{(2)}$.

类似地, 利用上述的方法可逐步求出下列方程 (25) 的位移 $r^{(m)}$

$$(K_0 + m \Delta k) r^{(m)} = R \quad (25)$$

此 $r^{(m)}$ 可作为真实位移 r 的一个逼近解.

基于上述的刚度逐步逼近方法, 可以给出如下的静力重分析方法 (ICA2):

(1) 令

$$\Delta k = \Delta K / m \quad (m \text{ 为正整数}) \quad (26)$$

$$(2) B = -K_0^{-1} \Delta k \quad (27)$$

(3) 对于 $k = 1, 2, \dots, m$, 计算

$$r_1^{(k)} = r^{(k-1)}, r_i^{(k)} = B r_{i-1}^{(k)} \quad (i = 2, 3, \dots, s) \quad (28)$$

其中 $r^{(0)} = r_0$.

$$r_B^{(k)} = [r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_s^{(k)}] \quad (29)$$

$$K_R^{(k)} = r_B^{(k)T} (K_0 + k \cdot \Delta k) r_B^{(k)} \quad (30)$$

$$R_R^{(k)} = r_B^{(k)T} R \quad (31)$$

$$K_R^{(k)} y^{(k)} = R_R^{(k)} \quad (32)$$

$$r^{(k)} = r_B^{(k)} y^{(k)} \quad (33)$$

(4) 结构位移近似取 $r = r^{(m)}$.

虽然文献 [15] 中的迭代组合近似方法也是基于刚度逐步逼近的思想, 但其在每次迭代过程中都必须反复计算矩阵 B 值 (每一次迭代 B 值都不同), 而本文给出的 ICA2 只需在迭代前计算一次 B 值即可. 从运算效率来说, 显然 ICA2 更为高效, 因为其

可减少迭代组合近似方法中因反复计算矩阵 B 值而多出的 $(m-1) \times n^3$ 次代数运算 (其中 n 为结构未知自由度数). 当结构规模比较大时, ICA2 节省的计算时间将相当可观 (由后续的各种方法代数运算次数比较亦可看出).

3.3 改进方法 3(ICA3)

结合前述 ICA1 和 ICA2 两种算法各自的特点, 可在 ICA2 的每一分步逼近过程中引入 ICA1 方法进行位移的修正, 形成一种混合结构静力重分析方法 (ICA3). ICA3 的计算步骤如下:

(1) 令 $\Delta k = \Delta K / m$ (m 为正整数), $B = -K_0^{-1} \Delta k$.

(2) 对于 $k = 1, 2, \dots, m$, 按照 ICA1 求解下列方程的位移 $r^{(k)}$

$$(K_0 + k \cdot \Delta k) r^{(k)} = R \quad (34)$$

(3) 结构位移近似取 $r = r^{(m)}$.

值得注意的是, 在上述计算步骤 (2) 中, 矩阵 B 的值可始终保持不变 ($B = -K_0^{-1} \Delta k$), 即矩阵 B 只需要计算一次. 这是因为, 虽然在步骤 (2) 中进行位移修正的时候需要计算矩阵 $B' = -K_0^{-1} (k \cdot \Delta k)$, 但由于 $B' = k B$, 因此使用 B 替代 B' 不会影响位移计算结果.

3.4 改进算法的代数运算次数

表 1 给出了 4 种近似重分析方法 (CA, ICA1, ICA2, ICA3) 和直接求解无缩减平衡方程的精确算法 (DIR) 的代数运算量, 其中 NAO 表示算法总的代数运算次数, n 为结构的未知自由度数. 方程精确解基于高斯消元法.

表 1 各种方法中的代数运算次数

Table 1 Numbers of algebraic operations of various methods

Arithmetic expression	CA n, s	ICA1 n, s, ss	ICA2 n, s, m	ICA3 n, s, ss, m	DIR n
$Kr = R$	—	—	—	—	$n^3/3 + n^2$
$\Delta R^{(j)} = R - K r^{(j-1)}$	—	$n^2(ss+1)$	—	$n^2(ss+1)m$	—
$\Delta k = \Delta K / m$	—	—	n^2	n^2	—
r_B	$n^2 s$	$n^2 s(ss+1)$	$n^2 sm$	$n^2 s(ss+1)m$	—
$K_R = r_B^T K r_B$	$n^2 s + ns^2$	$(n^2 s + ns^2)(ss+1)$	$(n^2 s + ns^2)m$	$(n^2 s + ns^2)(ss+1)m$	—
$R_R = r_B^T R$	ns	$ns(ss+1)$	$ns m$	$ns(ss+1)m$	—
$K_R y = R_R$	$s^3/3 + s^2$	$(s^3/3 + s^2)(ss+1)$	$(s^3/3 + s^2)m$	$(s^3/3 + s^2)(ss+1)m$	—
$r = r_B y$	ns	$ns(ss+1)$	$ns m$	$ns(ss+1)m$	—
NAO	$2n^2 s + (s^2 + 2s)n + s^3/3 + s^2$	$[2n^2 s + (s^2 + 2s)n + s^3/3 + s^2 + n^2](ss+1)$	$[2n^2 s + (s^2 + 2s)n + s^3/3 + s^2]m + n^2$	$[2n^2 s + (s^2 + 2s)n + s^3/3 + s^2 + n^2](ss+1)m + n^2$	$n^3/3 + n^2$

4 数值算例

4.1 算例 1

某 3 跨 12 层钢框架结构, 结构尺寸和载荷如图 1 所示, 材料弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5$ MPa. 考虑每个节点 3 个自由度, 则结构的未知自由度数为 144. 采用遗传算法进行截面优化设计, 假设在优化过程中的两个个体情况分别为:

个体 1: 所有梁柱构件截面参数都一致, 截面尺寸 HM194×150×6×9, 横截面面积 $A = 39.76 \text{ cm}^2$, 惯性矩 $I = 2.74 \times 10^3 \text{ cm}^4$.

个体 2: 构件截面参数如表 2 所示.

表 2 个体 2 的截面参数

Table 2 Cross-sectional parameters of individual 2

	Storey number	Steel type/mm	Cross-sectional area/cm ²	Moment of inertia/cm ⁴
column	1~4	HN900×300×16×28	309.8	4.11×10^5
	5~8	HN700×300×13×24	235.5	2.01×10^5
	9~12	HN450×200×9×14	97.41	3.37×10^4
beam	1~6	HN248×124×5×8	32.89	3.56×10^3
	7~12	HN200×100×5.5×8	27.57	1.88×10^3

取个体 1 和个体 2 分别为修改前和修改后的结构. 与个体 1 相比, 个体 2 中相应构件参数发生了很大程度的修改, 而且程度非常不均. 如各构件的截面抗弯刚度 EI , 其变化范围从 0.69(1880/2740) 到 150(411000/2740), 既有小幅度的减小、又有大幅度

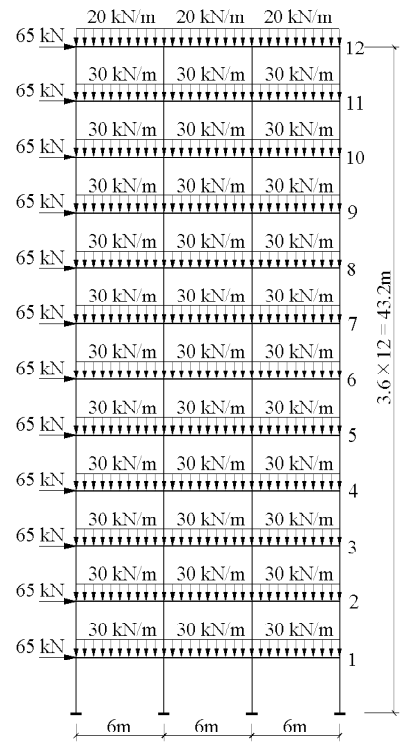


图 1 3 跨 12 层钢框架

Fig.1 3-bay 12-storey steel frame

的增加. 假设个体 1 的位移 r_0 已经求出, 则可分别采用 CA, ICA1, ICA2 和 ICA3 四种近似重分析方法求解出个体 2 结构的近似位移 r (结果如表 3 所示). 为了简化, 表 3 中只给出了各楼层最右侧节点的水平位移值 (即图 1 中各编号节点的水平位移值).

表 3 3 跨 12 层钢框架近似重分析结果

Table 3 Approximate reanalysis results of 3-bay 12-storey steel frame

Storey number	$r(\text{CA})/\text{mm}$		$r(\text{ICA1})/\text{mm}$			$r(\text{ICA2})/\text{mm}$			$r(\text{ICA3})/\text{mm}$			r^*/mm
	$s = 10$	$s = 30$	$s = 10$			$s = 10$			$s = 10$			
			$ss = 1$	$ss = 2$	$ss = 3$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2,$ $ss = 1$	$m = 2,$ $ss = 2$	$m = 3,$ $ss = 1$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	16.75	17.26	15.37	16.44	16.34	16.21	16.03	16.06	16.57	16.43	16.54	16.44
2	61.41	61.88	56.40	59.79	59.40	59.42	58.73	58.72	60.04	59.68	60.04	59.74
3	126.32	126.02	116.14	122.39	121.58	122.88	121.62	121.38	122.56	122.08	122.66	122.19
4	203.17	203.57	188.72	197.9	196.74	199.18	197.81	197.43	198.02	197.49	198.22	197.65
5	291.87	292.15	273.49	285.81	284.31	285.77	284.82	284.55	285.6	285.27	286.06	285.52
6	392.28	391.08	368.45	384.51	382.56	383.72	382.93	382.67	383.31	383.73	384.27	384.12
7	497.86	498.43	469.98	489.96	487.85	491.84	491.00	490.57	487.57	489.35	489.25	489.79
8	602.24	607.33	574.53	598.49	596.66	604.44	604.40	603.99	595.25	598.69	597.67	599.08
9	691.74	703.11	680.22	705.62	705.82	712.38	714.62	715.00	702.74	708.14	706.07	708.61
10	754.83	771.15	773.79	799.18	802.68	797.82	803.45	805.45	797.62	804.86	801.98	805.93
11	797.63	817.37	846.43	875.97	882.29	859.33	868.68	872.60	875.97	884.61	881.11	886.59
12	824.54	846.68	900.16	937.15	946.14	901.62	914.64	920.52	938.53	948.90	944.50	951.77
$ME/\%$	13.37	11.04	6.51	1.54	0.61	5.27	3.90	3.28	1.39	0.3	0.76	—
NAO	4.32×10^5	1.39×10^6	9.06×10^5	1.36×10^6	1.81×10^6	8.86×10^5	1.32×10^6	1.75×10^6	1.83×10^6	2.74×10^6	2.74×10^6	1.02×10^6

表 3 中 $r(\text{CA})$, $r(\text{ICA1})$, $r(\text{ICA2})$, $r(\text{ICA3})$ 分别表示采用 CA, ICA1, ICA2 和 ICA3 重分析方法求得的近似位移向量, r^* 则表示直接求解结构的无缩减方程得到的精确位移向量. ME 表示近似位移值与精确位移值之间的最大误差, 按照下列公式计算

$$ME = \max \left\{ \frac{|r_i - r_i^*|}{r_i^*} \times 100\% \right\}, i = 1, 2, \dots, 12$$

(35)

其中, r_i 和 r_i^* 分别表示结构的第 i 层最右侧节点的水平位移近似值与精确值.

从表 3 可知, 对于此时的大修改结构, 基本 CA 方法求解能力有限, 即使增大基向量个数 ($s = 30$), 最大误差仍达到 11.04%; 而采用 ICA1, ICA2 和 ICA3 方法, 则可在较小基向量、较少代数运算次数的前提下获得比较满意的近似解, 而且求解精度还随着算法参数的增大而不断提高.

通过表 3 中列 (4) 和列 (7)、列 (5) 和列 (8) 列以及列 (6), 列 (9) 和列 (10) 的比较可知, 在代数运算次数大致相同的前提下, ICA1 的求解精度通常是最高, ICA3 次之, ICA2 最低. 如 $NAO \approx 1.8 \times 10^6$ 次时, ICA1, ICA2, ICA3 的最大误差值 ME 分别为 0.61%, 3.28%, 1.39%. 此外, 通过列 (11) 和列 (12) 的比较还可发现, 对于算法 ICA3 而言, 在同样求解效率的前提下 ($NAO = 2.74 \times 10^6$), 增大 ss 要比增大 m 更为有效, 这同样也证实了 ICA1 的求解精度普遍要比 ICA2 高.

对表 3 中几种算法在不同参数下的计算量进行比较可以发现, 除了第 (2)、第 (4) 和第 (7) 列情况外, 无论是基本 CA 还是改进的 ICA1, ICA2 和 ICA3, 要想获得更好的求解精度, 均需耗费比精确算法更多的计算时间, 这显然是与研究目的相悖的. 仔细分析原因可知, 这主要是由于算例 1 的结构规模还比

较小, 以致无法充分体现改进 CA 算法的优越性.

4.2 算例 2

某 4 跨 50 层钢框架结构, 结构几何尺寸和载荷如图 2 所示, 材料弹性模量 $E = 2.06 \times 10^5 \text{MPa}$. 考虑每个节点 3 个自由度, 则结构的未知自由度数为 750. 修改前、后结构的截面参数如表 4 所示. 从表 4 可以看出, 柱截面参数变化很大, 修改后的柱截面面积和惯性矩分别是修改前的 16 倍和 160 倍; 而梁截面变化则相对较小, 修改后的第 1 到 20 层梁截面面积和惯性矩增大到修改前的 1.1 倍, 其余层梁截面参数则减小到修改前的 0.9 倍. 由此可见, 修改前后结构的参数不但变化很大, 而且变化非常不均匀、级别相差较大.

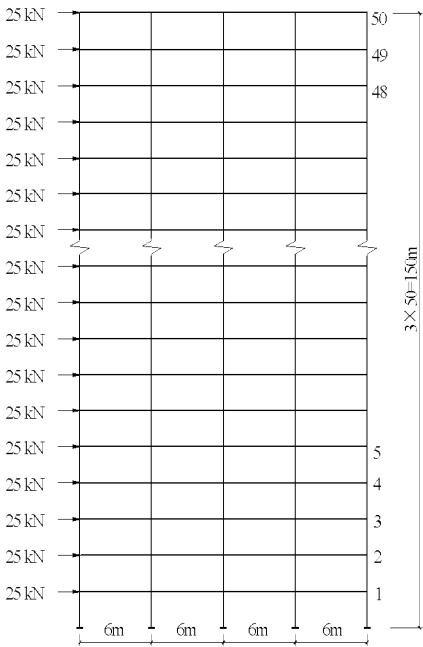


图 2 4 跨 50 层钢框架

Fig.2 4-bay 50-storey steel frame

表 4 4 跨 50 层钢框架修改前、后构件的截面参数

Table 4 Cross-sectional parameters of 4-bay 50-storey steel frame before and after modification

	Column		Beam	
	before	modification	1st~20th storeys	21st~50th storeys
before	$A = 50 \text{ cm}^2$		$A = 50 \text{ cm}^2$	
modification	$I = 5 \times 10^3 \text{ cm}^4$		$I = 5 \times 10^3 \text{ cm}^4$	
after	$A = 800 \text{ cm}^2$			
modification	$I = 8 \times 10^5 \text{ cm}^4$		$A = 55 \text{ cm}^2$	$A = 45 \text{ cm}^2$
			$I = 5.5 \times 10^3 \text{ cm}^4$	$I = 4.5 \times 10^3 \text{ cm}^4$

假设修改前的结构位移 r_0 已经求出, 则可分别采用 CA, ICA1, ICA2, ICA3 四种近似方法求解修改

后结构的近似位移 r (结果如表 5 所示). 为了简化, 表 5 中只给出了第 5, 10, 15, $\dots$, 50 等楼层最右侧节

点的水平位移值.

从表 5 可知, 对于此时的大修改结构, 基本 CA 方法求解能力有限, 当基向量个数 $s = 10$ 时, 最大误差达到 10.14%; 而基向量个数 s 增大到 50 时, 最

大误差仍达到 6.07%. 与之相反, 采用 ICA1, ICA2 和 ICA3 方法, 则可在较小基向量 ($s = 10$)、较少代数运算次数的前提下获得令人满意的近似解, 误差均不超过 5%.

表 5 4 跨 50 层钢框架近似重分析结果

Table 5 Approximate reanalysis results of 4-bay 50-storey steel frame

Storey number	$\boldsymbol{r}$ (CA)/mm		$\boldsymbol{r}$ (ICA1)/mm			$\boldsymbol{r}$ (ICA2)/mm			$\boldsymbol{r}$ (ICA3)/mm			$\boldsymbol{r}^*$ /mm
	$s = 10$	$s = 50$	$s = 10$			$s = 10$			$s = 10$			—
			$ss = 1$	$ss = 2$	$ss = 3$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2,$	$m = 2,$	$m = 3,$	
									$ss = 1$	$ss = 2$	$ss = 1$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5	197.51	179.92	180.85	187.39	185.72	178.62	181.06	182.26	187.6	186.02	187.43	186.42
10	619.28	588.3	545.81	565.79	560.54	565.8	560.46	559.24	564.66	561.38	564.16	562.26
15	1 054.69	1 042.24	957.46	984.82	980.18	1 007.89	997.04	993.51	983.55	981.91	983.86	982.57
20	1 440.35	1 447.28	1 369.41	1 392.22	1 391.78	1 425.35	1 416.33	1 412.92	1 393.37	1 393.41	1 394.56	1 394.16
25	1 781.76	1 808.37	1 750.45	1 775.22	1 778.39	1 803.38	1 800.98	1 799.44	1 780.81	1 780.26	1 782.22	1 781.88
30	2 070.06	2 114.95	2 078.56	2 114.58	2 118.54	2 126.57	2 132.05	2 133.07	2 122.04	2 121.38	2 123.7	2 124.01
35	2 299.86	2 359.75	2 342.66	2 392.66	2 398.43	2 385.34	2 398.19	2 401.83	2 401.43	2 402.41	2 404.27	2 406.07
40	2 470.55	2 541.75	2 541.28	2 605.88	2 614.74	2 578.3	2 597.71	2 603.81	2 615.85	2 619.25	2 620.37	2 624.38
45	2 583.31	2 663.41	2 681.3	2 759.3	2 771.71	2 710.72	2 736.66	2 745.24	2 770.4	2 776.72	2 776.84	2 783.66
50	2 653.38	2 742.75	2 779.95	2 869.82	2 886.21	2 801.27	2 833.47	2 844.43	2 882.04	2 891.7	2 890.55	2 900.59
$ME/\%$	10.14	6.07	4.16	1.06	0.50	4.18	2.88	2.23	0.64	0.31	0.54	—
NAO	1.13×10^7	5.82×10^7	2.38×10^7	3.57×10^7	4.76×10^7	2.32×10^7	3.46×10^7	4.59×10^7	4.81×10^7	7.19×10^7	7.19×10^7	1.41×10^8

同样通过比较可以发现, 在代数运算次数相同的前提下, ICA1 的求解精度最高, ICA3 次之, ICA2 最低; 而且对于算法 ICA3, 增大 ss 要比增大 m 更为有效.

与算例 1 不同, 由于本算例结构规模较大, 因此 3 种改进 CA 方法在不同参数情况下的计算量均远少于精确算法的计算量 (见表 5). 以 ICA1 为例, 当 $ss = 1$ 时, 只需花费精确算法所用时间的 0.17 倍 ($2.38 \times 10^7 / 1.41 \times 10^8$) 就可得到最大误差不超过 5% 的近似解; 而当 $ss = 3$ 时, 只需花费精确算法所用时间的 0.34 倍 ($4.76 \times 10^7 / 1.41 \times 10^8$) 就可得到与精确解几乎相同的近似解. 由此可见, 本文提出的 3 种改进 CA 重分析算法适用于大型结构的大修改情况, 而且结构规模越大, 改进 CA 算法的效率就越高.

5 结 论

由于基本 CA 方法在大型结构发生大修改时无法获得良好的近似解, 本文提出了 3 种改进的 CA 方法: ICA1, ICA2 和 ICA3. 通过 2 个算例证实了本文提出的改进 CA 方法均可在大型结构发生大修改时获得良好的近似解, 而且结构规模越大, 改进 CA 方

法的效率越高. 这就说明了本文提出的改进 CA 方法能应用于实际大型复杂结构的静力重分析中. 如果能将其与已有的有限元分析软件或结构设计软件相结合, 则将更好地发挥其实际应用价值. 此外, 本文还对 ICA1, ICA2 和 ICA3 三种改进算法的求解效率进行了比较, 结果表明三者的求解效率由高到低分别为 ICA1, ICA3, ICA2.

参 考 文 献

1 Noor A, Whitworth S. Reanalysis procedure for large structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26: 1729-1748

2 Kirsch U, Kocvara M, Zowe J. Accurate reanalysis of structures by a preconditioned conjugate gradient method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55: 233-251

3 Wu B, Li Z. Static reanalysis of structures with added degrees of freedom. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, 22: 269-281

4 Chen S, Yang X, Wu B. Static displacement reanalysis of structures using perturbation and Padé approximation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2000, 16: 75-82

5 黄海, 陈塑寰, 孟光等. 结构静态拓扑重分析的摄动 - Padé 逼近法. *固体力学学报*, 2005, 26(3): 321-324 (Huang Hai, Chen Suhuan, Meng Guang, et al. Perturbation-Padé method

- for static topological reanalysis. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 26(3): 321-324(in Chinese))
- 6 Kirsch U. Reduced basis approximations of structural displacements for optimal design. *AIAA Journal*, 1991, 29: 1751-1758
 - 7 Kirsch U. A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Struct Multidisc Optim*, 2003, 25: 67-85
 - 8 Kirsch U, Bogomolni M. Procedures for approximate eigenproblem reanalysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60: 1969-1986
 - 9 Kirsch U. Approximate vibration reanalysis of structures. *AIAA Journal*, 2003, 41: 504-511
 - 10 Amir O, Kirsch U, Sheinman I. Efficient non-linear reanalysis of skeletal structures using combined approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 73: 1328-1346
 - 11 Kirsch U, Bogomolni M, Sheinman I. Nonlinear dynamic reanalysis by combined approximations. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2006, 195: 4420-4432
 - 12 Kirsch U, Bogomolni M. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. *Computers & Structures*, 2007, 85: 566-578
 - 13 Kirsch U, Papalambros PY. Structural reanalysis for topological modifications—a unified approach. *Struct Multidisc Optim*, 2001, 21: 333-344
 - 14 Kirsch U, Bogomolni M, Sheinman I. Efficient procedures for repeated calculations of the structural response using combined approximations. *Struct Multidisc Optim*, 2006, 32: 435-446
 - 15 杨志军, 陈塑寰, 吴晓明. 结构静态拓扑重分析的迭代组合近似方法. *力学学报*, 2004, 36(5): 611-616 (Yang Zhijun, Chen Suhuan, Wu Xiaoming. An iterative combined approximation approach for structural static reanalysis of topological modifications. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(5): 611-616(in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

STATIC REANALYSIS METHODS FOR LARGE-SCALE STRUCTURES WITH LARGE MODIFICATIONS¹⁾

Huang Jizhuo^{*,**,2)} Wang Zhan^{†,**}

^{*}(College of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

[†](Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

^{**}(State Key Laboratory of Subtropical Building Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract This study presents three static reanalysis methods for large-scale structures with large modifications of structural parameters based on the Combined Approximation (CA) method. For large-scale structures with large changes in the design, the Combined Approximation method can not provide enough accurate results. To improve the accuracy of the results in reanalysis of the modified structure, three CA-based static reanalysis methods are presented by introducing several strategies, such as displacement iterative correction and stiffness progressive approximation. Two numerical examples are presented to demonstrate the validity and the improvement of the proposed methods, and the results show that the methods given can provide accurate approximations and can significantly reduce the computational effort involved in reanalysis of large-scale structures with large modifications. Comparisons of the computational costs of these three presented methods are made.

Key words static reanalysis, approximate reanalysis, combined approximation method, large-scale structure, large modification

Received 7 December 2009, revised 4 June 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50808116) and the State Key Lab of Subtropical Building Science, South China University of Technology (2008KB25).

2) E-mail: jzhuang_fj@sohu.com