第 43 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 43, No. 2
2011 年 3 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Mar., 2011

引力作用下理想气体统计分形结构的动力学模型

赖小明 卞保民 [1)] 杨 玲 杨 娟 李振华 贺安之
(南京理工大学信息物理与工程系，南京 210094)

摘要 通过引力作用下理想气体流体力学方程组的无量纲化，以空间尺度因子代换时间参数，根据量纲理论 Π 定理，在方程中用与尺度因子对应的统计量物理为度量单位，从理论上推导出流体力学微分方程组的分离变量形式，获得一组具有分形结构特征一阶微分方程组. 引力作用下理想气体统计特征参量相对于空间尺度因子的一般函数形式具有广义分形的结构特征，这个结果表明局域性流体力学微分方程能够作为统计分形结构的动力学基础.

关键词 引力，理想气体，分形，量纲理论，标度不变性

中图分类号： O35 **文献标识码：** A **文章编号：** 0459-1879(2011)02-0284-05

引 言

引力作用下的理想气体模型是研究大质量星体结构时人们普遍采用的理论模型，恒星、星系以及宇宙模型均应用反映时空非线性特性的广义相对论理想气体模型 [1]. 自 Mandelbrot 建立分形理论以来，人们已将反映非线性特性的分形概念应用于各相关领域，尤其是在具有复杂动力特征的流体力学问题中，应用了分形理论研究湍流的结构 [2]. 同样，分形概念也很快被引入宇宙大尺度结构特性的理论研究中. 天文观测数据的分析结果表明，在宇宙局部较大的尺度范围内物质的空间分布结构显现出分形特征 [3]. Groth 等 [4] 最早开展了对星系空间分布自相似特征的揭示，其后 Szalag 等 [5] 进行了研究，星系空间分布具有自相似性已经获得比较广泛的公认. 若定义空间 r 点处的星系分布密度为 $F(r)$, 则该分布可表征为

$$F(r) \propto r^{-\alpha} \tag{1}$$

标度相对论的研究者们则进一步认为时空本身具有分形结构，对应于一个随着观测精度变化的函数. 有分形时空理论的支持者给出在引力作用下的物质从原子到超星系团的成团特性由于气体元素的随机运动而服从以下基本规律 [6]

$$d(N) = \frac{h}{Mc}N^{\alpha} \tag{2}$$

其中，d 为对象的尺度大小，h 为普朗克常数，N 为总质量为 M 的物质所包含的核子数，c 为光速. 只考虑引力作用时，$\alpha = 3/2$. 以随机自相似的分形宇宙模型为基础，已经有研究者通过电磁波的波导模型计算得到不需要 “暗能量” 的宇宙加速膨胀的观测效应 [7], 并在分形宇宙模型下，通过更改引力常数而得到加速膨胀观测效应 [8], 说明气体元素的随机运动与理想气体整体的分形结构有着密切关系. 正如分形的发现者 Mandelbrot 所说：“分形的优点在于描述世界而不是解释世界”. 对于自然界分形结构的成因仍未形成很成熟的理论，宇宙大尺度分形结构的成因同样处于探索阶段，未见文献给出引力作用下全空间范围理想气体运动分形结构的动力学模型. 元胞自动机是一种描述随机运动的有效方法，用元胞自动机能够得到对于星云、宇宙等理想气体对象的分形结构，即能够得到式 (1) 描述的密度分布 [9], 分形结构的形成与理想气体对象元素的随机运动有深层的联系. 对于元素做随机运动的对象，如星云、宇宙等，通常也用理想气体模型来描述.

卞保民等 [10] 研究了忽略引力作用条件下的理想气体流体力学微分方程组,通过引入尺度因子 $R(t)$ 代替时间参数 t, 将方程组无量纲化后得到具有自相似特性的基本微分方程，尺度因子是空间长度的单位，是表示空间尺度大小的物理量，它的变化标志着时空性质以及物质的空间分布的变化. 将此理论模型应用于求解强冲击波的波前传播公式，克服了谢多夫 – 泰勒点爆炸模型中存在的原点附近奇异性

2009–10–22 收到第 1 稿，2010–09–26 收到修改稿.

1) E-mail: Bianbaomin_56@yahoo.com.cn

问题 [11]，证明了 Taylor 公式的中场近似性．卞保民等 [11] 还以非引力作用下的理想气体一维流体力学方程为基础，对自相似运动的充分必要条件进行了讨论，证明物理参量满足的标度不变性是气体做自相似运动的充要条件 [12]．计入引力作用的全空间理想气体模型，不必借助于"暗能量"概念也能够解释哈勃定律以及宇宙的加速膨胀观测效应 [13]．本文中，笔者继续研究引力作用下理想气体一维不定常流体力学微分方程的无量纲密度 ρ，压强 p 和速度 u 具有广义分形形式的解：$\dfrac{\mathrm{d}\ln Y_\alpha}{\mathrm{d}\ln r} \equiv C_\alpha$，研究表明，引力作用下的理想气体流体力学模型可以作为物质密度分布的分形结构的动力学基础．

1 分形维数与物理量空间标度不变性

某个确定系统的局部以某种方式与整体结构相似的形体叫分形．自 Mandelbrot[14] 开创性的论文发表以来，已经有了大量关于分形的理论和应用研究，但对于分形各种维数的物理本质意义，特别是分形的动力学机制方面的研究较为少见．

一个以空间距离 r 为自变量的物理量 $Y(r)$ 具有标度不变性，是指 $Y(r)$ 函数满足 [15]

$$Y(\lambda r)/\lambda^m = Y(r) \tag{3}$$

式中，系数 λ 满足 $0 < \lambda \le 1$，m 是与 r 无关的常数．满足这一性质的简单函数是幂函数 [15]

$$Y(r) \sim r^m \tag{4}$$

可以得到

$$Y(\lambda r) \sim (\lambda r)^m = \lambda^m r^m \sim \lambda^m Y(r) \tag{5}$$

通常都认为物理量满足式 (4) 时该量就是具有分形结构，具有这样特征的物理量，在其中一个尺度上分布的一部分经缩放变换后，可以得到物理量在另一个尺度上的分布．

集合的"分形维数"的概念几乎是整个分形数学的中心．许多维数的定义依赖于对集 Y"在尺度 r 下的度量"．若在尺度 r 下测量 Y 的测量值为 $Y(r)$，而 Y 的维数由 $Y(r)$ 服从的规律决定，分形维数最基本的定义为

$$D = -\frac{\ln Y(r)}{\ln r} \tag{6}$$

一般来说，在函数 $Y(r)$ 不是非常特殊的函数型情况下，式 (6) 的右边不能成为常数，即分形维数 D 是随尺度 r 变化的，所以不能定义通常的分形维数．因此定义广义的分形维数 [16-17]

$$D(r) = -\frac{\mathrm{d}\ln Y(r)}{\mathrm{d}\ln r} \tag{7}$$

这样被扩展了的分形维数，适用于更普遍的具有变化维数的标度不变情况，而作为理想气体的宇宙及其中的星系团等可能具有变化维数的分形结构．

2 引力作用下理想气体统计分形结构的动力学模型

局域空间范围内的理想气体动力学模型中经常不考虑引力作用 [18]．考虑到引力作用，以参数 ρ, p 和 u 分别代表理想气体密度、压强和速度等统计特征量，在半径为 r_C，质量为 M_C 球外空间区域内的理想气体运动微分方程 [19]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\rho\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0\\
&\frac{p}{\rho^n}\left(\frac{\partial p}{p\partial t} + u\frac{\partial p}{p\partial r} - \frac{n}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - u\frac{n}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) = 0\\
&\qquad\qquad r > r_C
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中，G 为引力常数，n 为多方指数，r 为气体元 ρ 中心到原点的空间距离，M 代表半径 r 的球内总质量．M 满足的微分方程

$$\frac{\partial M}{\partial r} - 4\pi\rho r^2 = 0, \quad r > r_C \tag{9}$$

方程 (8) 是局域实验观测结果的归纳．国际计量大会用光信号周期参数 T 定义空间尺度 $R = cT$，径向距离 $r = \xi R = \xi cT$，$\xi = r/R$ 为气体元 ρ 的径向坐标．考虑引力作用时，沿径向传播光信号的周期 T 随传播时间变化，即 $r = \xi R(t)$，t 代表与光程 r 对应的光子信号自由传播时间．以空间尺度因子 $R(t)$ 代替 t 作自变量引入反映局域特性的微分方程，则微分方程 (8) 转变成

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r\dot R}{Ru}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln R} + \frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln r} + \frac{\partial\ln u}{\partial\ln r} + 2 = 0\\
&\frac{r\dot R}{Ru}\frac{\partial\ln u}{\partial\ln R} + \frac{\partial\ln u}{\partial\ln r} + \frac{p}{\rho u^2}\frac{\partial\ln p}{\partial\ln r} + \frac{GM}{u^2 r} = 0\\
&\frac{up}{r\rho^n}\left[\frac{r\dot R}{Ru}\frac{\partial}{\partial\ln R}\left(\frac{\ln\rho}{\rho^n}\right) + \frac{\partial}{\partial\ln r}\left(\frac{\ln\rho}{\rho^n}\right)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中，$\dot R = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$．取 $\xi \equiv 1$ 处的参考元物理量 $\rho_1(R)$，$p_1(R)$，$u_1(R)$ 为物理单位，下标"1"表示单位坐标

$\xi \equiv 1$. 根据量纲 Π 定理 [19], 微分方程 (10) 中的物理特征量均可写成分离变量形式

$$\left.\begin{aligned} \rho(r,t) &\equiv g(\xi)\rho_1(R) \\ p(r,t) &\equiv P(\xi)p_1(R) \\ u(r,t) &\equiv v(\xi)u_1(R) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式 (11) 中的函数 $y(\xi)$ 不再是时间的显函数. 总质量 M 可写成

$$\begin{aligned} M = \int_{r_C}^{r} 4\pi\rho_1 g(\xi) r^2 \mathrm{d}r + M_C = \\ 4\pi\rho_1 R^3 \int_{\xi_C}^{\xi} g(\xi)\xi^2 \mathrm{d}\xi + M_C = \\ 4\pi\rho_1 R^3 m_\xi + M_C \end{aligned} \tag{12}$$

其中, $m_\xi = \displaystyle\int_{\xi_C}^{\xi} g(\xi)\xi^2\mathrm{d}\xi$, M_C 为核的质量.

为了化简方程组 (10), 定义两个新的无量纲函数 [10]

$$\left.\begin{aligned} & L \equiv \frac{v(\xi)}{\xi}\frac{u_1}{\dot R} = l(\xi)L_1(R) \\ & \varepsilon \equiv \frac{\rho u^2}{2}\Big/\frac{p}{\gamma-1} = \frac{gv^2}{P}\frac{\rho_1 u_1^2}{2}\Big/\frac{p_1}{\gamma-1} = \\ & \quad \omega(\xi)\varepsilon_1(R) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中, $l(\xi) = \dfrac{v(\xi)}{\xi}$, $L_1(R) = \dfrac{u_1}{\dot R}$, $\omega(\xi) = \dfrac{gv^2}{P}$, $\varepsilon_1(R) = \dfrac{\rho_1 u_1^2}{2}\Big/\dfrac{p_1}{\gamma-1}$. 以 l 和 R 作为自变量, 由式 (10)~ 式 (13) 可得分离变量形式的一阶微分方程组

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}\ln\omega}{\mathrm{d}\ln l} = \frac{2-L-nL}{1-L} + \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R} - \dfrac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln R} - 2 + (3n-1)L\right]\left(\dfrac{nL^2}{1-L} - 2\varepsilon\dfrac{1-L}{\gamma-1}\right)}{\left(\dfrac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R} + 3nL\right)L + 2\varepsilon\dfrac{1-L}{\gamma-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R} + L - 1 + G\dfrac{4\pi m_\xi\rho_1 R^3 + M_C}{\xi^3 L\dot R^2 R}\right)} \\ & \frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R} = C_u\,, \quad \frac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln R} = C_\rho\,, \quad \frac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R} = C_p \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

和代数方程组

$$\left.\begin{aligned} & \frac{4\pi G m_\xi\rho_1 R^3 + M_C}{\xi^3 L\dot R^2 R} = C_M \\ & L_1 = C_L \\ & \varepsilon_1 = C_\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由于自变量 ξ 和 R 的独立性, 式 (14) 和 (15) 中的参数组 C_u, C_ρ, C_p, C_M, C_L 和 C_ε 均为与自变量无关的常量.

考虑到式 (11), 物理参量 $Y(r,t)$ 都可以表示成自变量 (ξ,R) 的函数, 则能够在定义域内依次继续进行自变量代换 $(\xi,R)\to(\xi,r/\xi)\to(\xi,r)$, 最终实现 $Y(r,t)\to Y(\xi,r)$ 的形式转换. 那么对于相对空间径向坐标 $\xi=r/R$ 给定处的统计物理量, 有

$$\left.\begin{aligned} & \left.\frac{\partial\ln u}{\partial\ln r}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \left.\frac{\mathrm{d}\ln u_1 + \mathrm{d}\ln v(\xi)}{\mathrm{d}\ln\xi + \mathrm{d}\ln R}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \\ & \qquad \frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R} = C_u \\ & \left.\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln r}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \frac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln R} = C_\rho \\ & \left.\frac{\partial\ln p}{\partial\ln r}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \frac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R} = C_p \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

给定任意时间 $t=t_1$, 则得到类似结果

$$\left.\begin{aligned} & \left.\frac{\partial\ln u}{\partial\ln r}\right|_{t=t_1} = \left.\frac{\mathrm{d}\ln u_1 + \mathrm{d}\ln v(\xi)}{\mathrm{d}\ln\xi + \mathrm{d}\ln R}\right|_{t=t_1} = \\ & \qquad \frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln\xi} = C'_u \\ & \left.\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln r}\right|_{t=t_1} = \frac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln\xi} = C'_\rho \\ & \left.\frac{\partial\ln p}{\partial\ln r}\right|_{t=t_1} = \frac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln\xi} = C'_p \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式 (16) 表明, 与文献 [11] 中不考虑引力作用的情况相同, 在引力主导作用下的理想气体运动, 统计参量也具有分形自相似结构, 所不同的是考虑引力作用后能够给出式 (14) 中 C_u, C_ρ, C_p 的值 (见第 3 节). 由式 (16) 可知, 跟踪某个固定空间坐标 ξ, 物理统计参量表现出随时间变化的相似性, 即当物理参量仅作为时间 t 的函数时, 也具有分形的特征, 一个时间段内的变化过程经过缩放可以得到另一个时间段内的变化过程; 而给定时刻 t, 物理统计参量径向分布表现为随距离 r 变化的相似性. 很容易从式 (17) 过渡到式 (1) 的形式, 表明气体参量在某一固定时刻的空间分布具有分形特征. 与式 (7) 对比, 能够看出统计参量 Y 在尺度为 r 下的分维数与 $-C_Y$ 对应.

3 理想气体统计分形结构的物理测量意义

由无量纲参数 $L_1 = u_1/\dot{R} = C_L$, 及式 (14) 可得

$$\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R} = \frac{\mathrm{d}\ln(\dot{R}L_1)}{\mathrm{d}\ln R} = \frac{\mathrm{d}\ln\dot{R} + \mathrm{d}\ln L_1}{\mathrm{d}\ln R} = \frac{\mathrm{d}\ln\dot{R}}{\mathrm{d}\ln R} = C_u \tag{18}$$

由式 (18) 最后一个等式可得

$$\mathrm{d}\ln\dot{R} = C_u\mathrm{d}\ln R = \mathrm{d}\ln R^{C_u} \tag{19}$$

则

$$\ln\frac{\dot{R}}{R^{C_u}} = \ln\frac{\dot{R}_0}{R_0^{C_u}} \tag{20}$$

则可

$$\dot{R} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{R}_0}{R_0^{C_u}}R^{C_u} \tag{21}$$

$$R^{-C_u}\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}R^{1-C_u}}{1-C_u} = \frac{\dot{R}_0}{R_0^{C_u}}\mathrm{d}t\,,\quad C_u < 1 \tag{22}$$

对上式做积分可以得到

$$R^{1-C_u} = (1-C_u)\frac{\dot{R}_0}{R_0^{C_u}}t + R_0^{1-C_u} \tag{23}$$

可得

$$R = \Big[(1-C_u)\frac{\dot{R}_0}{R_0^{C_u}}t + R_0^{1-C_u}\Big]^{\frac{1}{1-C_u}} = R_0\Big[(1-C_u)\frac{\dot{R}_0}{R_0}t + 1\Big]^{\frac{1}{1-C_u}} \tag{24}$$

即尺度因子函数通解为

$$R(t) = R_0\Big[(1-C_u)\frac{\dot{R}_0}{R_0}t + 1\Big]^{\frac{1}{1-C_u}}\,,\quad t \geq 0 \tag{25}$$

若仅根据数学逻辑性, 不考虑物理条件的限制, 取不同参数 C_u 形式上能够产生不同的尺度因子特解.

当取 $C_u \to -\infty$, 尺度因子 $R(t) = R_0$ 为常量, 其物理意义对应于牛顿绝对空间概念. 在实际问题中, 尺度因子特解由基本物理环境决定. 对于大质量星球周围的空间, 由于 $M_C > 0$, 根据式 (13) 和式 (14) 中 3 个常量 $\dot{R}^2R$, ρ_1R^3, ε_1 可得特解

$$2C_u + 1 = 0\,,\ C_\rho + 3 = 0\,,\ C_\rho + 2C_u - C_p = 0 \tag{26}$$

即

$$C_u = -1/2\,,\ C_\rho = -3\,,\ C_p = -4 \tag{27}$$

$$R(t) = R_0\Big(\frac{3}{2}\frac{\dot{R}_0}{R_0}t + 1\Big)^{\frac{2}{3}} \tag{28}$$

然而, 在宇观尺度条件下, 星系的影响限于相对微小空间内, 星系甚至超大星系团构成的空间区域内也能够近似成理想气体模型, 形式上 $M_C \to 0$. 由 $\rho_1R^2\dot{R}^{-2}$ 和 ε_1 为常量可得另一特解

$$C_\rho + 2 - 2C_u = 0\,,\quad C_\rho + 2C_u - C_p = 0 \tag{29}$$

对应的宇宙空间尺度因子形式由式 (25) 描述. 参数 C_u, C_ρ 和 C_p 中存在一个独立自由度, 由宇宙模型的物理特性决定. 根据天文观测结果, 宇宙具有物质分布均匀性 $\rho(r,t) = \mathrm{const}$(即宇宙学原理), 则有 $C_\rho = \dfrac{R}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}R} = 0$, 代入式 (29) 可得

$$C_u = 1\,,\quad C_p = 2 \tag{30}$$

$C_u = 1$ 对应于式 (25) 的极限形式, 计算可得 $C_\rho = 0$ 时的尺度因子函数为

$$R(t) = R_0\mathrm{e}^{\frac{\dot{R}_0}{R_0}t} = R_0\mathrm{e}^{H_0t} \to= R_0\mathrm{e}^{H_0\frac{r}{c}} \tag{31}$$

对于宇观测量, 唯一的可观测信号为遥远星光信号, 尺度因子函数对应的物理观测量是光信号参数. 尺度因子函数为

$$R(t) = cT = cT_0\mathrm{e}^{H_0t} \to cT_0\mathrm{e}^{H_0\frac{r}{c}} \tag{32}$$

式中, T_0 对应于辐射元本征周期, H_0 对应于哈勃常数, r 对应于光信号传播空间距离, 尺度因子对应于原点处观测者记录到的光信号周期 —— 波长.

当不考虑引力作用时, 式 (14) 中的引力项 $G(4\pi m_\xi\rho_1R^3 + M_C)/\xi^3L\dot{R}^2R$ 消失, 可以得到不含引力条件下的理想气体参量同样具有相同的标度不变性. 根据式 (15) 中 $\varepsilon_1 = C_\varepsilon$ 的条件得

$$C_\rho + 2C_u - C_p = 0 \tag{33}$$

但并不能完全确定其中的参数值. 结合具体问题中的一些限定条件, 如点爆炸冲击波条件 $R^3\dot{R}^2 \propto R^3P_1 = \mathrm{const}$, $C_\rho = 0$, 可得 $C_u = -3/2$, 这样就过渡到文献 [10] 中不考虑引力的强冲击波情况.

4 结 论

以引力作用下的局域性理想气体流体动力学微分方程组出发, 通过引入反映空间非线性特性的尺度因子函数 $R(t)$, 结合量纲理论, 能够推导出具有分形自相似性质的理想气体统计特征量一般解函数. 这种分形解必然具有局部与局部、局部与整体的相

似性．随着光信号传播距离的增大，分形维数在变化，即宇宙具有多重分形动力学特征．理论上所获得的理想气体动力学结构具有的广义分形特征，与已经观测到的宇宙大尺度分形结构吻合．有限空间范围内的有核模型，与光信号传播距离相对较小的星系结构对应；极限光信号传播距离对应于宇观尺度下的无核模型，与物质均匀分布的宇宙结构对应．

参 考 文 献

1 Trodden M, Carroll SM. TASI Lecture: Introduction to Cosmology. arXiv: astro-ph/0401547

2 黄真理．湍流的分形特征．力学进展， 2000, 30(4): 581-596(Huang Z L. Fractal nature in turbulence. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(4): 581-596 (in Chinese))

3 Coleman PII, Pietronero L. The fractal structure of the universe. *Physics Reports*, 1992, 213: 311-389

4 Groth EJ, Peebles PJE. Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. VII. Two-and three-point correlation functions for the high-resolution Shane-Wirtanen catalog of galaxies. *The Astrophysical Journal*, 1977, 217: 385-405

5 Szalag AS, Schramm D N. Are galaxies more strongly correlated than clusters? *Nature*, 1985, 314: 718-719

6 Iovane G, Laserra E, Tortoriello FS. Stochastic self-similar and fractal universe. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 20: 415-426

7 Iovane G. Waveguiding and mirroring effects in stochastic self-similar and Cantorian $\varepsilon^{(\infty)}$ universe. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23: 691-700

8 Iovane G. Varying G, accelerating universe, and other relevant consequences of a stochastic self-similar and fractal universe. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 20: 657-667

9 Vicsek T, Alexander SS. Fractal distribution of galaxies modeled by a cellular-automaton-type stochastic process. *Phys Rev Lett*, 1987, 58: 2818-2821

10 卞保民，贺安之，李振华等．理想气体一维不定常流自模拟运动的基本微分方程．物理学报， 2005, 54(12): 5534-5539 (Bian Baomin, He Anzhi, Li Zhenhua, et al. Basic differential equation of self-similar motion of one-dimensional nonsteady flow of ideal gas. *Acta Phys Sin*, 2005, 54(12): 5534-5539 (in Chinese))

11 卞保民，杨玲，张平等．理想气体球面强冲击波一般自模拟运动模型．物理学报， 2006, 55(8): 4181-4187 (Bian Baomin, Yang Ling, Zhang Ping, et al. General self-simulating motion mode of spherical strong shock waves in ideal gas. *Acta Phys Sin*, 2006, 55(8): 4181-4187 (in Chinese))

12 赖小明，卞保民，杨玲等．理想气体一维非定常流的一种自相似运动的存在条件．力学学报， 2010, 42(1): 122-126(Lai Xiaoming, Bian Baomin, Yang Ling, et al. Existence condition of one-dimensional self-similar motion of ideal gas. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(1): 122-126 (in Chinese))

13 赖小明，卞保民，杨玲等．非奇异宇宙的理想气体自相似模型．物理学报， 2008, 57(12): 7955-7962 (Lai Xiaoming, Bian Baomin, Yang Ling, et al. Self-similarity model of nonsingular perfect gas universe. *Acta Phys Sin*, 2008 57(12): 7955-7962 (in Chinese))

14 Mandelbrot B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, New Series, 1967, 156: 636-638

15 孙霞．分形原理及应用．合肥：中国科技大学出版社， 2003. 49 (Sun Xia. Fractal Theory and its Applications. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2003. 49 (inChinese))

16 张济忠．分形．北京：清华大学出版社， 2004. 356 (Zhang Jizhong. Fractals. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 356 (in Chinese))

17 Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors. *Physics Letters*, 1983, 97A: 227-230

18 Taylor G. The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion. *Pro R Lond A*, 1950, 201: 159-174

19 谢多夫ЛH．力学中的相似方法与量纲理论．北京：科学出版社，1982. 389 (Sedov LI. Similar Method and Dimensional Theory in Mechanics. Beijing: Science Press, 1982. 389 (in Chinese))

(责任编辑：陶彩军)

DYNAMICS MODEL OF STATISTICAL FRACTAL STRUCTURE OF IDEAL GAS UNDER GRAVITY

Lai Xiaoming Bian Baomin[1] Yang Ling Yang Juan Li Zhenghua He Anzhi

(*Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*)

Abstract Differential equations of ideal gas under gravity are made dimensionless by choosing statistical quantities $\rho(R)$, $p(R)$, $u(R)$ as the unit with respect to scale factor $R(t)$ and substituting time t with spatial scale factor $R(t)$. The equations that have separable variables are obtained based on Π theory, then a serial of differential equations having fractal structure characteristics are obtained. Statistical quantities of ideal gas under gravity $Y(R)$ have generalized fractal characteristics. This result shows that the local differential equations of fluid can be the fundamental equations of the dynamics of statistical fractal structures.

Key words gravity, ideal gas, fractal, dimensional theory, scale invariance

Received 22 October 2009, revised 26 September 2010.

1) E-mail: Bianbaomin_56@yahoo.com.cn