

上随体流体驻点附近滑移流动的同伦解析解¹⁾

朱 婧^{*,2)} 郑连存^{*} 张欣欣[†]

^{*}(北京科技大学应用学院数力系, 北京 100083)

[†](北京科技大学机械学院, 北京 100083)

摘要 从理论上研究了上随体 Maxwell 流体在滑移流区的动量传输问题. 通过一系列相似变换把控制方程组转化为常微分方程组, 利用同伦分析法首次求得了问题的近似解析解. 获得的同伦解析解与文献中的数值解吻合较好. 利用同伦解分析讨论了滑移参数、磁场强度、速度比例参数、吸入喷注参数和流体黏弹性参数对流动的影响.

关键词 上随体 Maxwell 流体, 同伦分析法, 近似解析解, 滑移流, 黏弹性

中图分类号: O357.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)01-0039-06

引 言

随着工业生产的高速发展, 人们越来越多地接触到非牛顿流体, 使得非牛顿流体力学得到了较快发展. 上随体 Maxwell 流体就是一种典型的非牛顿流体. 上随体 Maxwell 流体流经平板或管道时除产生拉伸流动和剪切流动外, 还在一定的条件下, 壁面处伴有以滑黏形式的运动, 称之为壁滑移现象, 自从研究壁滑移现象的先驱者 Mooney 的论文^[1]发表后, 文献 [2-4] 相继证实了流体有壁滑移现象.

另外由于微米、纳米尺度制造技术的巨大进步, 控制滑移对微流体而言有非常显著的影响, 将在诸多的工业领域有重大的潜在用途, 因此对滑移现象的深入了解是有必要的. 最近, Wang^[5]考察了具有延伸表面的滑移驻点流, 并考虑了大的滑移参数对该流动的影响, 而 Hayat 等^[6]分析了管道内的滑移流动问题, 文献 [7-8] 讨论了滑移边界条件下非牛顿流体的动量传输问题.

对非线性偏微分方程 (nonlinear partial differential equations, NPDE) 的求解, 一直是数学家和物理学家感兴趣的问题. 过去的几十年中, 数学物理研究领域内的一大成就就是提出了许多求解 NPDE 的精巧数学方法, 如 Adomian 分解法^[9-10]、摄动展开法^[11]和同伦分析法^[12]等. 同伦分析法^[13-15]已成功用于解决工程技术中的许多非线性问题, 如非线性

振动、磁流体边界层流动、多孔介质中的黏性流动和非线性深水传播问题等. 最近, 为了获得更快的收敛速度, Liao^[16]提出了优化的同伦分析法, 利用残差曲线图获得更好的辅助参数. 本文首先引入适当的相似变换, 把具有滑移边界的上随体 Maxwell 流体的边界层控制方程转化为常微分方程, 并应用同伦分析方法第一次给出该类问题的显式级数解, 期待这种级数解能够在工程实际应用中起到指导作用.

1 边界层控制方程

流体从远上方垂流向平板, 并在 $x = 0, y = 0$ 处形成滞止点. 选取流体驻点为坐标系原点, x 轴是平板方向, y 轴垂直于平板, u 和 v 分别为沿 x 轴和 y 轴的速度. 沿 x 轴有两个大小相等、方向相反的力拉伸平板, 因此在驻点处切向速度为 $u_w = cx$, 其中 c 为正常数; $u_e = ax$ 为边界层外的主流速度. 则上随体 Maxwell 流体的层流边界层的质量和动量方程如下^[17]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \left[u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u + u_e \frac{du_e}{dx} \quad (2)$$

2009-11-03 收到第 1 稿, 2010-05-27 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (50936003) 和北京科技大学新金属材料国家重点实验室开放课题 (2009Z-02) 资助项目.

2) E-mail: hahazhujiang@sohu.com

$$\frac{\partial p}{\partial y} = o(\delta) \quad (3)$$

相应的滑移^[5]边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u_w + N\rho v \frac{\partial u}{\partial y} \\ v(x, 0) &= -V_0 \\ u(x, \infty) &= u_e = ax \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, ρ 为流体密度, v 为运动黏性系数, λ 为缓冲时间, σ 为电导率, δ 为边界层厚度, N 为速度滑移参数, B_0 为常数, 表示磁场强度, p 为压力.

引入相似变换

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sqrt{c/vy} \\ u &= cx f'(\eta) \\ v &= -\sqrt{vc} f(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (1)~ 式 (4) 后得常微分线性方程组

$$\begin{aligned} f''' - M^2 f' - f'^2 + f f'' + d^2 + \\ \beta(2f f' f'' - f^2 f''') = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= S \\ f'(0) &= 1 + \gamma f''(0) \\ f'(+\infty) &= d \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, $\beta = \lambda c$ 为流体黏弹性参数, $M^2 = \beta B_0^2 / c\rho$ 为磁场参数, $\gamma = N\sqrt{c/v}$ 为滑移参数, $S = \frac{V_0}{\sqrt{vc}}$ 为吸入喷注参数, 而 $d = a/c = u_e/u_w$ 为速度比例参数.

2 同伦法求解

下面用同伦分析法求解非线性方程 (6) 和 (7). 表示一个函数需要一个完备的基函数序列来表达, 根据边界条件 (7), 函数 $f(\eta)$ 可以由以下的基函数

$$\{\eta^i e^{-k\eta} | i \geq 0, k \geq 0\}$$

表示为下列形式

$$f(\eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k} \eta^i e^{-k\eta}$$

式中, $a_{i,k}$ 均为系数.

根据边界条件 (7), 以

$$f_0(\eta) = S + d\eta + \frac{1-d}{1+2\gamma} \eta \exp(-\eta) \quad (8)$$

作为函数 $f(\eta)$ 的初始近似, 并构造同伦的辅助线性算子 $L_f(f) = f''' + f''$, 且它具有如下属性 $L_f(C_1 + C_2\eta + C_3e^{-\eta}) = 0$, C_1, C_2, C_3 均为常数.

下面构造零阶变形方程组

$$(1-q)L_f[F(\eta, q) - f_0(\eta)] = qh_f H_f(\eta) N_f[F] \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} F(0, q) &= S \\ F'(0, q) &= 1 + \gamma F''(0, q) \\ F'(\infty, q) &= d \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, 非线性算子 $N_f[F(\eta, q)]$ 定义为

$$\begin{aligned} N_f[F] &= \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + d^2 - \\ &M^2 \frac{\partial F}{\partial \eta} + \beta \left(2F \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - F^2 \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \right) \end{aligned}$$

式中, $q \in [0, 1]$ 为一个嵌入系数, h_f 为辅助非零参数, 而 $H_f(\eta)$ 为辅助非零函数. 当 q 从 0 连续变化到 1 时, 函数 $F(\eta, q)$ 就从初始解 $f_0(\eta)$ 连续变化到精确解 $f(\eta)$, 利用泰勒级数展开定理, 得

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, q) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\eta) q^m \\ f_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(\eta, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在零阶变形方程 (9) 和 (10) 的两边均对 q 求 k 阶导数, 然后令 $q = 0$, 最后在等式两边同除以 $k!$, 得到如下的 k 阶变形方程组

$$L_f[f_k(\eta) - \chi_k f_{k-1}(\eta)] = h_f H_f(\eta) R_{fk} \quad (12)$$

且它满足如下边界条件

$$\left. \begin{aligned} f_k(0) &= f'_k(+\infty) = 0 \\ f'_k(0) &= \gamma f''_k(0) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中, $\chi_k = \begin{cases} 0, & k=1 \\ 1, & k>1 \end{cases}$ 和

$$\begin{aligned} R_{fk} &= \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} N_f[F(\eta, q)]}{\partial q^{k-1}} \Big|_{q=0} = \\ &f'''_{k-1} + \sum_{s=0}^{k-1} f_{k-1-s} f''_s - f'_{k-1-s} f'_s - M^2 f'_{k-1} + \\ &\beta \sum_{s=0}^{k-1} \left[f_{k-1-s} \sum_{l=0}^s (2f'_{s-l} f''_l - f_{s-l} f'''_l) \right] + \\ &(1 - \chi_k) d^2 \end{aligned}$$

那么, 以此类推, 可得线性方程 (6) 和 (7) 的 L 阶近似

$$f(\eta) \approx f_0(\eta) + \sum_{m=1}^L f_m(\eta) = f_0(\eta) + f_1(\eta) + f_2(\eta) + \cdots$$

3 解的验证与讨论

同伦分析法的敛散性和收敛的速度强烈依赖于辅助参数 h_f 和辅助函数 $H_f(\eta)$ 的选取. 为了计算方便, 令 $H_f(\eta) = 1$. 一般来说, 通过画 h 曲线图找到 h_f 对应的收敛区间. 图 1 和图 2 给出了确定参数 h_f 的 h 曲线图. 在本文中选取参数 $h_f = -0.22$. 由表 1 可以看到, 当 $h_f = -0.22$ 时, 同伦级数解与文献 [5] 中的解吻合较好.

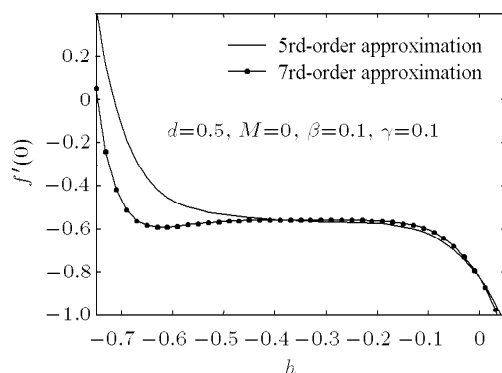


图 1 $f'(0)$ 的 h 曲线图

Fig.1 The $f'(0)$ - h curve

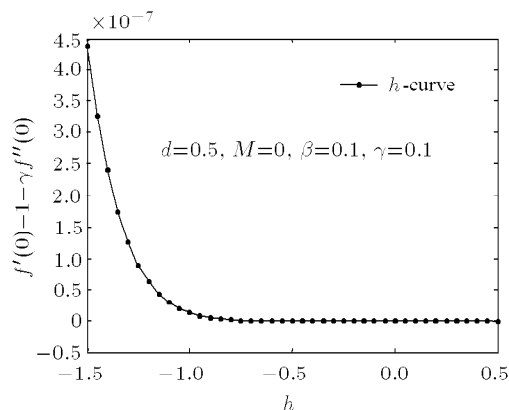


图 2 $f'(0) - 1 - \gamma f''(0)$ 的 h 曲线图

Fig.2 The $f'(0) - 1 - \gamma f''(0)$ - h curve

图 3 和图 4 描绘了流体黏弹性参数 β 对壁面摩擦力和无量纲切向速度的影响. 从表 2 和图 3 可以看到: 当壁面无喷注时, 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 是黏弹性参数 β 的增函数, 而且随着吸入速度的增加, 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 是增大的. 而当壁面有喷注时, 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 却是黏弹性参数 β 的减函数, 而且是缓慢的减少. 从图 4 可以看到: 随着黏弹性参数 β 的增加, 无量纲切向速度 $f'(\eta)$ 是减少的, 而且边界层变薄. 图 5 到图 6 描绘了滑移边界参数 γ 对壁面摩擦力和无量纲切向速度的影响. 从图中可以看到, 当 $d < 1$ 时, 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 和无量纲切向速度 $f'(\eta)$ 随着滑移边界参数 γ 增大而减小, 即滑

表 1 同伦解 $f''(0)$ 与 Wang^[5] 数据的比较

Table 1 Comparison of Wang^[5] with the HAM solutions $f''(0)$

γ	0	0.3	1.0	2.0	5.0	20.0
Wang ^[5]	-1.000	-0.701	-0.430	-0.284	-0.145	-0.043 8
HAM	-1.000 26	-0.707 76	-0.440 31	-0.286 90	-0.151 11	-0.046 78

Note: $\beta = -0, M = 0.0, s = 0.0, d = 0$

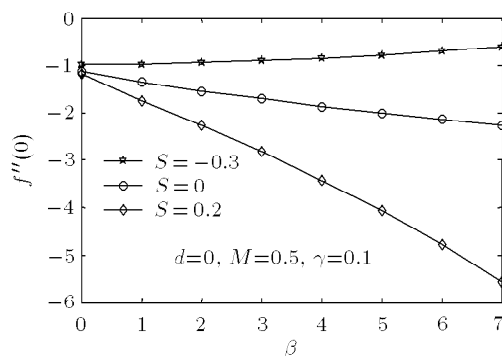


图 3 黏弹性参数 β 对壁面剪切力 $f''(0)$ 的影响

Fig.3 Effects of β on $f''(0)$

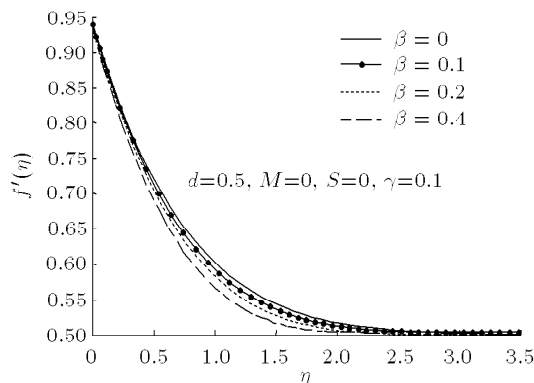
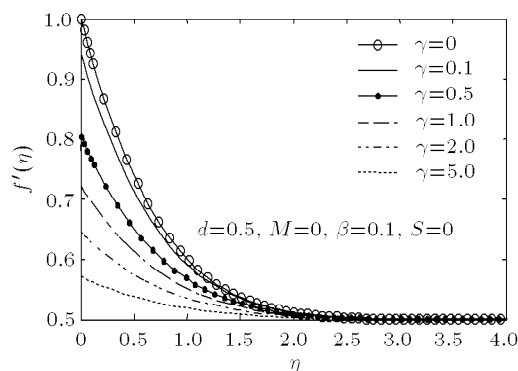
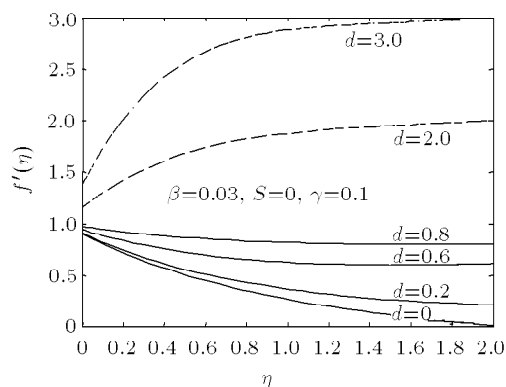
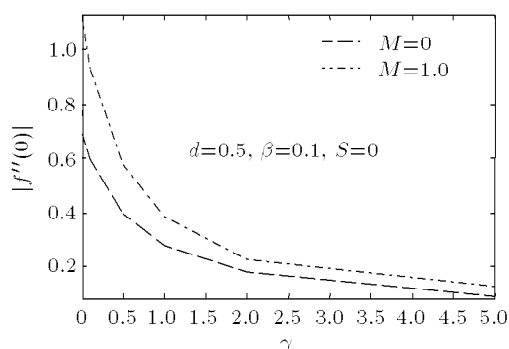
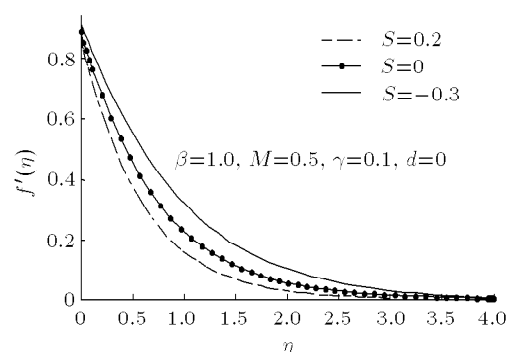


图 4 无量纲切向速度 $f'(\eta)$ 分布图

Fig.4 Effects of β on $f'(\eta)$

图 5 无量纲切向速度 $f'(\eta)$ 分布图Fig.5 Effects of γ on $f'(\eta)$ 图 7 速度比例参数 d 对变量 $f'(\eta)$ 的影响Fig.7 Effects of d on $f'(\eta)$ 图 6 滑移边界 γ 对壁面剪切力 $|f''(0)|$ 的影响Fig.6 Effects of γ on $|f''(0)|$ 图 8 抽吸喷注参数 S 对变量 $f'(\eta)$ 的影响Fig.8 Effects of S on $f'(\eta)$ 表 2 同伦解 $f''(0)$ Table 2 Initial values $f''(0)$

β	$S = -0.3$	$S = 0$	$S = 0.3$
0	-0.858 65	-0.969 57	-1.093 52
1	-0.841 70	-1.110 37	-1.532 10
2	-0.814 29	-1.227 52	-1.970 05
3	-0.778 23	-1.328 05	-2.411 53
4	-0.734 38	-1.416 04	-2.866 11
5	-0.683 22	-1.494 28	-3.342 41

Note: $M = 0.5, \gamma = 0.1, d = 0$

移边界参数 γ 小的黏弹流体对壁面和边界层内流场施加了更大的摩擦力。而且当滑移边界参数 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, 壁摩擦力 $|f''(0)|$ 趋向于 0。另外, 从图 6 还可以看到, 增大磁场能增加壁面摩擦力。

图 7 和图 8 描绘了在滑移边界条件下, 速度比例参数和吸入喷注参数对无量纲切向速度 $f'(\eta)$ 的影响。从图 7 可以看到: 当主流速度大于延伸速度时, 形成一个边界层; 而且随着 d 的减少, 无量纲速度边界层变厚; 而当 $d < 1$ 时, 却形成一个反边界层。

4 结 论

(1) 本文研究了上随体 Maxwell 流体在滑移流区的动量传输问题。通过引入适当的相似变换将控制方程组转化成一类常微分方程的非线性边值问题, 利用同伦分析方法首次获得问题的近似解析解, 对同伦解所推出的结果与文献中的数值解进行了比较验证, 证实了该文提出的近似解析方法的准确性和可靠性。

(2) 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 随着磁场参数的增加而增加, 而随着滑移边界参数 γ 的增大而减小, 即参数 γ 小的流体对壁面和边界层内流场施加了更大的剪切力。

(3) 当壁面无喷注时, 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 随着 β 的增大而增大; 而当壁面有喷注时, 壁面摩擦力 $|f''(0)|$ 却随着 β 的增大而缓慢地减小。

(4) 当 $d > 1$ 时, 无量纲切向速度 $f'(\eta)$ 随着 γ , β 和 S 的增大而减小, 而且形成一个边界层, 并随着 d 的增加, 无量纲速度边界层变薄。而当 $d < 1$ 时却形成一个反边界层。

(5) 本文得到的解析解不但便于深入研究流体流动的变化规律, 也可以作为检验非牛顿流数值方法计算精度的依据.

参 考 文 献

- 1 Mooney M. Explicit formulas for slip and fluidity. *J. Rheology*, 1931, 2(2): 210-222
- 2 朱恂, 辛明道. 滑移流区内微环缝槽道中的层流流动与换热. 工程热物理学报, 2001, 22(2): 203-206 (Zhu Xun, Xin Mingdao. Laminar flow and heat transfer in micro-annular channel in slip flow regime. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2001, 22(2): 203-206 (in Chinese))
- 3 Rao IJ, Rajagopal KR. The effect of the slip condition on the flow of fluids in a channel. *Acta Mech*, 1999, 135(3): 113-126
- 4 黄海, 孟光, 赵三星. 二阶滑移边界对微型气浮轴承稳态性能的影响. 力学学报, 2006, 38(5): 668-673 (Huang Hai, Meng Guang, Zhao Sanxing. The effects of second-order slip-flow on the steady performance of micro gas bearing. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(5): 668-673 (in Chinese))
- 5 Wang CY. Flow due to a stretching boundary with partial slip—an exact solution of the Navier-Stokes equations. *Chem Eng Sci*, 2002, 57(17): 3745-3747
- 6 Hayat T, Masood Khan, Ayub M. The effect of the slip condition on flows of an Oldroyd 6-constant fluid. *J Comput Appl Math*, 2007, 202(2): 402-413
- 7 Andersson III, Rousselet M. Slip flow over a lubricated rotating disk. *Int J Heat Fluid Flow*, 2006, 27(5): 329-335
- 8 Labropulu F, Li D. Stagnation-point flow of a second-grade fluid with slip. *Int J Non-Linear Mech*, 2008, 43(9): 941-947
- 9 郑连存, 盛晓艳, 张欣欣. 一类 Marangoni 对流边界层方程的近似解析解. 物理学报, 2006, 55(10): 5298-5307 (Zheng Liancun, Sheng Xiaoyan, Zhang Xinxin. Analytical approximate solutions for Marangoni convection boundary layer equations. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(10): 5298-5307 (in Chinese))
- 10 Zheng Liancun, Ma Fei, Zhu Jing. Analytic decomposition and numerical procedure for solving the singular boundary value problem arising in viscous flows. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2006, 13(3): 226-229
- 11 张燕, 郑连存, 张欣欣. 边界耦合的 Marangoni 对流边界层问题的近似解析解. 物理学报, 2009, 58(8): 5501-5506 (Zhang Yan, Zheng Liancun, Zhang Xinxin. The analytical approximate solution for Marangoni convection in a liquid layer with coupled boundary conditions. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(8): 5501-5506 (in Chinese))
- 12 Liao Shijun. Beyond perturbation: introduction to homotopy analysis method. [PhD Thesis]. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, 2003
- 13 Liao Shijun. An analytic approximate technique for free oscillations of positively damped systems with algebraically decaying amplitude. *Int J Non-Linear Mech*, 2003, 38(8): 1173-1183
- 14 Hayat T, Abbas Z, Sajid M, et al. The influence of thermal radiation on MHD flow of a second grade fluid. *Int J Heat Mass transfer*, 2007, 50(5-6): 931-941
- 15 Zhu Jing, Zheng Liancun, Zhang Xinxin. Analytic solution of stagnation-point flow and heat transfer over a stretching sheet based on homotopy analysis. *Appl Math Mech*, 2009, 30(4): 463-474
- 16 Liao Shijun. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2010, 15(8): 2003-2016
- 17 Sadeghy K, Najafi AH, Saffaripour M. Sakiadis flow of an upper-convected Maxwell fluid. *Int J Non-Linear Mech*, 2005, 40(9): 1220-1228

(责任编辑: 陶彩军)

THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE STAGNATION POINT FLOW OF AN UPPER-CONVECTED MAXWELL FLUID WITH SLIP¹⁾

Zhu Jing^{*,2)} Zheng Liancun^{*} Zhang Xinxin[†]

^{*}(*Applied Science School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China*)

[†](*Mechanical Engineering School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China*)

Abstract During recent years, with the rapid development of science and technology in micro- and nano-measuring technologies, it has been found that there are many significant differences in fluid flow at between macro-scale and micro/nano-scale, such as wall-slip phenomenon. Fluids exhibiting slip are important in technological applications. Therefore better understanding of the phenomenon of slip is necessary. This paper presents a theoretical analysis for the MHD stagnation-point flows of an upper-convected Maxwell fluid towards a stretching sheet with slip. The governing system of partial differential equations is first transformed into a system of dimensionless ordinary differential equations. By using the homotopy analysis method, a convergent series solution is obtained. The reliability and efficiency of series solutions are illustrated by good agreement with numerical results in the literature. Besides, the effects of the slip parameter, the magnetic field parameter, velocity ratio parameter, suction/injection velocity parameter and elasticity number on the flow are investigated. The flow and shear stress depend heavily on the velocity slip parameter γ . Also, effect of increasing values of γ is to decrease the variation of $|f''(0)|$ and the surface shear stress $|f''(0)|$ is close to 0 with $\gamma \rightarrow \infty$. The dimensionless velocity $f'(\eta)$ decreases with an increase in elasticity number β and γ when velocity ratio parameter d is large than 1. However, an opposite behavior has been found when $d < 1$.

Key words upper-convected Maxwell fluid, HAM, approximate solution, slip flow, viscoelasticity

Received 3 November 2009, revised 27 May 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundations of China (50936003) and the Open Project of State Key Laboratory for Advanced Metals & Materials, University of Science and Technology Beijing (2009Z-02).

2) E-mail: hahazhujing@sohu.com