

广义双重抗侧力结构体系的统一位移计算理论¹⁾

郭 猛²⁾ 姚谦峰

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要 在广义概念上将建筑结构视为由同时考虑弯曲变形、剪切变形的两种子结构组成的双重抗侧力结构体系, 提出弹性阶段广义双重结构水平位移的统一的计算方法. 子结构单独承受水平外载荷时其内力与变形的关系服从 Timoshenko 剪切梁基本理论, 在子结构协同工作的基础上, 采用水平变形连续化的计算方法, 建立了广义双重抗侧力结构体系的统一位移微分方程, 以结构承受均布荷载作用为例推导出两个子结构的弯曲变形、剪切变形及结构总水平位移的通用解析表达式. 对框架-剪力墙结构与广义双重结构的位移微分方程式、微分方程特解、水平位移解析解进行了全面对比分析, 证明了框架-剪力墙结构是隶属于广义双重结构体系的一种具体表现形式; 算例分析表明, 对于一般中高层双重抗侧力结构, 采用解析法计算所得的位移结果能够满足一般工程设计的精度要求.

关键词 广义双重抗侧力结构, 密肋复合墙, 统一位移计算理论, 位移微分方程, 弯曲变形, 剪切变形

中图分类号: O342, TU311.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)06-1188-09

引 言

双重抗侧力结构体系是由两种变形和延性性能不同的分体系组成, 共同承受竖向和水平荷载作用, 具有两道或多道抗震防线, 符合现代结构抗震设计思想, 已经被广泛运用于中高层建筑结构中^[1]. 工程中大量应用的双重抗侧力结构类型主要有: 框架-剪力墙(筒体)结构、框架-支撑结构等. 对于框架-剪力墙结构抗震性能的研究, 文献[2-3]等进行了大量不同比例、不同层数及跨数结构模型的低周反复荷载试验与振动台试验, 用以分析结构的破坏特点、滞回性能与耗能能力; 文献[4-6]通过试验研究钢框架-支撑结构中作为第二道防线的框架所应分担地震剪力比例, 以及支撑的屈曲、疲劳等问题; 文献[7]采用连续模型对刚度和轴力均匀的双重弯剪型抗侧力结构的屈曲性能进行了分析, 给出了计算临界荷载的公式. 这些研究作为相关规范的制定和工程设计提供了指导.

对于双重抗侧力结构水平位移的简化计算方法, 一般采用连续化的协同工作分析方法^[8], 其适用于由平面抗侧力结构布置较为规则的框架-剪力墙、框架-支撑结构等双重结构体系的分析. 其中,

剪力墙或支撑框架由一个受弯悬臂构件代替, 忽略其剪切变形而仅计其弯曲变形或以等效抗弯刚度的形式近似考虑剪切变形; 框架由一个连续的受剪悬臂构件代替, 仅产生剪切变形; 结构总水平位移曲线呈弯剪型变形特征. 这种假定对于抗剪刚度较大的剪力墙或支撑而言, 具有相当高的精度, 尤其是随着结构高度的增加, 计算误差减小.

文献[9]以框架-剪力墙结构为依据, 将复合剪力墙视为弯剪型悬臂构件, 同时考虑其弯曲变形与剪切变形, 给出了 3 种常见荷载作用下框架-复合剪力墙结构的水平位移计算方法. 分析表明, 剪切变形的计入在很大程度上改变了内力在框架与复合墙之间的分配比例, 使得复合墙刚度退化引起结构所受总地震作用的减小程度超过刚度退化引起框架与密肋复合墙刚度比值的增大程度, 这是与一般框架-剪力墙结构的重要区别之一. 文献[10]以框架-剪力墙结构为例, 将框架和剪力墙均视为弯剪型悬臂构件, 给出了双重结构位移分两步求解的方法, 文中算例分析认为, 一个弯剪型结构的抗弯刚度参与另一个结构共同工作的能力, 受到自身抗剪刚度的影响.

2010-01-13 收到第 1 稿, 2010-06-09 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(50878021), “十一五”国家科技支撑计划(2006BAJ04A02-05)和北京交通大学优秀博士生科技创新基金(141071522)资助项目.

2) E-mail: guomeng673@163.com

综合前期对双重抗侧力结构位移计算方法的研究成果可知, 人们对各种结构体系位移、内力的计算方法均独立地考虑, 针对不同结构体系而建立不同的位移计算公式, 对各种结构体系之间内在联系认识的不够深入. 事实上, 表面看起来变形特征不同的结构体系, 其协同工作机制与变形性能在本质上是统一的, 目前为止这方面研究工作相对较少. 为此, 本文将传统狭义双重抗震结构体系的概念进行拓展, 以密肋复合墙为中间介质, 提出广义双重抗侧力结构体系的概念, 利用连续化方法建立广义双重抗侧力结构体系的统一位移计算理论.

1 广义双重抗侧力结构体系

姚谦峰课题组提出一种新型复合式剪力墙——密肋复合墙^[11-15], 在砌体填充墙(配筋砌体墙)与混凝土墙之间架起了一座联系桥梁. 密肋复合墙是以截面及配筋较小的钢筋混凝土为框格, 内嵌具有一定强度的加气混凝土砌块或其他具有一定强度的砌块制作而成, 截面构造如图 1 所示. 水平荷载下, 砌块与肋梁、肋柱共同工作, 相互约束, 互为支撑, 充分发挥了各自的力学性能.

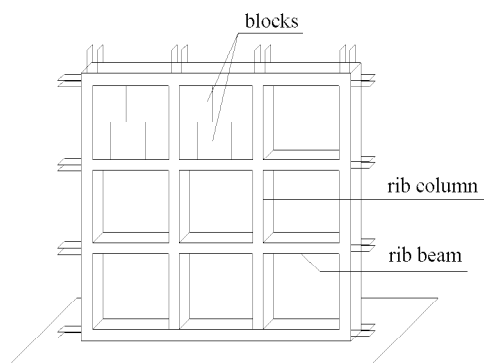


图 1 密肋复合墙

Fig.1 Multi-grid composite wall

对于密肋复合墙的研究, 前期已经进行了 60 余榀 1/1、1/2 等不同比例的墙体模型单调加载和低周反复加载试验, 进行了 3 栋不同比例 6 层、10 层、12 层的密肋复合墙结构拟动力试验和振动台试验, 证明了密肋复合墙结构是一种优良的抗震结构体系, 已在陕西、河北、宁夏等地区的多座高层居民住宅建设中得到应用.

以密肋复合墙的构造形式为分类原则, 在传统意义的双重抗侧力结构体系基础上, 提出“广义双重抗侧力结构体系”的概念, 即将任意结构形式均视为由两个同时考虑抗剪刚度、抗弯刚度的密肋复合墙

体组成, 分别称为子结构 1 和子结构 2, 通过中间框架梁、连梁或楼板将二者联系在一起, 变形协调, 共同抵御水平荷载作用, 如图 2 所示.

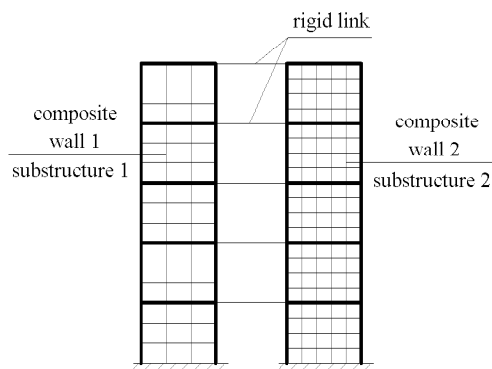


图 2 广义双重抗侧力结构

Fig.2 Generalized double anti-lateral force structure

广义双重抗侧力结构体系具有以下 4 个基本特征:

- (1) 结构体系由两个子结构组成, 均为弯剪型变形特征, 同时考虑抗剪刚度和抗弯刚度;
- (2) 水平层剪力按照子结构的抗剪刚度比例进行分配, 并以抗剪刚度较大的子结构作为抵御地震作用的第一道抗震和耗能防线;
- (3) 抗剪刚度相对较小的子结构作为第二道抗震防线, 承担自身范围内的竖向荷载;
- (4) 两个子结构之间采用水平连杆连接, 在楼层处变形协调.

广义双重结构中, 两个子结构的抗剪刚度和抗弯刚度参数可以各不相等、部分相等或全部相等. 其中, 复合墙的抗弯刚度相对很大, 导致墙体弯曲变形远小于剪切变形时, 复合墙转化为一般意义上的框架; 而复合墙的抗剪刚度相对很大, 导致其剪切变形远小于弯曲变形时, 复合墙转化为一般意义上的剪力墙. 相应地, 结构体系也转化为不同的结构形式, 如框架结构、框架-剪力墙结构等. 基于密肋复合墙的广义双重抗侧力结构体系分类及所考虑的参数见表 1.

2 广义双重抗侧力结构体系的统一位移计算理论

将广义双重抗侧力结构的两个子结构均视为弯剪型变形特征的悬臂墙, 采用连续化方法建立具有统一表达形式的位移微分方程, 推导出子结构及整体结构水平位移的统一解析式, 进而由统一的位移

表 1 广义双重抗侧力结构体系的参数

Table 1 Parameters of generalized double anti-lateral force structure systems

Structure systems		Substructures	
		Shear stiffness	Flexural rigidity
frame structure	1-frame	Y	N
	2-frame	Y	N
frame – shear wall structure	1-frame	Y	N
	2-SW	N	Y
frame – composite wallstructure	1-frame	Y	N
	2-CW	Y	Y
composite – shear wallstructure	1-CW	Y	Y
	2-SW	N	Y
coupled shear wall structure	1-SW	N	Y
	2-SW	N	Y
composite wall structure	1-CW	Y	Y
	2-CW	Y	Y

注：“N”表示该刚度相对于另一个刚度为无限大，不考虑与该刚度相关的变形，Y表示考虑该变形；SW表示剪力墙，CW表示密肋复合墙。

Note: “N” means that the stiffness is infinity correspondingly, so the deformation related to the stiffness is ignored in the total deformation of the structure. SW represents shear wall, and CW represents multi-grid composite wall.

微分方程和位移解析式得出不同变形特征双重抗侧力结构的位移计算公式，此即为广义双重抗侧力结构体系的统一位移计算理论。

2.1 计算模型

广义双重结构的等效计算模型如图 3 所示，基本假定如下：

(1) 将密肋复合墙视为弯剪型悬臂梁，同时产生弯曲变形 y_b 和剪切变形 y_q ，弹性阶段悬臂梁剪切变形与弯曲变形的关系根据 Timoshenko 梁理论^[16]确定，即

$$GA \frac{dy_q}{dx} = -EI \frac{d^3 y_b}{dx^3}$$

(2) 水平连杆两端与复合墙体铰接，传递水平力，复合墙（子结构 1）和复合墙（子结构 2）在楼层处变形协调；采用连续化方法计算结构位移，将水平连杆视为沿结构整个高度均匀分布的连续杆件。

(3) 密肋复合墙体刚度沿竖向分布均匀，其等效抗弯刚度 $E_{eq}I = E \sum_i A_i l_i^2$ ，等效抗剪刚度 $G_{eq}A =$

$\sum_j 18 \frac{i_{cj}}{h} + \alpha G_w A_w$ 。其中 A_i 为框架柱、肋柱截面面积； l_i 为柱形心与墙体对称中心的距离； i_{cj} 为单根框架柱的线刚度； h 为层高； α 为矩形截面影响系

数， $\alpha = 0.83$ ； G_w 、 A_w 为密肋复合墙的有效面内剪切模量和截面面积。

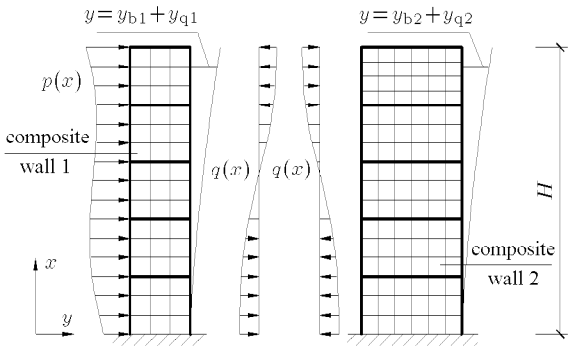


图 3 广义双重结构计算模型

Fig.3 Calculating model of generalized double structure

2.2 广义双重结构统一位移微分方程

由图 3 及上述计算假定，子结构 1 的变形由弯曲变形 y_{b1} 和剪切变形 y_{q1} 两部分组成，根据 Timoshenko 剪切梁的变形、内力与外载荷的基本关系列出方程。则对于子结构 1 有

$$M_{w1} = E_1 I_1 \frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} \tag{1}$$

$$V_{w1} = G_1 A_1 \frac{dy_{q1}}{dx} = -E_1 I_1 \frac{d^3 y_{b1}}{dx^3} \tag{2}$$

$$p_{w1} = p(x) - q(x) = E_1 I_1 \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} \tag{3}$$

同理，对于子结构 2 有

$$M_{w2} = E_2 I_2 \frac{d^2 y_{b2}}{dx^2} \tag{4}$$

$$V_{w2} = G_2 A_2 \frac{dy_{q2}}{dx} = -E_2 I_2 \frac{d^3 y_{b2}}{dx^3} \tag{5}$$

$$p_{w2} = q(x) = E_2 I_2 \frac{d^4 y_{b2}}{dx^4} \tag{6}$$

两个子结构在任意位置的总水平位移相等，即

$$y = y_{b1} + y_{q1} = y_{b2} + y_{q2} \tag{7}$$

将式 (6) 代入式 (3) 得

$$p(x) = E_1 I_1 \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} + E_2 I_2 \frac{d^4 y_{b2}}{dx^4} \tag{8}$$

式 (8) 的变量 y_{b1} 与 y_{b2} 分离，并对等式两边积分两次得

$$\frac{d^4 y_{b2}}{dx^4} = \frac{1}{E_2 I_2} p(x) - \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} \tag{9}$$

$$\frac{d^2 y_{b2}}{dx^2} = \frac{1}{E_2 I_2} \iint p(x) dx dx - \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} + Ax + B \quad (10)$$

式中, A 和 B 为积分常数, 与外载荷具体形式有关, 需要根据边界条件确定。

将式 (7) 两边微分两次

$$\frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} + \frac{d^2 y_{q1}}{dx^2} = \frac{d^2 y_{b2}}{dx^2} + \frac{d^2 y_{q2}}{dx^2} \quad (11)$$

并将式 (2), (5) 微分后代入式 (11) 得

$$\frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} - \frac{E_1 I_1}{G_1 A_1} \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} = \frac{d^2 y_{b2}}{dx^2} - \frac{E_2 I_2}{G_2 A_2} \frac{d^4 y_{b2}}{dx^4} \quad (12)$$

将式 (9), (10) 代入式 (12) 并化简得

$$E_1 I_1 \left(1 + \frac{G_2 A_2}{G_1 A_1} \right) \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} - G_2 A_2 \left(1 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \right) \frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} = -\frac{G_2 A_2}{E_2 I_2} \iint p(x) dx dx + p(x) - G_2 A_2 (Ax + B) \quad (13)$$

式中, 令 $\eta_1 = G_2 A_2 / G_1 A_1$, 为两个子结构协同工作后对第 1 个子结构抗弯刚度的修正系数; 令 $\eta_2 = E_1 I_1 / E_2 I_2$, 为两个子结构协同工作后对第 2 个子结构抗剪刚度的修正系数。将上式等号右边的外荷载项与积分项、常数项合并为广义外荷载项 $p'(x)$, 则整理式 (13) 得

$$\frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} - \frac{(1 + \eta_2)}{(1 + \eta_1)} \frac{G_2 A_2}{E_1 I_1} \frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} = \frac{1}{(1 + \eta_1) E_1 I_1} p'(x) \quad (14)$$

令 $\lambda = H \sqrt{\frac{(1 + \eta_2) G_2 A_2}{(1 + \eta_1) E_1 I_1}}$, 为广义双重抗侧力

结构体系的刚度特征值, 是一个无量纲的量, 反应两个子结构抗弯刚度、抗剪刚度 4 个弹性模量之间的相对关系, 其值大小对结构总水平位移以及地震作用在两个子结构之间的分配影响很大。设 $\xi = x/H$, 式 (14) 可写成

$$\frac{d^4 y_{b1}}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_{b1}}{d\xi^2} = \frac{H^4}{(1 + \eta_1) E_1 I_1} p'(\xi H) \quad (15)$$

式 (15) 即为连续化法求解广义双重抗侧力体系弯曲变形的统一位移微分方程, 理论上适用于弹性阶段广义双重抗侧力体系中各个子结构抗弯刚度、抗剪刚度任意变化时对弯曲变形的求解。

上述四阶常系数线性微分方程, 其解的一般形式为

$$y_{b1} = C_1 + C_2 \xi + C_3 \operatorname{sh} \lambda \xi + C_4 \operatorname{ch} \lambda \xi + y_1 \quad (16)$$

式中, C_1, C_2, C_3, C_4 为待定常数, y_1 为微分方程的特解。

2.3 边界条件

(1) 当 $x = 0$ 时, 子结构底部弯曲变形、剪切变形及转角均为零

$$y_{b1} = y_{q1} = y_{b2} = y_{q2} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{dy_{b1}}{dx} = \frac{dy_{b2}}{dx} = 0 \quad (17b)$$

(2) 当 $x = H$ 时, 结构顶部总剪力为零, 子结构顶部弯矩为零

$$G_1 A_1 \frac{dy_{q1}}{dx} + G_2 A_2 \frac{dy_{q2}}{dx} = 0 \quad (17c)$$

$$\frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} = \frac{d^2 y_{b2}}{dx^2} = 0 \quad (17d)$$

(3) 两个子结构在任意位置的弯曲变形和剪切变形之和应该相等, 取 $x = H$ 得

$$y_{b1}|_{x=H} + y_{q1}|_{x=H} = y_{b2}|_{x=H} + y_{q2}|_{x=H} \quad (17e)$$

2.4 广义双重结构水平位移的统一解析解

以广义双重结构承受均布载荷作用为例, 推导水平位移的统一解析解。设均布载荷为 q , 则广义外荷载 $p'(\xi H)$ 为

$$p'(\xi H) = \left[\frac{H^2 G_2 A_2}{E_2 I_2} \xi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) + 1 \right] q \quad (18)$$

代入位移微分方程式 (16), 并取 $\xi = x/H$ 得

$$\frac{d^4 y_{b1}}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_{b1}}{d\xi^2} = \frac{H^4}{(1 + \eta_1) E_1 I_1} \left[\frac{H^2 G_2 A_2}{E_2 I_2} \xi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) + 1 \right] q \quad (19)$$

其特解

$$y_1 = \frac{H^4 q \left(-\frac{12 E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} + \frac{12}{\lambda^2} - 4\xi + \xi^2 \right)}{24(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \xi^2$$

为广义双重抗侧力结构体系承受均布载荷时的特解之一。将特解代入式 (16), 得到广义双重结构中子结构 1 弯曲变形微分方程的一般解

$$y_{b1} = C_1 + C_2\xi + C_3\text{sh}\lambda\xi + C_4\text{ch}\lambda\xi + \frac{H^4q\left(-\frac{12E_2I_2}{H^2G_2A_2} + \frac{12}{\lambda^2} - 4\xi + \xi^2\right)}{24(E_1I_1 + E_2I_2)}\xi^2 \quad (20a)$$

通过两个子结构剪切变形与弯曲变形之间的关系, 得到子结构 1 的剪切变形 y_{q1} , 子结构 2 的弯曲变形 y_{b2} 、剪切变形 y_{q2} 的表达式如下

$$y_{b2} = \frac{qH^4}{24E_2I_2}\xi^4 - \frac{E_1I_1}{E_2I_2}\left[C_3\text{sh}\lambda\xi + C_4\text{ch}\lambda\xi + \frac{H^4q\xi^4}{24(E_1I_1 + E_2I_2)}\right] + \frac{1}{6}D_1\xi^3 + \frac{1}{2}D_2\xi^2 + D_3\xi + D_4 \quad (20b)$$

$$y_{q1} = -\frac{E_1I_1}{H^2G_1A_1}\left[C_3\lambda^2\text{sh}\lambda\xi + C_4\lambda^2\text{ch}\lambda\xi + \frac{H^4q\xi(\xi - 2)}{2(E_1I_1 + E_2I_2)}\right] + C_5 \quad (20c)$$

$$y_{q2} = -\frac{E_2I_2}{H^2G_2A_2}\left[\frac{qH^4\xi^2}{2E_2I_2} - \frac{E_1I_1}{E_2I_2}\left(C_3\lambda^2\text{sh}\lambda\xi + C_4\lambda^2\text{ch}\lambda\xi + \frac{qH^4\xi^2}{2(E_1I_1 + E_2I_2)}\right) + D_1\xi\right] + D_5 \quad (20d)$$

至此, 均布载荷下广义双重结构体系中各子结构弯曲变形、剪切变形的一般表达式全部求出.

两个子体系之间的相互作用非常复杂, 变形涉及 4 个弹性常数, 单独考察子结构 1 或子结构 2, 难以确定所有待定常数, 必须联合两个子结构的边界条件求解.

根据边界条件 (17) 确定式 (20) 中的常数 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$, 为表述清晰及求解方便将线性方程组写成矩阵形式如下

$$MC = N \quad (21)$$

式中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 E_1 I_1 & H^2 G_1 A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H^2 G_2 A_2 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda E_1 I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \text{sh}\lambda & \lambda^2 \text{ch}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \text{sh}\lambda \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} & \lambda^2 \text{ch}\lambda \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & F_1 \text{sh}\lambda & F_1 \text{ch}\lambda & 1 & \frac{E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} - \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ D_5]^T$$

$$N = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{qH^4}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \ F_2 \ \frac{qH^4}{2(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \ F_3\right]^T$$

系数矩阵及常数矩阵表达式中的 F_1, F_2, F_3 分别为

$$F_1 = 1 - \frac{E_1 I_1}{H^2 G_1 A_1} \lambda^2 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} - \frac{E_1 I_1}{H^2 G_2 A_2} \lambda^2$$

$$F_2 = \frac{H^4 q}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \left(\frac{E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$F_3 = \frac{H^4 q}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{E_1 I_1}{2H^2 G_1 A_1} \right)$$

本文采用 Maplesoft 公司的符号计算系统 Maple 程序进行符号运算, 解矩阵方程式 (21) 得

$$C = \left\{ \begin{aligned} & \frac{H^2 G_2 A_2}{\lambda^2 E_1 I_1} D_5 \quad \frac{H^4 \left[q \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\text{ch} \lambda G_2 A_2}{H^2} \left(1 + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \right) D_5 \right]}{\lambda \text{sh} \lambda (E_1 I_1 + E_2 I_2)} \\ & \frac{H^4 \left[q \left(\frac{E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\text{ch} \lambda G_2 A_2}{H^2} \left(1 + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \right) D_5 \right]}{\lambda^2 \text{sh} \lambda (E_1 I_1 + E_2 I_2)} \quad - \frac{H^2 G_2 A_2}{\lambda^2 E_1 I_1} D_5 \quad - \frac{G_2 A_2}{G_1 A_1} D_5 \\ & - \frac{q H^4}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad \frac{H^4 q \left[\frac{1}{2} + \frac{E_1 I_1}{H^2 G_2 A_2} + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \\ & H^4 \left[q \left(\frac{E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\text{ch} \lambda G_2 A_2}{H^2} \left(1 + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \right) D_5 \right] / \left[\lambda \text{sh} \lambda \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} (E_1 I_1 + E_2 I_2) \right] \\ & - \frac{H^2 G_2 A_2}{\lambda^2 E_2 I_2} D_5 \quad D_5 \end{aligned} \right\}^T$$

$$D_5 = \frac{F_4}{F_5}$$

其中参数 F_4, F_5 的具体表达式为

$$\begin{aligned} F_4 &= q H^2 E_1 I_1 \left[H^2 G_2 A_2 \left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2} \right) \cdot \right. \\ & \quad (4 + \lambda^3 \text{sh} \lambda - 2 \lambda^2) - 4 \lambda^2 \left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + 1 \right) + \\ & \quad 2 \lambda \text{sh} \lambda H^2 G_2 A_2 \left(\frac{1}{E_1 I_1} - \frac{1}{E_2 I_2} \right) + \\ & \quad \left. 2 \lambda^3 \text{sh} \lambda \left(\frac{G_2 A_2}{G_1 A_1} - \frac{2 E_2 I_2}{E_1 I_1} + 1 \right) \right] \\ F_5 &= 4 H^2 (G_2 A_2)^2 \lambda \left[\left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} + 2 \right) \cdot \right. \\ & \quad (\lambda \text{ch} \lambda - \text{sh} \lambda) + \lambda^2 \text{sh} \lambda \left(\frac{1}{H^2 G_1 A_1} + \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{1}{H^2 G_2 A_2} \right) (E_1 I_1 + E_2 I_2) \right] \end{aligned}$$

将常数 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$ 回代至式 (20), 最终得到均布载荷下广义双重结构中各个子结构弯曲变形 y_b 、剪切变形 y_q 的表达式, 进而叠加得到广义双重结构总水平位移 y 的表达式。

3 广义双重抗侧力结构体系统一位移计算理论的验证

3.1 与框架-剪力墙结构位移相容性的验证

框架-剪力墙结构是工程中经常应用的一种结构体系, 其水平位移计算方法已为广大科研人员所熟悉, 高层建筑结构计算类的教材中均有详细的推导过程^[8,17]。

本文采用连续化方法建立广义双重结构的位移计算公式, 其推导思路、推导过程与框架-剪力墙结构完全一致, 当把框架-剪力墙结构视为广义双重结

构的一种具体表现形式时, 框架-剪力墙结构的位移微分方程及计算结果必然可以由广义双重结构统一位移方程中直接得到。

3.1.1 位移微分方程的验证

为便于理解, 剪力墙的抗弯刚度 $E_1 I_1$ 用框架-剪力墙结构中常用符号 $E_w I_w$ 代替, 框架的抗剪刚度 $G_2 A_2$ 用常用符号 C_f 代替, 则基于广义双重抗侧力结构体系的统一位移计算理论, 令方程 (14) 左右两侧 $G_1 A_1 \rightarrow \infty, E_2 I_2 \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{G_1 A_1 \rightarrow \infty \\ E_2 I_2 \rightarrow \infty}} \left[E_1 I_1 \left(1 + \frac{G_2 A_2}{G_1 A_1} \right) \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} - \right. \\ & \quad \left. G_2 A_2 \left(1 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \right) \frac{d^2 y_{b1}}{dx^2} \right] = \\ & \quad E_1 I_1 \frac{d^4 y_{b1}}{dx^4} - C_f \frac{d^2 y_{b1}}{dx^2}. \\ & \lim_{\substack{G_1 A_1 \rightarrow \infty \\ E_2 I_2 \rightarrow \infty}} \left\{ - \frac{G_2 A_2}{E_2 I_2} \iint p(x) dx dx + p(x) + \right. \\ & \quad \frac{G_2 A_2}{E_2 I_2} \left[x \int_0^H p(x) dx - H \int_0^H p(x) dx + \right. \\ & \quad \left. \left. \int_0^H \int_0^H p(x) dx dx \right] \right\} = p(x) \end{aligned}$$

同时设 $\lambda = H \sqrt{\frac{C_f}{E_w I_w}}$, 则式 (14) 转化为

$$\frac{d^4 y_{b1}}{d\xi^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_{b1}}{d\xi^2} = \frac{H^4}{E_w I_w} p(\xi) \quad (22)$$

此即为人们所熟知的框架-剪力墙结构计算水平位移的基本微分方程。

3.1.2 微分方程特解的验证

广义双重结构承受均布载荷时的特解显然必定是任意一种双重抗侧力结构承受均布载荷时的通

解. 令 $G_1 A_1 \rightarrow \infty$, $E_2 I_2 \rightarrow \infty$, 且以 C_f 代替 $G_2 A_2$, 则特解 y_1 转变为

$$y_1 = \lim_{\substack{G_1 A_1 \rightarrow \infty \\ E_2 I_2 \rightarrow \infty}} \left[\frac{H^4 q \left(-\frac{12 E_2 I_2}{H^2 G_2 A_2} + \frac{12}{\lambda^2} - 4\xi + \xi^2 \right)}{24(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \xi^2 \right] = -\frac{q H^2}{2 C_f} \xi^2 \quad (23)$$

此即为框架-剪力墙结构位移微分方程在均布载荷作用下的特解.

3.1.3 微分方程弯曲变形解析解的验证

在广义双重抗侧力结构体系位移微分方程解析解的系数表达式中, 取 $G_1 A_1 \rightarrow \infty$, $E_2 I_2 \rightarrow \infty$, 则有

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{q H^4}{\lambda^4 E_1 I_1} \frac{1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} & \frac{q H^2}{G_2 A_2} & -\frac{q H^2}{\lambda G_2 A_2} \\ \frac{q H^4}{\lambda^4 E_1 I_1} \frac{1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q H^4}{\lambda^4 E_1 I_1} \frac{1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \end{bmatrix}^T$$

将上述各个系数代入均布载荷下广义双重结构中各子结构弯曲变形、剪切变形的一般表达式 (20), 且代入均布载荷下的特解 (23), 同时取 $G_1 A_1 \rightarrow \infty$, $E_2 I_2 \rightarrow \infty$ 进行求极限运算, 得

$$\left. \begin{aligned} y_{b1} = y_{q2} = & \frac{q H^2}{C_f \lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda + 1}{\operatorname{ch} \lambda} \right) (\operatorname{ch} \lambda \xi - 1) - \lambda \operatorname{sh} \lambda \xi + \lambda^2 \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \right] \\ y_{q1} = y_{b2} = & 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (24) 与文献 [8] 给出的均布载荷下框架-剪力墙结构水平位移的解析解完全吻合.

由上述验证过程可见, 对于框架-剪力墙结构, 从广义双重结构统一位移计算理论出发, 经过一系列极限运算过程, 最终得到的位移解析解与直接按连续化协同工作法推导框架-剪力墙结构位移微分方程并通过边界条件得出的位移解完全一致, 这就从理论上证明了本文提出并建立的广义双重抗侧力结构体系一位移计算理论的正确性. 同时也表明, 直接按连续化法得出的框架-剪力墙结构位移方程实际上是广义双重结构位移方程的一种特殊表现形式.

3.2 数值算例分析

利用通用有限元程序 ANSYS 建立 16 层双重弯剪型抗侧力平面结构模型, 并进行分析, 两个子结构均采用 BEAM189 单元模拟, 铰接的刚性连杆采用 LINK8 杆单元模拟, 其中: BEAM189 单元是基于 Timoshenko 梁理论建立的三维空间薄壁梁单元, 同时考虑弯曲变形与剪切变形; LINK8 单元一般用于模拟桁架、网架中的拉压杆, 不承受弯矩 [18]. 双重抗侧力结构模型主要参数如下: 层高 3000 mm, 两个子结构截面尺寸为 200 mm × 5000 mm, 净间距 4000 mm, 承受水平均布载荷 $q = 5 \text{ kN/m}$; 计算得出子结构 1 抗弯、抗剪刚度分别为 $E_1 I_1 = 6.25 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $G_1 A_1 = 1.2 \times 10^{10} \text{ N}$, 子结构 2 抗弯、抗剪刚度分别为 $E_2 I_2 = 7.5 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $G_2 A_2 = 2.38 \times 10^7 \text{ N}$.

ANSYS 计算得到的水平位移图如图 4 所示; 采用 Maple 程序编写本文给出的位移公式, 计算结果与 ANSYS 计算结果的比较见表 2.

分析表 2 可知, 随着层数增多, 解析法与有限元法的计算误差逐渐减小, 产生误差的主要原因在于解析法采用了刚性连杆连续化的假定. 对于一般层数超过 8 层的中高层双重抗侧力结构, 采用解析法相比有限元方法的误差在 5% 之内, 能够满足一般工程设计的精度要求.

表 2 解析法与有限元法计算结果对比

Table 2 Calculation results comparison between analytical method and finite-element method

Storey y	Method in this paper/mm		Finite-element method/mm		y_j error/%
	y_j	y_j	y_j	y_j	
16	42.40	3.39	43.51	3.46	-2.55
15	39.01	3.40	40.05	3.46	-2.60
14	35.61	3.40	36.59	3.48	-2.68
13	32.21	3.42	33.11	3.49	-2.72
12	28.79	3.39	29.62	3.46	-2.80
11	25.40	3.35	26.16	3.42	-2.91
10	22.05	3.28	22.74	3.36	-3.03
9	18.77	3.20	19.38	3.25	-3.15
8	15.57	3.05	16.13	3.12	-3.47
7	12.52	2.86	13.01	2.93	-3.77
6	9.66	2.61	10.08	2.68	-4.17
5	7.05	2.32	7.40	2.39	-4.73
4	4.73	1.94	5.01	2.01	-5.59
3	2.79	1.48	3.00	1.56	-7.00
2	1.31	0.97	1.44	1.03	-9.03
1	0.34	0.34	0.41	0.41	-17.07
0	0.00	0.00	0.00	0.00	-

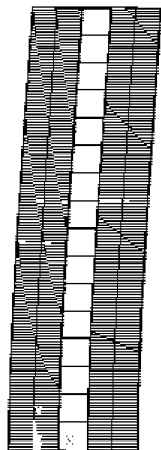


图 4 水平位移图

Fig.4 Horizontal displacement

4 结 语

(1) 以密肋复合墙的构造形式为分类原则, 提出了广义双重抗侧力结构体系的概念, 将任意结构视为由两个同时考虑抗剪刚度、抗弯刚度的密肋复合墙子结构组成, 通过中间框架梁、连梁或楼板将两个子结构联系在一起, 变形协调, 共同抵御水平载荷。框架结构、框架-剪力墙结构、框架-复合墙结构等常见结构形式可视为广义双重结构的具体表现形式。

(2) 广义双重抗侧力结构的总水平位移由于结构弯曲变形和剪切变形叠加得到, 子结构内力与变形的关系服从 Timoshenko 剪切梁基本理论; 采用子结构之间连续化协同工作的计算方法, 建立了广义双重抗侧力结构体系的统一位移微分方程, 以结构承受水平均布载荷为例, 推导出了两个子体系的弯曲变形、剪切变形及总水平位移的通用解析表达式, 从本质上将具有不同变形特征的结构体系联系在一起。

(3) 以结构承受均布载荷作用为例, 从广义双重结构与框架-剪力墙结构之间位移微分方程、子结构弯曲变形特解、水平位移解析解这 3 个方面的相容关系, 验证了广义双重抗侧力结构体系统一位移计算理论的正确性, 同时也表明了框架-剪力墙结构是隶属于广义双重结构体系的一种具体表现形式。数值算例分析表明, 对于一般中高层双重抗侧力结构, 采用解析法计算所得的位移结果能够满足一般工程设计的精度要求。

(4) 本文以密肋复合墙为中间介质建立的统一位移计算理论, 其推导思路与计算过程同样适用于以框架-支撑组合构件等为中间介质的广义双重结构

的位移计算。

参 考 文 献

- 1 赵西安, 徐培福. 高层建筑结构的选型构造及简化计算. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000 (Zhao Xi'an, Xu Peifu. Structure Selection and Simplifying Computation of Tall Building Structures. Beijing: Architectural Industry Press, 2000 (in Chinese))
- 2 熊仲明, 史庆轩, 王社良等. 钢筋混凝土框架-剪力墙模型结构试验的滞回反应和耗能分析. 建筑结构学报, 2006, 27(4): 89-95 (Xiong Zhongming, Shi Qingxuan, Wang Sheliang, et al. Hysteretic response and energy dissipation of a model frame-shear wall structure. *Journal of Building Structures*, 2006, 27(4): 89-95 (in Chinese))
- 3 Linda P, Bachmann H. Dynamic modeling and design of earthquake-resistant walls. *Earthquake Engineering and Structure Dynamic*, 1994, 23 (12): 1331-1350
- 4 Tsutom U. Plastic analysis of steel members and frames subjected to cyclic loading. *Engineering Structures*, 1997, 18: 135-145
- 5 Lee SL, Basu PK. Bracing requirements of plane frames. *Journal of Structural Engineering*, 1992, 118(6): 1527-1546
- 6 Raid DC. Seismic evaluation and upgrading of chevron braced frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003, 59: 971-994
- 7 童根树, 金阳, 米旭峰. 双重弯剪型抗侧力结构的屈曲及其二阶效应. 工程力学, 2008, 25(10): 92-98 (Tong Genshu, Jin Yang, Mi Xufeng. Buckling and their second order effect of dual systems consisting of two shear flexural structures. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(10): 92-98 (in Chinese))
- 8 包世华, 张嗣生. 高层建筑结构设计和计算. 北京: 清华大学出版社, 2005 (Bao Shihua, Zhang Tongsheng. Design and Analysis of Tall-building Structure. Beijing: Tsinghua University Press, 2005 (in Chinese))
- 9 郭猛, 姚谦峰. 框架-复合剪力墙结构水平位移计算方法. 华南理工大学学报, 2010, 38(4): 119-124 (Guo Meng, Yao Qianfeng. Calculation method of horizontal displacement on the frame composite wall structure. *Journal of South China University of Technology*, 2010, 38(4): 119-124 (in Chinese))
- 10 高宇, 童根树. 两片弯剪型抗侧力体系的相互作用. 建筑结构, 2007, 37 (7): 8-10,13 (Gao Yu, Tong Genshu. Interaction between two shear flexural structures under horizontal load. *Building Structure*, 2007, 37(7): 8-10,13 (in Chinese))
- 11 常鹏, 姚谦峰. 密肋复合墙体受剪性能试验研究及弹塑性数值分析. 建筑结构学报, 2010, 31(4): 116-123 (Chang Peng, Yao Qianfeng. Experimental study and elasto-plastic numerical analysis on shear behavior of multi-ribbed composite wall. *Journal of Building Structures*, 2010, 31(4): 116-123 (in Chinese))
- 12 姚谦峰, 贾英杰. 密肋壁板结构十二层 1/3 比例房屋模型抗震性能试验研究. 土木工程学报, 2004, 37(6): 1-10 (Yao Qianfeng, Jia Yingjie. Experimental study of aseismic property for a 1/3 scaled model of 12 storeys multi-ribbed wall slab

- building structure. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(6): 1-10 (in Chinese))
- 13 郭猛, 姚谦峰. 框架-密肋复合墙结构新体系研究. 地震工程与工程振动, 2009, 29(5): 73-78 (Guo Meng, Yao Qianfeng. Research on frame-multi-ribbed composite wall structure new system. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2009, 29(5): 73-78 (in Chinese))
 - 14 姚谦峰, 张亮, 刘佩. 密肋复合墙体宏观有效弹性模量的细观力学有限元分析. 工程力学, 2009, 26(4): 139-143 (Yao Qianfeng, Zhang Liang, Liu Pei. Micro-mechanics finite element analysis of effective elastic moduli of multi-ribbed slab wall. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(4): 139-143 (in Chinese))
 - 15 北京交通大学. 具有多道抗震防线的耗能复合墙结构设计理论与关键技术研究. 北京: 北京交通大学, 2009 (Beijing Jiaotong University. Design theory and key technology research of multi-ribbed composite wall structure with multiple seismic fortification lines. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2009 (in Chinese))
 - 16 Timoshenko SP. 高等材料力学. 北京: 科学出版社, 1990 (Timoshenko SP. Advanced Mechanics of Materials. Beijing: Science Press, 1990 (in Chinese))
 - 17 方鄂华, 钱稼茹, 叶列平. 高层建筑结构设计. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006 (Fang Ehua, Qian Jiaru, Ye Lieping. Design and Analysis of Tall-building Structure. Beijing: China Architecture and Technology Press, 2006 (in Chinese))
 - 18 王新敏. ANSYS 工程结构数值分析. 北京: 人民交通出版社, 2007 (Wang Xinmin. Numerical Analysis for Engineering Structures with ANSYS. Beijing: China Communications Press, 2007 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

UNIFIED DISPLACEMENT CALCULATION THEORY OF GENERALIZED STRUCTURE WITH DOUBLE RESISTANCES TO LATERAL FORCE¹⁾

Guo Meng²⁾ Yao Qianfeng

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract The building structure is considered as a structure with double resistance to lateral force and consists of two substructures in generalized concept. Horizontal deformation of the substructure consists of bending deformation and shear deformation. Unified displacement calculation method of the dual structure in elastic stage will be proposed in this paper. The basic regulation between internal force and deformation of every substructure obeys Timoshenko beam theory. Based on cooperative work mechanism of two substructures, the unified displacement differential equation of generalized structure with double resistance to lateral force is established by deformation continuation approach. Taking uniform load as a sample, the unified displacement analytical solutions of the dual structure are deduced which include bending deformation solution, shear deformation solution and the total deformation solution. The displacement differential equation, special solution and displacement analytical expressions are compared between frame-shear wall structure and generalized structure with double resistances to lateral force. Frame-shear wall structure can be regarded as one of the concrete expression forms of the double structure. Numerical example results indicate that calculation accuracy by analytical method can meet the requirement to the middle-high dual structures. The unified displacement theory of generalized dual structure makes structures with different deformation characteristics to connect together essentially, and it has important theoretical significance for us to understand deformation mechanism and internal relations of the building structures deeply.

Key words generalized structure with double resistance to lateral force, multi-grid composite wall, unified displacement calculation theory, displacement differential equation, bending deformation, shear deformation

Received 13 January 2010, revised 9 June 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50878021), the Key Project in the National Science and Technology Pillar Program during the Eleventh Five-year Plan Period of China (2006BAJ04A02-05) and the Science and Technology Foundation for Excellent Ph.D Candidates in Beijing Jiaotong University of China (141071522).

2) E-mail: guomeng673@163.com