

波动方程数值模拟的一种显式方法

—— 界面节点公式的构建¹⁾

谢志南^{*,2)} 廖振鹏^{*,†}

^{*}(中国地震局工程力学研究所, 哈尔滨 150080)

[†](哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要 针对成层介质中标量波动的数值模拟, 基于波速有限原理和波动方程柯西问题的解, 导出了界面点在一个短时间窗内的精确解, 由此给出了具有高阶精度的界面节点显式递推公式的一种构建方法, 并以构造弹性杆界面节点的递推公式为例说明其要点. 给出了与已有内节点递推公式的精度相匹配的二阶和四阶界面节点递推公式. 由此构成的计算格式具有“异质格式”编程简便的特性, 更合理地考虑了界面影响. 最后, 通过数值试验检验这一匹配方案的精度和稳定性.

关键词 波动方程, 时域数值模拟, 显式递推公式, 界面节点

中图分类号: P315 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)01-0154-08

引 言

就处理非均匀介质中的波动问题而言, 发展时域数值模拟技术是一个重要的研究领域^[1-3]. 就时域波动的数值模拟而言, 通常采用有限元或有限差分技术. 有限元这一工程界广泛使用的技术是目前公认的模拟介质分界面的有力工具. 基于波动的局部性(locality)采用集中质量有限元技术完善稳定的显式解耦方法是一个值得重视的研究方向^[4], 该技术克服了由于常微分方程组中包含一致质量阵而必须使用隐式时间积分的弊病^[3,5]. 近 20 年来基于 Legendre 正交多项式展开的谱单元法的提出进一步改进了此项技术, 并已广泛应用于分析地学和工程中波动问题, 特别是在高拱坝抗震研究以及大型盆地内强地震动的数值模拟中获得了应用^[6-7]. 目前对空间离散后所得的常微分方程组常采用二阶精度的时间积分方法, 如中心差分法、Newmark- β 方法. 最近研究人员将 ADER 高精度时间积分法与谱单元法结合给出了更高精度阶的离散方案^[8], 这一方案的计算效率和稳定性尚待进一步研究. 有限差分法在大型时域波动数值模拟中亦获得广泛应用, 尤其在地学和电磁学领域. 工程中常用的有限差分法人都采

用计算高效的异质格式(heterogeneous scheme)^[9-10], 其特点是利用均匀网格划分计算区域, 对全部内节点使用相同形式的节点递推公式, 递推公式的系数依据节点所在位置的介质参数确定, 这极大地方便了程序的编制. 然而, Zahradnik 对几种常用的异质格式的精度分析表明^[11]: 在介质分界面平行于网格时这些格式对界面点模拟的精度仅为一阶, 且当介质分界面不平行于网格时精度为零阶. Gustafsson 在常用的速度应力交叠解耦格式基础上, 利用修正方程法建立了一维声波方程的时空精度均为四阶的异质格式^[12], 该格式对界面点模拟的精度亦仅为一阶^[13]. 此外, 异质格式在介质参数变化剧烈的分界面存在计算失稳问题^[14].

文献[4]从波速有限原理及波动方程柯西问题的解导出的内域节点在一个短时间窗内的精确解出发, 提出了构建均匀区域内节点递推公式的方法. 本文着手讨论分层均匀的成层介质交界面上网格节点递推公式的构建问题. 为阐明构建方法的要点本文讨论限于一维模型, 给出了精度阶与文献[4]所提供的稳定的内域节点递推公式相匹配的二阶、四阶格式, 并通过数值试验检验了该方案的精度, 以及不

2009-09-07 收到第 1 稿, 2010-06-08 收到修改稿.

1) 中国地震局工程力学研究所基本科研业务费专项(2008B012, 2006A02, 2008B010) 和国家自然科学基金重大研究计划(90715038)资助项目.

2) E-mail: xiezhinan1984@hotmail.com

存在由于分界面介质参数剧烈变化而导致的计算失稳问题。本文其余部分组织如下：第 1 节讨论了在短时间窗内界面及其邻近点的精确解的求解方法，并以具有界面的一维弹性杆为例详细说明，在此基础上给出了构建二阶和四阶界面节点递推公式的方法和结果。第 2 节分析界面节点递推公式的精度，论证了界面和内域节点精度阶的一致性，给出了统一的计算格式。第 3 节给出数值试验结果，检验了建议计算方案的精度和稳定性。文末对此项研究作了小结。

1 界面点递推公式

本节首先讨论推导界面节点递推公式的原理，然后以构建弹性杆界面节点的递推公式为例阐明构建方法的要点。

1.1 构建界面节点递推公式的原理

图 1 为分层均匀介质模型的示意。假定界面点 P_0 两侧波速分别为常数 c_j 和 c_{j+1} ，位移分布和速度分布分别记为 $u(x, t)$ 和 $u_t(x, t)$ ， x 为坐标矢量， t 为时间。不失一般性，假定界面点 P_0 位于坐标原点，若已知 $t = 0$ 时刻的 $u(x, 0)$ 和 $u_t(x, 0)$ ，考察点 P_0 在 $t = \Delta t$ 时刻的位移 $u(0, \Delta t)$ 和速度 $u_t(0, \Delta t)$ 。设 Δx 小于界面点 P_0 至相邻界面的最短距离，依据波速有限原理，若 $\Delta t \leq \min(\Delta x/c_j, \Delta x/c_{j+1})$ ，则 $u(0, \Delta t)$ 和 $u_t(0, \Delta t)$ 取决于在点 P_0 邻域 $|x| \leq \Delta x$ 上介质的性质及初始位移和速度 $u(x, 0)$ 和 $u_t(x, 0)$ ，而与该邻域之外 $|x| > \Delta x$ 上介质的性质及初始位移和速度无关。因此，就计算点 P_0 在临近的下一时刻的运动而言，可将 P_0 点邻域内的界面近似为平面，并采用以无限平面为界面连接的两个具有不同介质参数的均匀半无限空间的数学模型。基于这一模型，点 P_0 在

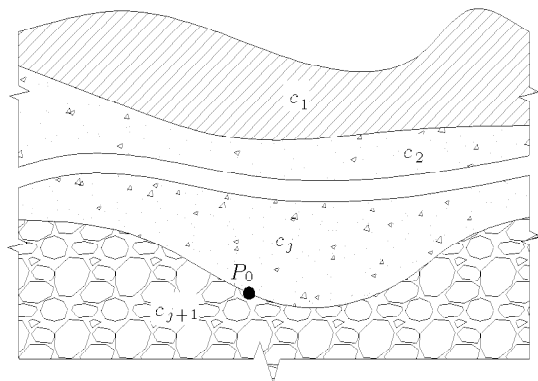


图 1 分层均匀介质模型示意图

Fig.1 Schematic of model of uniformly layered medium

一个短的时间窗内的精确解可写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} u(0, \Delta t) &= L_u[u(x, 0), u_t(x, 0)], \\ u_t(0, \Delta t) &= L_{u_t}[u(x, 0), u_t(x, 0)], \end{aligned} \right\} |x| \leq \Delta x \quad (1)$$

式中， L_u 和 L_{u_t} 为线性算子， $L_{u_t}[\cdot, \cdot]$ 可通过 $L_u[\cdot, \cdot]$ 对时间求导数得到。下面以一维弹性波界面问题为例阐明导出式 (1) 的要点。

考虑无限弹性杆中剪切波的传播。设分界面位于 $x = 0$ 处，界面两侧波动方程分别为

$$\partial_t^2 u(x, t) = c_1^2 \partial_x^2 u(x, t), \quad x > 0 \quad (2)$$

$$\partial_t^2 u(x, t) = c_2^2 \partial_x^2 u(x, t), \quad x < 0 \quad (3)$$

式中， c_1, c_2 分别为两侧的剪切波波速， $c_i = \sqrt{\mu_i/\rho_i}$ ， $i = 1, 2$ ； μ_i 和 ρ_i 分别为剪切刚度和密度。界面连续条件为

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} u(x, t) = u(0, t) \\ \mu_1 \lim_{x \rightarrow 0^+} \partial_x u(x, t) &= \mu_2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \partial_x u(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

初值条件为

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$f(x)$ 和 $g(x)$ 为给定空间函数。上述初值问题可分两步求解：首先，基于界面位移连续条件将上述问题拆分为初值已知、一端给定位移输入 $u(0, t)$ 的两个半无限弹性杆中的波传播问题，并分别求得这两个问题的解析解；然后，依据两个解析解满足界面应力连续条件即可求得未知函数 $u(0, t)$ ，对 $u(0, t)$ 进行时间求导即可得到 $u_t(0, t)$ ，获得界面点的精确解，进而获得界面两侧的精确解。令所得结果中 $t = \Delta t$ ，则得式 (1) 在一维情形下的表达式。

$$\begin{aligned} u(0, \Delta t) &= \beta[\alpha f(c_1 \Delta t) + f(-c_2 \Delta t)] + \\ &\quad \beta[\alpha G(c_1 \Delta t)/c_1 - G(-c_2 \Delta t)/c_2] \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} u_t(0, \Delta t) &= \beta[\alpha c_1 f'(c_1 \Delta t) - c_2 f'(-c_2 \Delta t)] + \\ &\quad \beta[\alpha g(c_1 \Delta t) + g(-c_2 \Delta t)] \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\left. \begin{aligned} G(z) &= \int_0^z g(x) dx, \quad f'(x) = df(x)/dx \\ \beta &= 1/(1 + \alpha), \quad \alpha = \rho_1 c_1 / \rho_2 c_2 \end{aligned} \right\} \quad (5c)$$

通过式 (5) 右端的泰勒展开式，并用界面节点及其邻近节点的离散数据表示展开式的系数即可导出界面节点的递推公式。

1.2 界面及其邻近节点的递推公式

引入一维时空离散网格

$$x_j = \begin{cases} j\Delta x_1, & j = 0, 1, 2, \dots \\ j\Delta x_2, & j = -1, -2, \dots \end{cases}$$

$$t_p = p\Delta t, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

式中, Δt 为时间步距, Δx_1 和 Δx_2 分别为界面右侧和左侧的空间步距 (图 2). 为模拟弹性杆分界面的反射和透射现象, 假定空间步距与波速成正比^[3]

$$c_1/\Delta x_1 = c_2/\Delta x_2 \quad (6)$$

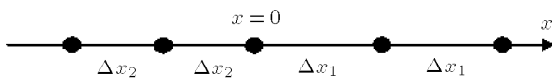


图 2 一维非规则网格示意图

Fig.2 Schematic of a 1-D irregular grid

网格节点的离散位移和速度值分别记为 $u_j^p \approx u(x_j, t_p)$ 和 $v_j^p \approx \Delta t u_t(x_j, t_p)$. 为了量纲整齐, 在定义节点速度离散值 v_j^p 时引入了时间步距 Δt .

从式 (5) 导出界面节点的递推公式的要点如下: 首先对式 (5a) 和 (5b) 的右端作泰勒展开, 并将展开式截止到要求的精度阶; 然后在保证相同精度阶的条件下, 用 $t = 0$ 时刻点 P_0 点及其邻近网格节点上的位移离散值 u_j^0 以及速度离散值 v_j^0 表示展开式内的非零导数项. 为阐明上述要点, 首先导出对应于式 (5a) 的具有三阶精度的节点递推公式. 准确到三阶精度, 式 (5a) 右端第 1 个方括号内表达式的泰勒公式展开式可以写成

$$\begin{aligned} & \alpha f(c_1\Delta t) + f(-c_2\Delta t) = \\ & \alpha \left[f(0^+) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0^+} c_1\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^+} (c_1\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x \rightarrow 0^+} (c_1\Delta t)^3 \right] + \\ & f(0^-) - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0^-} c_2\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^-} (c_2\Delta t)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x \rightarrow 0^-} (c_2\Delta t)^3 \end{aligned} \quad (7)$$

依据界面应力和位移连续条件 (4) 及两侧波动方程 (2), (3) 可导出的如下关系式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0^-} &= \alpha \frac{c_1}{c_2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0^+} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^-} &= \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^+} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x \rightarrow 0^-} &= \alpha \frac{c_1^3}{c_2^3} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x \rightarrow 0^+} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (7) 得到

$$\begin{aligned} & \alpha f(c_1\Delta t) + f(-c_2\Delta t) = \\ & (\alpha + 1) \left[f(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^+} (c_1\Delta t)^2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

为确定式 (9) 中 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^+}$, 将 $u_1^0 = f(\Delta x_1)$ 和 $u_{-1}^0 = f(-\Delta x_2)$ 分别在 $x \rightarrow 0^+$ 和 $x \rightarrow 0^-$ 处做准确到三阶精度的泰勒展开, 依据界面连接条件 (4) 及式 (8) 和离散步距的取法 (6) 可以证明

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x \rightarrow 0^+} = \frac{2\beta}{\Delta x_1^2} [\alpha u_1^0 + u_{-1}^0 - (\alpha + 1)u_0^0]$$

将上式和 $f(0) = u_0^0$ 代入式 (9) 得到

$$\begin{aligned} & \alpha f(c_1\Delta t) + f(-c_2\Delta t) = \\ & (\alpha + 1)u_0^0 + \Delta\tau^2 [\alpha u_1^0 + u_{-1}^0 - (\alpha + 1)u_0^0] \end{aligned}$$

式中, $\Delta\tau = c_1\Delta t/\Delta x_1 = c_2\Delta t/\Delta x_2$. 类似地可得式 (5a) 右端第 2 个方括号内表达式的泰勒展开式. 将这两个泰勒展开式代入式 (5a) 则得 u_0^1 的递推公式. 用类似方法由式 (5b) 可得 v_0^1 的递推公式. 界面节点三阶递推公式写成

$$\left. \begin{aligned} u_0^1 &= u_0^0 + v_0^0 + 2\beta [\xi_1 (\alpha D_+ u_0^0 - D_- u_0^0) + \\ & \quad \eta_1 (\alpha D_+ v_0^0 - D_- v_0^0)] \\ v_0^1 &= v_0^0 + 2\beta [\zeta_1 (\alpha D_+ u_0^0 - D_- u_0^0) + \\ & \quad \gamma_1 (\alpha D_+ v_0^0 - D_- v_0^0)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\xi_1 = \Delta\tau^2/2, \quad \eta_1 = \Delta\tau^2/6, \quad \zeta_1 = \Delta\tau^2, \quad \gamma_1 = \xi_1 \quad (11)$$

式中, $D_+ u_0^p = u_1^p - u_0^p$, $D_- u_0^p = u_0^p - u_{-1}^p$. 准确到精度阶 $2M + 1$ 将式 (5a) 和式 (5b) 的右端作泰勒展开, 并用节点位移 u_j^0 和速度 v_j^0 ($j = 0, \pm 1, \dots, \pm M$) 表示展开式的系数, 则得精度阶为 $2M + 1$ 的界面节点递推公式. 若将界面节点坐标换成 x_j , 零时刻换成 t_p , 则界面节点递推公式可写成如下一般形式

$$\left. \begin{aligned} u_j^{p+1} &= u_j^p + v_j^p + \\ & \quad 2\beta \sum_{m=1}^M [\xi_m (\alpha D_+^m u_j^p - D_-^m u_j^p) + \\ & \quad \eta_m (\alpha D_+^m v_j^p - D_-^m v_j^p)] \\ v_j^{p+1} &= v_j^p + \\ & \quad 2\beta \sum_{m=1}^M [\zeta_m (\alpha D_+^m u_j^p - D_-^m u_j^p) + \\ & \quad \gamma_m (\alpha D_+^m v_j^p - D_-^m v_j^p)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中, $D_+^m u_j^p = u_{j+m}^p - u_j^p$, $D_-^m u_j^p = u_j^p - u_{j-m}^p$, 系数 $\xi_m, \eta_m, \zeta_m, \gamma_m$ 为 $\Delta\tau$ 的函数. 当阻抗比 $\alpha = 1$ 时式 (12) 简化为内节点递推公式

$$\left. \begin{aligned} u_j^{p+1} &= u_j^p + v_j^p + \\ &\sum_{m=1}^M [\xi_m (D_+^m u_j^p - D_-^m u_j^p) + \\ &\eta_m (D_+^m v_j^p - D_-^m v_j^p)] \\ v_j^{p+1} &= v_j^p + \\ &\sum_{m=1}^M [\zeta_m (D_+^m u_j^p - D_-^m u_j^p) + \\ &\gamma_m (D_+^m v_j^p - D_-^m v_j^p)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式 (13) 与文献 [4] 导出的均匀网格内节点递推公式 (20) 一致. 当 $M \geq 2$ 时, $2(M-1)$ 个邻近界面的节点 ($j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M-1)$) 不能直接使用内节点递推公式 (13) 计算, 其递推公式需另行推导. 推导方法与构建界面节点递推公式类似. 首先, 邻近界面节点的精确解可通过将坐标原点移至界面邻近节点 j 由式 (5) 得到, 设 $j > 0$, 令式 (5) 中 $\alpha = 1$, $c_2 = c_1$ 则得界面右侧精确解

$$\begin{aligned} u(0, \Delta t) &= \frac{1}{2} [f(c_1 \Delta t) + f(-c_1 \Delta t)] + \\ &\frac{1}{2} [G(c_1 \Delta t)/c_1 - G(-c_1 \Delta t)/c_1] \\ u_t(0, \Delta t) &= \frac{1}{2} [c_1 f'(c_1 \Delta t) - c_1 f'(-c_1 \Delta t)] + \\ &\frac{1}{2} [g(c_1 \Delta t) + g(-c_1 \Delta t)] \end{aligned}$$

若 $j < 0$, 仅需将上式中 c_1 换成 c_2 . 与导出界面点递推公式相似, 将上式右端利用节点自身以及 $2M$ 个邻近节点的位移、速度值展开, 但展开时须考虑界面连续条件. 由此可将界面及其邻近节点的递推公式写成如下统一形式

$$\left. \begin{aligned} u_j^{p+1} &= u_j^p + v_j^p + \\ &\sum_{m=1}^M [\xi_m (a_{j+m} u_{j+m}^p + a_j u_j^p + a_{j-m} u_{j-m}^p) + \\ &\eta_m (a_{j+m} v_{j+m}^p + a_j v_j^p + a_{j-m} v_{j-m}^p)] \\ v_j^{p+1} &= v_j^p + \\ &\sum_{m=1}^M [\zeta_m (a_{j+m} u_{j+m}^p + a_j u_j^p + a_{j-m} u_{j-m}^p) + \\ &\gamma_m (a_{j+m} v_{j+m}^p + a_j v_j^p + a_{j-m} v_{j-m}^p)] \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

当 $M \leq 2$ 时

$$\left. \begin{aligned} a_{j+m} &= 1, \quad a_{j-m} = \begin{cases} 2\beta, & j-m < 0 \\ 1, & j-m \geq 0 \end{cases} \\ j &= 1, 2, \dots, (M-1) \\ a_{j-m} &= 1, \quad a_{j+m} = \begin{cases} 2\alpha\beta, & j+m > 0 \\ 1, & j+m \leq 0 \end{cases} \\ j &= -1, 0, \dots, -(M-1) \\ a_{j+m} &= 2\alpha\beta, \quad a_{j-m} = 2\beta, \quad j = 0 \\ a_j &= -(a_{j+m} + a_{j-m}), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm(M-1) \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

当 $M > 2$ 时, 式 (14b) 需做修正, 对于更高阶的离散格式本文不予讨论. 若令 $j = 0$, 式 (14a) 退化为界面节点递推公式 (12); 当 $\alpha = 1$, 式 (14a) 退化为式 (13), 即式 (14a) 亦适用于内域节点 $|j| \geq M$. 不难看出, 本文计算方案保持了异质格式的特性: 全部网格节点使用相同形式的递推公式 (14a), 仅需依据节点所在位置介质的性质来调整递推公式的系数. 不同的是, 按照本文方案全部网格节点的精度阶是匹配的; 此外, 在高波速区采用粗网格, 在低波速区采用细网格, 大大降低了计算量. 式 (14a) 中的系数 $\xi_m, \eta_m, \zeta_m, \gamma_m$ 均为 $\Delta\tau$ 的函数, 它们可以在导出递推公式的过程中确定, 例如, 式 (11) 给出了 $M = 1$ 时的系数. 若它们按这些函数取值, 全部节点递推公式的精度阶皆达到 $2M + 1$. 但文献 [4] 指出这一计算方案是不稳定的. 为了获得稳定的内节点递推公式, 需要在了解系数 $\xi_m, \eta_m, \zeta_m, \gamma_m$ 与节点递推公式精度阶之间关系的基础上降阶和调整系数. 对于界面节点及其邻近节点的递推公式 (14a), 亦须完成类似工作.

2 精度阶分析和计算方案

式 (14a) 所含两式的截断误差 eu 和 ev 定义为式 (14a) 中相应递推公式左端与右端之差, 并将式中的离散值理解为连续模型的精确解 $u(x, t)$ 以及 $\Delta t v(x, t)$ 在相应节点和离散时刻所取之值. 将 u_j^{p+1} , v_j^{p+1} 和 u_{j+m}^p , v_{j-m}^p 相对于 $x = j\Delta x$ 和 $t = p\Delta t$ 分别作时间和空间泰勒展开, 利用波动方程、界面连续条件、空间步距的选择准则 (6) 经冗长代数操作后可得

$$eu = \sum_{n=0}^{\infty} C_{u,n} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Delta t^n, \quad ev = \sum_{n=0}^{\infty} C_{v,n} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \Delta t^n \quad (15)$$

eu 各阶误差项的系数 $C_{u,n}$ 为

$$C_{u,0} = C_{u,1} = 0 \quad (16a)$$

n 为偶数且 $n \geq 2$

$$C_{u,n} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{n!} \Delta\tau^{-n} \sum_{m=1}^M \xi_m m^n \quad (16b)$$

n 为奇数且 $n \geq 3$

$$C_{u,n} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n-1)!} \Delta\tau^{-(n-1)} \sum_{m=1}^M \eta_m m^{n-1} \quad (16c)$$

ev 各阶误差项的系数 $C_{v,n}$ 为

$$C_{v,0} = C_{v,1} = 0 \quad (17a)$$

n 为偶数且 $n \geq 2$

$$C_{v,n} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} \Delta\tau^{-n} \sum_{m=1}^M \zeta_m m^n \quad (17b)$$

n 为奇数且 $n \geq 3$

$$C_{v,n} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{(n-1)!} \Delta\tau^{-(n-1)} \sum_{m=1}^M \gamma_m m^{n-1} \quad (17c)$$

式中, $\Delta\tau = c_1 \Delta t / \Delta x_1 = c_2 \Delta t / \Delta x_2$. 将式 (14a) 与无界面内域节点递推公式 (文献 [4] 中式 (20)) 相比, 包含界面参数 a_{j-m} , a_j 和 a_{j+m} 的前者明显地不同于后者, 有趣的是截断误差的分析结果式 (15)~式 (17) 和文献 [4] 中的式 (21) 和式 (23) 完全一致. 究其原因, 本文采用了式 (6) 给出的空间离散步距. 因此, 文献 [4] 的第 2.2 节关于内节点递推公式的精度阶与系数的关系之分析结果适用于存在界面的情形. 由此可知, 为保证式 (14a) 具有 $2M+1$ 精度, 其系数可按文献 [4] 中式 (26) 确定, 即当 $M=1$ 时, ξ_1 , η_1 , ζ_1 和 γ_1 按式 (11) 确定; 而当 $M=2$ 时

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\Delta\tau^4/6 + 2\Delta\tau^2/3, \quad \xi_2 = \Delta\tau^4/24 - \Delta\tau^2/24 \\ \eta_1 &= \Delta\tau^4/30 - 2\Delta\tau^2/9, \quad \eta_2 = (\eta_1 - \Delta\tau^2/6)/4 \\ \zeta_1 &= -2\Delta\tau^4/3 + 4\Delta\tau^2/3, \quad \zeta_2 = \Delta\tau^4/6 - \Delta\tau^2/12 \\ \gamma_1 &= \xi_1, \quad \gamma_2 = \xi_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

文献 [4] 指出: 若按式 (11) 和式 (18) 确定系数, 则内节点递推公式 (当 $\alpha=1$ 时的式 (14a)) 不满足 von Neumann 稳定条件; 同时, 通过降阶和调整系

数给出了当 $M=1$ 和 2 时时间和空间精度阶皆为 $2M$ 的稳定的内节点递推公式, 其系数如下:

二阶方案 ($M=1$): $\alpha=1$ 时递推公式 (14a) 的系数由式 (11) 确定, 除 η_1 换成 η_1^* , $\eta_1^* = p_1^* \eta_1$, $p_1^* = 3/2$.

四阶方案 ($M=2$): $\alpha=1$ 时递推公式 (14a) 的系数由式 (18) 确定, 除 η_1 和 η_2 分别换成 η_1^* 和 η_2^* , $\eta_1^* = p_1^* \eta_1$, p_1^* 的取值见文献 [4] 中表 1, $\eta_2^* = (\eta_1^* - \Delta\tau^2/6)/4$.

就界面及其邻近节点的递推公式 (14a) 而言, 为获得 $2M$ 阶精度亦可通过调整系数 η_1 的取值以获得稳定的计算方案. 本文建议的调整方案与上述内节点调整方案相同. 下面通过数值试验检验这一方案的精度和稳定性.

3 数值试验

考虑文中第 2 节所述的一维弹性杆界面问题, 设界面左侧剪切波速 $c_2 = 500$ m/s, 右侧剪切波速为 $c_1 = 1000$ m/s, $\rho_1 = \rho_2$, 波阻抗 $\alpha = 2$. 给定初始速度 $g(x) = 0$, 初始位移 $f(x)$ 为 3 次 B 样条函数, $f(x)$ 的非零部分位于区间 $x \in [-25\text{m}, 0]$. 在 x 轴上截取足够大计算区以避免计算区端点边界条件对数值计算结果的影响. 利用二阶、四阶方案对于 $\Delta\tau$ ($\Delta\tau \leq 1$) 的不同取值进行了系统的数值试验. 主要试验结果如图 3~图 5 所示. 图 3 所示为 $t_0 = 0.1$ s 时刻二阶、四阶方案波形的数值解 ($\Delta\tau = 1$, $\Delta x_2 = 0.5$ m, $\Delta x_1 = 1.0$ m, $\Delta t = 0.001$ s) 与精确解 (见本文第 1.1 节) 的对比. 此时初始扰动已向左和右各行进了 50 m 和 100 m, 数值解与精确解几近重合. 为了看出精度阶对数值解误差的影响, 定义位移误差 $\delta u(j, p, \Delta\tau)$ 和速度误差 $\delta v(j, p, \Delta\tau)$

$$\delta u(j, p, \Delta\tau) = u_j^p - u(j\Delta x, p\Delta t) \quad (19a)$$

$$\delta v(j, p, \Delta\tau) = v_j^p - \Delta t v(j\Delta x, p\Delta t) \quad (19b)$$

式中, $-J \leq j \leq J$, $p \geq 0$, $u(j\Delta x, p\Delta t)$ 和 $v(j\Delta x, p\Delta t)$ 分别为位移和速度精确解. 为观察在 $t = p\Delta t$ 时刻整个波形的误差, 引入位移和速度误差的 l_2 范数

$$\|\delta u\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^J [\delta u(j, p, \Delta\tau)]^2} \quad (20a)$$

$$\|\delta v\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^J [\delta v(j, p, \Delta\tau)]^2} \quad (20b)$$

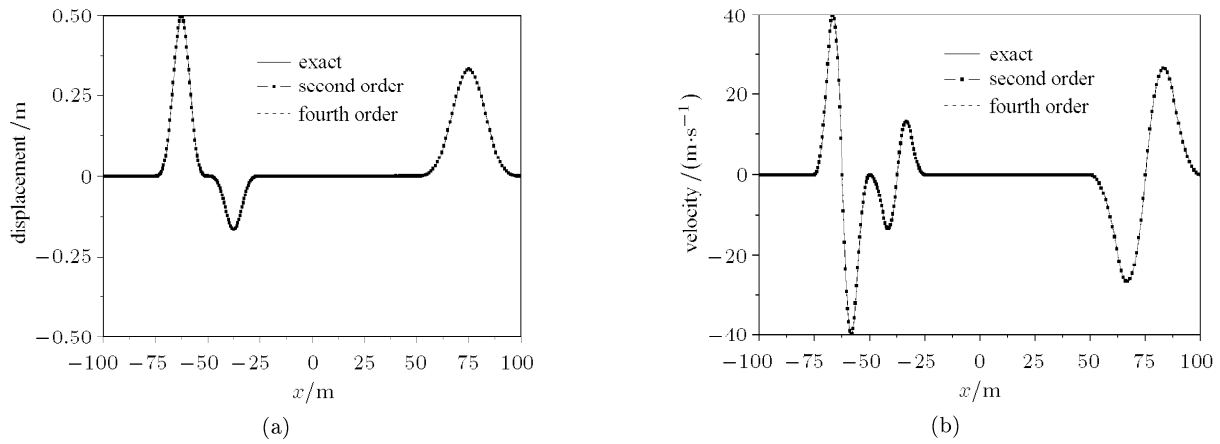
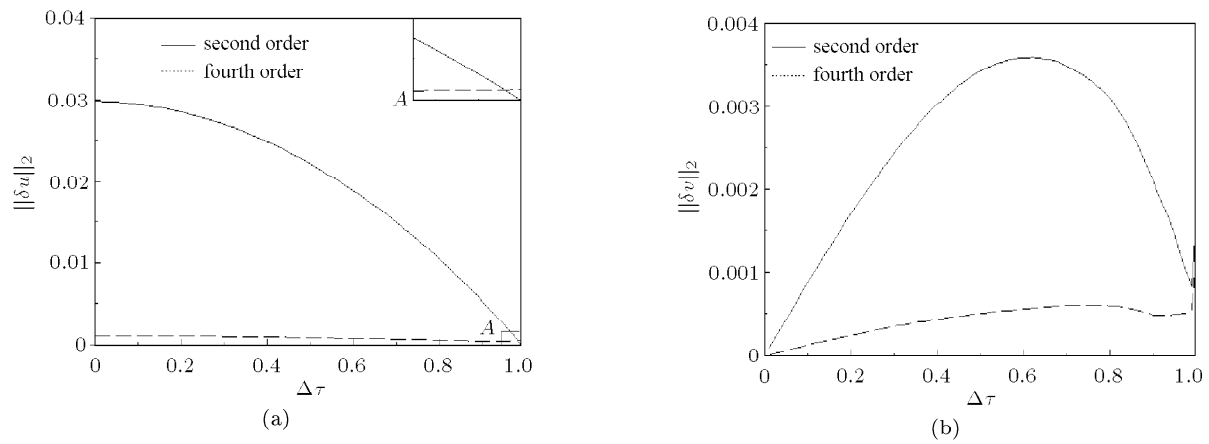
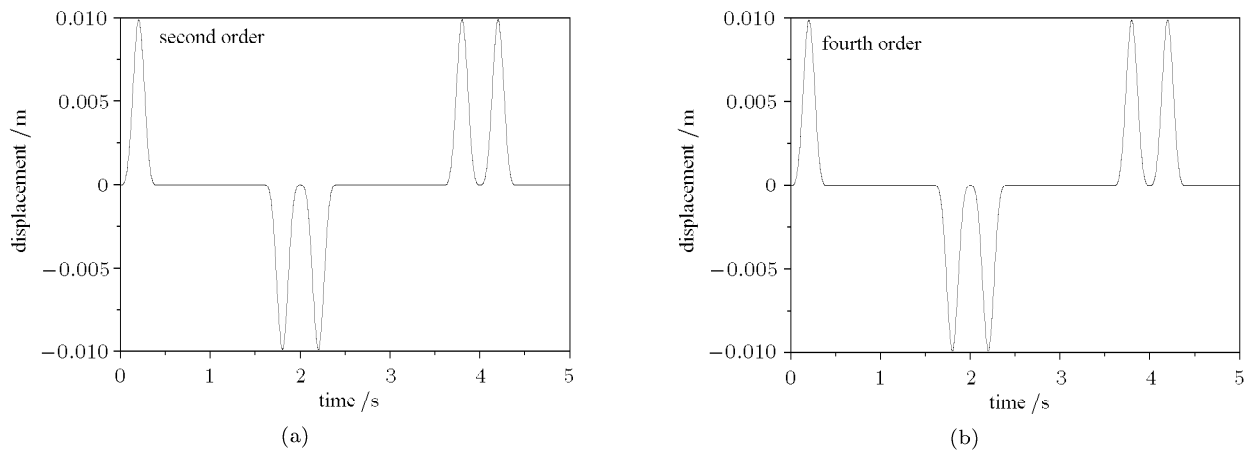
图 3 $t_0 = 0.1$ s 的位移和速度的波形Fig.3 The wave form of displacement and velocity at $t_0 = 0.1$ s图 4 位移误差范数 $\|\delta u\|_2$ 和速度误差范数 $\|\delta v\|_2$ Fig.4 The error norm of displacement $\|\delta u\|_2$ and the error norm of velocity $\|\delta v\|_2$ 

图 5 界面点位移时程

Fig.5 Displacement history at interface point

为了消除端部边界条件的影响, 根据 $M = 2$ 时数据的传播速度为每步 $2\Delta x$, 就本算例而言, 根据 $\Delta x = 0.5\text{m}$ 可得, 式中 J 的取值与 $\Delta\tau$ 的关系为: $J = 100/\Delta\tau + 50$. 图 4 所示为 $t = 0.1\text{s}$ 时的 $\|\delta u\|_2$ 和 $\|\delta v\|_2$ 相对 $\Delta\tau$ 的变化. 从图 4 可以看出, 几乎在 $\Delta\tau \in (0, 1]$ 的整个区间上四阶方案的误差范数显著地小于二阶方案. 例外出现在 $\Delta\tau = 1$ 处, 在该处四阶方案的误差大于二阶方案. 这是因为在算例中假定了初始速度为零, 在这一特殊情况下二阶方案在 $\Delta\tau = 1.0$ 处位移递推公式是精确的^[4]. 这表明在一般情况下递推公式的精度阶确是衡量数值解精度的有效指标. 为了检验本文计算方案的稳定性与分界面两侧的介质变化剧烈程度无关, 图 5 给出了阻抗比 $\alpha = 100$ 时二阶, 四阶方案的界面点位移时程的计算结果 (计算区为 $[-500\text{m}, 1000\text{m}]$, 两端固定, 初始位移 $f(x)$ 非零部分分布于区间 $x \in [-200\text{m}, 0]$, 其余参数为 $c_1 = 1000\text{m/s}$, $c_2 = 500\text{m/s}$, $\rho_1 = 50\rho_2$, $\Delta x_2 = 0.5\text{m}$, $\Delta x_1 = 1.0\text{m}$, $\Delta t = 0.0005\text{s}$, $\Delta\tau = 0.5$). 从图中可以看出, 在 $t \in [0, 5\text{s}]$ 内计算是稳定的, 还观察到在更长计算时间段内亦无失稳现象.

为进一步例证本文所给方案的稳定性, 最后考察对由 5 个波速分段均匀区构成的一维弹性杆的数值模拟. 该杆左端固定于 $x_0 = 0\text{m}$ 处, 右端固定于 $x_{\max} = 50\text{m}$ 处, 杆中 5 个波速分段均匀区的波速从左至右依次为 $c_1 = 100\text{m/s}$, $c_2 = 1000\text{m/s}$, $c_3 = 200\text{m/s}$, $c_4 = 600\text{m/s}$, $c_5 = 1500\text{m/s}$, 其中 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5$. 杆中 4 个介质分界面从左至右依次位于 $x_1 = 5\text{m}$, $x_2 = 15\text{m}$, $x_3 = 23\text{m}$, $x_4 = 35\text{m}$. 取离散空间步距为 $\Delta x_1 = 0.1\text{m}$, $\Delta x_2 = 1.0\text{m}$, $\Delta x_3 = 0.2\text{m}$, $\Delta x_4 = 0.6\text{m}$, $\Delta x_5 = 1.5\text{m}$, 空间离散步距 $\Delta t = 0.008\text{s}$. 初始速度为零, 初始位移 $f(x)$ 的非零部分位于区间 $x \in [23\text{m}, 35\text{m}]$. 利用指标 $\|u^n\|/\|u^0\|$ 来衡量本文方案的稳定性^[2]

$$\|u^n\| = \sum_{j=0}^J (u_j^n)^2 \Delta x_j$$

图 6 给出了隔 5s 取值的 $\|u^n\|/\|u^0\|$ 趋势图, 从图中可以看出在整个计算时间段内, 二阶及四阶方案均是稳定的, 同时可以看出四阶方案的数值阻尼要明显大于二阶方案. 因此尽管四阶方案的精度阶要高于二阶方案, 仍有必要在下步研究工作中深入分析比较两方案应用于长时间计算情况时的精度.

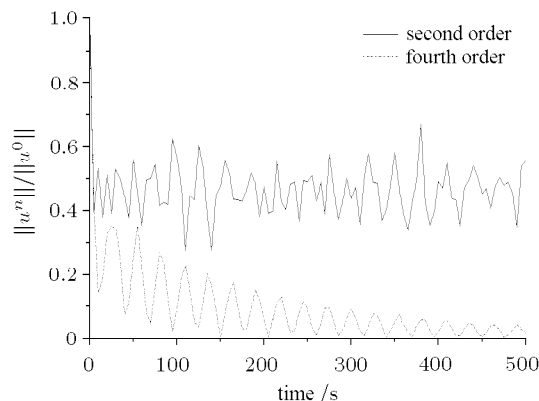


图 6 $\|u^n\|/\|u^0\|$ 趋势图

Fig.6 Tendency chart of $\|u^n\|/\|u^0\|$

4 结 语

本文通过一维波动模型阐明了一种界面节点递推公式构建方法的要点: 基于波速有限原理及波动方程柯西问题的解导出了界面点在一个短时间窗内的精确解, 由此再利用泰勒展开导出与内节点精度阶匹配的界面及其邻近节点递推公式. 给出了二阶和四阶适用于全部节点的统一的计算格式, 并通过数值试验检验了格式的稳定性. 关于这一格式的稳定性严格论证将在后续报告中发表. 将本文研究结果推广用于改进一大类具有实用价值的波动数值模拟技术 (例如, 有限差分异质格式关于界面点的处理) 是可能的. 不过, 实现这一可能尚需进一步做工作. 作为第一步, 可以基于文献 [15] 关于二维标量波 (声波、电磁波) 内域数值模拟技术的研究结果探讨相应的界面节点处理技术.

参 考 文 献

- 1 Chew WC. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. New York: IEEE Press, 1995. 235-255
- 2 Liao Zhenpeng, Wong HL, Yang Baipo, et al. A transmitting boundary for transient wave analyses. *Scientia Sinica (Series A)*, 1984, 27(10): 1063-1076
- 3 廖振鹏. 工程波动理论导论 (第二版). 北京: 科学出版社, 2002. 136-285 (Liao Zhenpeng. Introduction to Wave Motion Theories for Engineering (2nd edn). Beijing: Science Press, 2002. 136-285 (in Chinese))
- 4 廖振鹏, 刘恒, 谢志南. 波动数值模拟的一种显式方法 —— 一维波动. 力学学报, 2009, 41(3): 350-360 (Liao Zhenpeng, Liu Heng, Xie Zhinan. An explicit method for numerical simulation of wave motion — 1-D wave motion. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, 41(3): 350-360 (in Chinese))
- 5 Cohen G. Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations. New York: Springer-Verlag, 2001

- 6 Chen Houqun, Du Xiuli, Hou Shunzai. Application of transmitting boundaries to nonlinear dynamic analysis of an arch dam-foundation-reservoir system. In: Zhang C, Wolf JP, eds. *Dynamic Soil-Structure Interaction: Current Research in China and Switzerland (Developments in Geotechnical Engineering)*, Amsterdam and New York: Elsevier, 1998. 115-124
- 7 Komatitsch D, Liu Qinya, Tromp J, et al. Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2004, 94(1): 187-206
- 8 Dumbser M, Käser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – II. The three-dimensional isotropic case. *Geophysical Journal International*, 2006, 167(1): 319-336
- 9 Graves RW. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1996, 86(4): 1091-1106
- 10 Yang Dinghui, Song Guojie, Lu Ming. Optimally accurate nearly analytic discrete scheme for wave-field simulation in 3D anisotropic media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2007, 97(5): 1557-1569
- 11 Zahrádník J, Moczo P, Hron F. Testing four elastic finite-difference schemes for behavior at discontinuities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1993, 83(1): 107-129
- 12 Gustafsson B, Mossberg E. Time compact high order difference methods for wave propagation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2004, 26(1): 259-271
- 13 Gustafsson B, Wahlund P. Time compact difference methods for wave propagation in discontinuous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2004, 26(1): 272-293
- 14 Zahrádník J. Simple elastic finite-difference scheme. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1995, 85(6): 1879-1887
- 15 Liu Heng, Liao Zhenpeng. An explicit method for numerical simulation of wave equations. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2009, 8(1): 17-28

(责任编辑: 周冬冬)

AN EXPLICIT METHOD FOR NUMERICAL SIMULATION OF WAVE MOTION——CONSTRUCTING RECURSION FORMULA FOR INTERFACE POINT¹⁾

Xie Zhinan^{*,2)} Liao Zhenpeng^{*,†}

^{*}(*Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China*)

[†](*College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

Abstract In the paper, the analytical solution for interface points in a short time window is firstly deduced by combination of the finiteness of wave velocity and solutions of Cauchy problem of wave equation, then a method of constructing a high order explicit recursion formula for interface points is provided for numerical simulation of scalar wave motion in uniformly layered model. To illustrate the main point, an example of constructing recursion formula for interface points presented in a piecewise elastic bar is included. Second and fourth order recursion formula for interface in time and space are provided and consistent with the current stable explicit formulas for interior points. Like heterogeneous scheme, the scheme presented in this paper has the same advantage of easy programming. Finally, the accuracy and stability of the new scheme are validated through numerical tests.

Key words wave equation, numerical simulation, explicit recursion formula, interface point

Received 7 September 2009, revised 8 June 2010.

1) The project supported by the Basic Scientific Research-related Project from Institute of Engineering Mechanics (2008B012, 2006A02, 2008B010) and Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China (90715038).

2) E-mail: xiezhinan1984@hotmail.com