

用变形和分解原理求混凝土板的受拉薄膜效应¹⁾

董毓利²⁾

(哈尔滨工业大学土木工程学院, 哈尔滨 150090)

摘要 利用变形梯度直和分解, 提出了基于能量原理计算钢筋混凝土板大变形时极限承载力方法, 该方法考虑了薄膜效应影响并与传统塑性铰线理论相统一, 既适用于矩形板和方形板, 也适用于各向同性配筋和各向异性配筋的板, 认为薄膜效应主要是由于塑性铰线处钢筋的伸长耗能造成的, 该方法还可以解释同样挠度下方形板比矩形板早破坏和同样配筋时在矩形板短跨方向钢筋断裂的试验现象. 计算结果与试验具有很好的一致性.

关键词 薄膜效应, 钢筋伸长, 塑性铰线, 混凝土板, 变形和分解

中图分类号: O344.5 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)06-1180-08

引言

钢筋混凝土楼板是水平承重构件, 是多层和高层房屋的重要组成部分. 塑性铰线理论是钢筋混凝土板极限荷载分析的一种常用方法, 它研究板可能出现的各种破坏图形, 确定容许的位移场. 根据结构极限分析方法的上限定理, 可求出钢筋混凝土板的极限荷载值, 按照塑性铰线理论 (包括机动法和平衡法两种方法^[1]) 所求得的极限荷载为其上限值.

试验结果表明^[2], 由于板内的薄膜效应, 无论混凝土板的支承边界是否受到水平约束, 钢筋混凝土板的极限承载力都大于按塑性铰线理论计算的结果. 对于边界有水平约束的混凝土板^[3], 双向钢筋混凝土板的荷载-中心挠度曲线是从线性弹性阶段转变为非线性阶段并达到峰值后, 有一荷载降低阶段, 当荷载降到谷底后又进一步增长, 直到钢筋被拉断; 塑性铰线在达到峰值荷载前已经形成, 由于在加载初期板中心挠度较小, 板边界受到约束, 于是由板中心区域的顶部和板支座底部形成了拱的作用, 致使该峰值荷载比按经典理论计算值高很多; 当挠度增大, 这种拱的作用逐渐减小, 并使荷载随着挠度增大而降低, 当受压薄膜效应消失殆尽, 由于混凝土板中产生受拉薄膜效应, 随着挠度增大荷载再次提高, 直到板中受拉钢筋被拉断. 对于边界没有水平约束的混凝土简支双向板^[4], 其荷载-中心挠度曲线中荷载一直随着挠度增大而增大, 而没有荷载降低段, 即在双向简支板中不存在受压薄膜效应. 根据斜率不同

可以将曲线分成两部分: 一部分是从线性弹性到塑性铰线形成部分, 这部分曲线斜率较高, 接近于弹性刚度; 另一部分则是在塑性铰线形成后因为受拉薄膜效应导致荷载随着挠度增大而提高, 其斜率较第一部分要小得多, 说明板的受拉薄膜效应是在钢筋屈服、混凝土裂缝充分发展后出现的, 此时混凝土板的刚度有较大的衰减.

对于约束混凝土双向板, 早在 1939 年苏联便对当时正在编制修订的钢筋混凝土结构设计规范提出在钢筋混凝土双向板设计中应容许考虑薄膜压力效应的影响^[2]; Nielsen^[5] 认为材料是刚-塑性的, 根据圆板破坏机构的平衡方程求出板的荷载-挠度关系, 但这种方法很难应用于矩形板; Christiansen^[6] 对约束板带的拱作用进行分析, 认为板带的受压薄膜效应是由拱作用引起的, 但分析结果并未推广到双向板; Roberts^[7] 也对板带进行了试验和分析, 由于忽略弹性曲率影响, 误差较大; Park^[3] 将双向板沿长跨、短跨划分成许多板带, 提出了确定荷载-挠度的方法, 依据试验结果认为板达到极限荷载时的挠度为板厚的 0.5 倍, 但该值如何选取有待进一步试验研究; Park^[8-9] 后来又对部分边界约束板和梁板体系进行了研究; Morley^[10] 利用屈服准则确定了塑性铰线截面的弯矩和轴力, 同样在假定极限荷载时的挠度为板厚的 0.5 倍后, 根据虚功原理求出荷载-挠度曲线; Jacobson^[11] 研究了水平约束板的弹塑性性能后, 利用刚-塑性分析提出了极限荷载的上限; Brotchi 和 Holley^[12] 在此基础上提出简

2009-08-31 收到第 1 稿, 2010-02-24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (50878069) 和科技部支撑计划 (2006BAJ13B03) 资助项目.

2) E-mail: DongYL@hit.edu.cn

化公式以计算受压拱效应, 计算载荷与试验吻合较好, 但挠度误差很大; Sawzuck 等^[13] 利用能量法对横向约束混凝土板的薄膜效应进行分析; Hung 和 Nawy^[14] 将其应用到三边固定、一边简支和两边固定、两边简支板中, 根据 29 块板的试验结果, 计算中采用的相应于极限载荷的挠度在 0.4~1.0 倍板厚变化, 而不是 Park 所取的 0.5 倍, 其计算结果与试验吻合较好; Moy 和 Mayfield^[15] 在 Massonet 改进的大挠度平衡方程的基础上, 利用有限差分法计算载荷-挠度全曲线, 但因为没有考虑混凝土的开裂, 其计算结果误差很大; Park^[16], Hopkins 等^[17], Park^[18], Datta^[19], Ramesh 等^[20] 对有边梁的双向板极限载荷进行了分析. 上述文献中主要对约束双向板的受压薄膜效应进行的试验和分析, 此时板的挠度较小, 当挠度增大时, 大多数模型不能用于板的受拉薄膜效应分析; 在计算极限载荷时, 许多模型要用到极限载荷时的挠度, 该值多根据有限的缩尺试验结果来确定, 因此离散性较大, 适用范围有待进一步研究.

前述的 Nielsen 模型^[5] 是根据固支板的破坏机构的平衡方程提出的, 当板中心的中性轴移动到板顶时认为受拉薄膜效应产生, 对该模型加以改进可以用来计算简支双向板的大挠度时的极限载荷, 但因为忽略塑性铰线形成前的弹性变形, 其与试验有较大差异; Park^[3] 用来计算约束矩形板的模型经过改进, 也可以用于简支双向板, 但该模型只有在挠度相当大时才有效; Sawzuck 和 Winnick^[13] 根据破坏模式, 认为内能耗散包括塑性铰线截面的弯矩转动和截面伸长, 利用机动法求出载荷-挠度关系, 其整体挠度是近似的; Morley^[10] 也可以应用到简支板中, 适用于各向同性板, 而不适用于各向异性板; Kemp^[21] 应用刚-塑性模型, 根据刚性区的几何和水平平衡条件求出简支方板薄膜效应的上限值; Hayes^[22] 假定在板长跨方向产生面内塑性铰, 在面内塑性铰线上存在剪力, 根据刚体面内平衡求出轴力和剪力大小, 然后得到线性的载荷-挠度关系, 本质上与 Sawzuck 和 Winnick^[13] 方法相同, 只不过用平衡法代替了能量法, 该方法所得薄膜效应与挠度大小无关, 这是与试验不相符合的; Bailey^[23-24] 将 Hayes 方法加以改进, 并将其推广到火灾时钢筋混凝土板的大挠度工况, 但仍然必须先假定破坏模式, 然后将矩形板或方形板分成两个单元, 分别求出它们的面内增大系数和弯曲增大系数, 相加后得到两个单元的增大系数, 而这两个系数一般是不相等的, 只能再作假定, 然后才能确定整块板的薄膜效应增大

系数, 这种方法不仅繁琐, 而且缺乏明确物理意义.

本文利用塑性铰线理论, 对没有水平约束混凝土双向板的受拉薄膜效应进行了研究. 该方法认为: 混凝土板大挠度时的受拉薄膜效应是在塑性铰线形成以后产生的; 塑性铰线截面上的混凝土压区合力与钢筋拉力组成的力偶提供了截面的抵抗弯矩. 随着载荷进一步增大, 塑性铰线截面弯矩将绕混凝土压区合力作用点转动, 同时塑性铰线截面处受拉钢筋将被拉伸长做功, 因此内力做功除了截面转动做功外, 还包括截面处受拉钢筋伸长所做的功. 根据能量原理 (即内功与外功相等), 可求出混凝土板的极限承载力, 大挠度时混凝土板的薄膜效应是由钢筋的受拉伸长做功引起的.

1 能量原理

当结构产生较大变形时, 外力与位移之间呈非线性关系, 且随时间而变动, 合理的能量原理应以瞬时位形的功率形式表达. 势能率变分原理指明: 在一切满足速度、角速度与应变速率协调条件^[25]

$$\mathbf{V}^j||_i = \dot{\mathbf{S}}_i^j + L_i^j \dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}$$

和速度的表面条件 ($\bar{V}^i$ 为给定速度值)

$$\mathbf{V}^i = \bar{\mathbf{V}}^i, \text{ 在 } S_V \text{ 上} \quad (1)$$

的所有可能形变状态中, 其真实应力状态满足运动方程、力矩应力平衡方程以及表面力条件者, 使得泛函 J 取驻值.

$$\delta J = \int_{\Omega} \sigma_j^i \delta \mathbf{V}^j||_i d\Omega - \int_{S_P} \mathbf{P}_i \delta \mathbf{V}^i dS - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_i \delta \mathbf{V}^i d\Omega = 0$$

其中表面 S : $S_V \cup S_P$,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \bar{\mathbf{V}}, \delta \mathbf{V} = 0, \text{ 在 } S_V \text{ 上} \\ \mathbf{P} &= \bar{\mathbf{P}}, \text{ 在 } S_P \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\theta}$ 为平均整旋角速度, L_i^j 为转轴方向余弦, $\dot{\mathbf{S}}_i^j$ 为应变速率, σ_i^j 为应力, $\mathbf{P}$ 为面力, $\mathbf{f}$ 为体力. 于是可以得

$$\int_{\Omega} \sigma_j^i \delta \mathbf{V}^j||_i d\Omega = \int_{a S_P} \mathbf{P}_i \delta \mathbf{V}^i dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_i \delta \mathbf{V}^i d\Omega \quad (3)$$

式 (3) 表明: 外力和体力作用于变形体的功等于变形体应变能的增量.

根据图 1 的受力情况和图 2 板的变形与转动情况, 可以发现在塑性铰线截面上有钢筋的拉力 T_s 、混凝土的压力 C 及二者形成的截面弯矩 m_s , 因此式 (3) 可以写成

$$\int_S (m_i \kappa_i + T_s \lambda_{i1} + C \lambda_{i2}) dS = \int_{S_p} P_i \delta V^i dS + \int_{\Omega} \rho f_i \delta V^i d\Omega \quad (4)$$

式中 κ_i , λ_{i1} , λ_{i2} 分别与板的曲率、钢筋伸长和混凝土压缩有关的量.

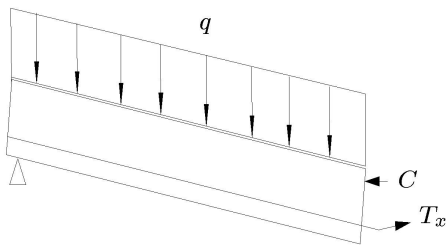


图 1 塑性铰线形成后板块受力

Fig.1 Forces at the plastic hinge section

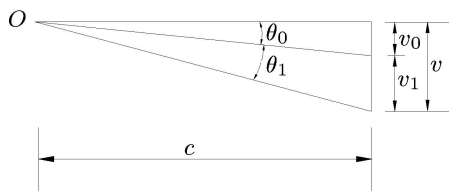


图 2 板的挠度与转角

Fig.2 Rotation and deflection of slab

因为塑性铰线理论认为板是遵从刚塑性应力-应变关系, 因此可以认为转动、钢筋伸长和混凝土压缩均集中在塑性铰线截面, 当外力不考虑体力时, 则有

$$\sum_1^n (m \theta_i + T_s \lambda_{i1} + C \lambda_{i2}) l_i = \int_S P \nu dS \quad (5)$$

式中, θ_i , λ_{i1} 和 λ_{i2} 分别表示塑性铰线上的转角、钢筋伸长和混凝土压缩, l_i 是塑性铰线长度和, P 为外力, ν 为挠度.

假设钢筋混凝土板在水平方向没有位移, 但可以转动. 由图 1 的受力情况可以看出, 当钢筋混凝土板塑性铰线形成时, 在该处的钢筋已经屈服 (图中 T 表示钢筋拉力, 下标 x 表示其作用方向), 截面内与之平衡的是混凝土截面的压力, 随着钢筋和混凝土的变形增大, 截面的塑性进一步发展, 但截面力矩则基本保持不变, 只是混凝土受压区的面积有所减小,

作用力臂稍有增加. 当截面转动较大时, 钢筋混凝土板受力情况如图 2 所示, 此时板与相连的另一板块间形成一定的夹角, 钢筋内力在竖向产生一个分量, 当板的挠度较小时, 该分量很小, 可以忽略, 但板挠度较大时, 该分量将增大, 其作用逐渐明显; 两板块间的混凝土只有压区接触, 其接触面积较小, 因此可以认为在塑性铰线形成后, 混凝土只提供水平力, 而不提供竖向力. 当支座处没有水平位移产生, 则由于板块的转动使钢筋混凝土板中钢筋的长度伸长, 钢筋屈服力将在该方向做功; 而板上部混凝土所受力为压力, 此时混凝土已达到极限压应变, 因此可以认为压区混凝土不因受压长度变化做功, 其只与钢筋形成的力偶在截面转动时做功, 于是式 (3) 可以写成

$$\sum_1^n (m \theta_i + T_s \lambda_{i1}) l_i = \int_S P \nu dS \quad (6)$$

式中, n 为塑性铰线数, θ_i 为塑性铰线转角, λ_i 为钢筋伸长, m 为单位宽度截面弯矩, T_s 为单位宽度截面钢筋拉力.

2 极限承载力计算

这里仍沿用塑性铰线理论的有关假设, 即塑性铰线形成后, 在塑性铰线上的钢筋均达到屈服. 以图 3 中的承受均布载荷的矩形钢筋混凝土板为对象, 设线 EF 上的竖向位移为 z , 则其他塑性铰线上的竖向位移是线性变化的, 在块 ABE 上沿线 BE 和 AE 的竖向位移为 $\frac{x}{\alpha L} z$, 沿 X 方向钢筋的长度为 $\frac{x}{\alpha L} \sqrt{(\alpha L)^2 + z^2}$; 块 $BCFE$ 上沿线 BE 和 CF 的竖向位移为 $\frac{y}{l/2} z$, 沿 y 方向的钢筋长度为 $\frac{y}{(l/2)} \sqrt{(l/2)^2 + z^2}$, z 为板的挠度.

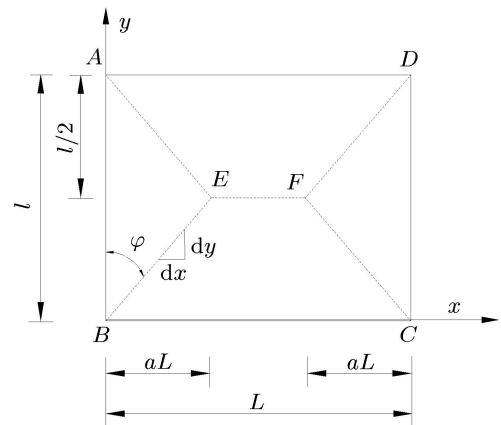


图 3 矩形板的塑性铰线

Fig.3 Yield lines of rectangular slab

根据式 (4) 可以推导出外力做的功应等于其应变能变化即内力功。内力功应包括两项：沿塑性铰线的弯矩的转动耗能和由于钢筋伸长的能耗。前一项与经典的塑性铰线理论是相同的，不同的是后一项。因为在弯矩沿塑性铰线转动同时，截面上的钢筋在变形，同样消耗能量，也是引起承受载荷增大的原因。

利用塑性铰线理论计算钢筋混凝土板极限载荷时，是不考虑薄膜效应的。而上述塑性铰线处钢筋的伸长正是产生薄膜效应的原因，但钢筋的伸长应该从塑性铰线形成后算起，也正是这部分钢筋的塑性功使板的极限载荷增大，这与塑性铰线理论的假设相吻合。板转动后的几何图形见图 2。

图 3 中塑性铰线 BE 绕线 AB 转动时钢筋伸长所做功为

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} \int_0^\nu T_x dy de(x) &= \int_0^{\alpha L} \int_0^\nu T_x \frac{dx}{\tan \varphi} \cdot \\ &\left\{ \sqrt{x^2 + \left[\frac{x}{\alpha L}(z + dz) \right]^2} - \sqrt{(x)^2 + \left(\frac{x}{\alpha L} z \right)^2} \right\} = \\ \int_0^{\alpha L} \int_0^\nu T_x \frac{dx}{\tan \varphi} \left[\frac{2zdz}{\sqrt{(x)^2 + \left(\frac{x}{\alpha L} z \right)^2}} \right] &= \\ \int_0^{\alpha L} \frac{T_x}{\tan \varphi} \left[\sqrt{(x)^2 + \left(\frac{x}{\alpha L} z \right)^2} \right] \Big|_0^\nu dx &= \\ \frac{T_x}{2} \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(\alpha L)^2 + \nu^2} + \alpha L} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

同样线 BE 绕线 BC 转动时钢筋伸长所做功为

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha L} \int_0^\nu T_y dx de(y) &= \int_0^{l/2} \int_0^\nu T_y dy \tan \varphi \cdot \\ &\left\{ \sqrt{y^2 + \left[\frac{y}{l/2}(z + dz) \right]^2} - \sqrt{(y)^2 + \left(\frac{y}{l/2} z \right)^2} \right\} = \\ \int_0^{l/2} \int_0^\nu T_y dy \tan \varphi \left[\frac{2zdz}{\sqrt{(y)^2 + \left(\frac{y}{l/2} z \right)^2}} \right] &= \\ \int_0^{l/2} \frac{T_y}{\tan \varphi} \left[\sqrt{(y)^2 + \left(\frac{y}{l/2} z \right)^2} \right] \Big|_0^\nu dx &= \\ \frac{T_y}{2} (\alpha L) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

线 EF 绕线 BC 转动时钢筋伸长所做功为

$$\begin{aligned} \int_{\alpha L}^{(1-\alpha)L} \int_0^\nu T_y dx de(y) &= \int_{\alpha L}^{(1-\alpha)L} \int_0^\nu T_y dx \cdot \\ &\left\{ \sqrt{y^2 + \left[\frac{y}{l/2}(z + dz) \right]^2} - \sqrt{(y)^2 + \left(\frac{y}{l/2} z \right)^2} \right\} = \\ \int_{\alpha L}^{(1-\alpha)L} \int_0^\nu T_y dx \left[\frac{2zdz}{\sqrt{(y)^2 + \left(\frac{y}{l/2} z \right)^2}} \right] &= \\ \int_{\alpha L}^{(1-\alpha)L} T_y \left[\sqrt{(y)^2 + \left(\frac{y}{l/2} z \right)^2} \right] \Big|_0^\nu dx &= \\ T_y (1 - 2\alpha) L \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

2.1 矩形板

均布外载荷做功

$$W = \frac{1}{6} q (3 - 2\alpha) L l \cdot \nu \quad (10)$$

弯矩转动做功

$$\begin{aligned} D_1 &= 4m_x \left(\frac{l}{2} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha L} + 4m_y (\alpha L) \cdot \frac{\nu}{l/2} + \\ &2m_y (1 - 2\alpha) L \cdot \frac{\nu}{l/2} = \\ &4m_x \left(\frac{l}{2} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha L} + 2m_y L \cdot \frac{\nu}{l/2} \end{aligned} \quad (11)$$

钢筋伸长做功

$$\begin{aligned} D_2 &= 4 \frac{T_x}{2} \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(\alpha L)^2 + \nu^2} + \alpha L} \right] + \\ &4 \frac{T_y}{2} (\alpha L) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] + \\ &2T_y (1 - 2\alpha) L \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] = \\ &2T_x \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(\alpha L)^2 + \nu^2} + \alpha L} \right] + \\ &2T_y (1 - \alpha) L \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

由外功与内功相等, 即 $W = D_1 + D_2$, 得

$$4m_x \left(\frac{l}{2} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha L} + 2m_y L \cdot \frac{\nu}{l/2} + 2T_x \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(\alpha L)^2 + \nu^2} + \alpha L} \right] + 2T_y (1 - \alpha) L \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] = \frac{1}{6} q (3 - 2\alpha) L l \cdot \nu \quad (13a)$$

$$\frac{2m_x}{\alpha L^2} + \frac{4m_y}{l^2} + \frac{T_x \cdot \nu}{\left[\sqrt{(\alpha L)^2 + \nu^2} + \alpha L \right] L} + \frac{2T_y (1 - \alpha) \cdot \nu}{\left[\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2 \right] l} = \frac{1}{6} q (3 - 2\alpha) \quad (13b)$$

如前述, 屈服薄膜力应在塑性铰线形成后逐渐增大, 故上式应写成

$$\frac{2m_x}{\alpha L^2} + \frac{4m_y}{l^2} + \frac{T_x \cdot (\nu - \nu_0)}{\left[\sqrt{(\alpha L)^2 + \nu^2} + \alpha L \right] L} + \frac{2T_y (1 - \alpha) \cdot (\nu - \nu_0)}{\left[\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2 \right] l} = \frac{1}{6} q (3 - 2\alpha) \quad (14)$$

式中, m_x , m_y , T_x , T_y 分别为板 x , y 方向每单位宽度上的弯矩和钢筋屈服力, ν_0 为塑性铰线形成时板的挠度. 它们之间关系为

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{m_x}{\gamma_{sx} h_{0x}} = f_{yx} A_{sx} \\ T_y &= \frac{m_y}{\gamma_{sy} h_{0y}} = f_{yy} A_{sy} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{sx} &= 1 - 0.5 f_{yx} A_{sx} / (f_c h_{0x}) \\ \gamma_{sy} &= 1 - 0.5 f_{yy} A_{sy} / (f_c h_{0y}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 f_c 为混凝土的受压强度, f_y 为钢筋的屈服强度, A_s 为板每单位宽度的钢筋面积, h_0 为截面有效高度, γ_s 为钢筋合力点到混凝土合力点之间距离系数.

如何确定塑性铰线形成时的挠度, 可以采用不同的方法. 文献 [8] 认为可以根据试验进行确定, Park 发现在形成塑性铰线时板的挠度一般为板厚的 0.4~0.5 倍, Powll 和 Wood^[16] 等的试验也发现形成塑性铰线时板的挠度为 0.33~0.5 倍板厚. 另一种方法是文献 [23] 提出的, Bailey 假设板变形后其形状是抛物线形式的, 并假定破坏时钢筋的平均应力为 $0.5f_y$, 这样板可以接受的破坏时最大挠度 Δ 与矩形板长跨方向跨度 L 关系为

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{0.5f_y}{E} \right) \frac{3L^2}{8}}$$

其中, f_y 为钢筋的屈服强度, E 为钢筋弹性模量.

类似上述方法, 如果假定在形成塑性铰线时钢筋的平均应力为 $0.1f_y$, 即

$$\nu_0 = \sqrt{\left(\frac{0.1f_y}{E} \right)_{\text{Reinf't}} \frac{3L^2}{8}}$$

这样式 (14) 的各种参数就都确定了.

当 $\nu \leq \nu_0$ 时, 式 (14) 即变成塑性铰线理论的机动法; 当 $\nu > \nu_0$ 时, 式 (14) 即可以考虑钢筋屈服拉力对钢筋极限承载力的影响.

将 m_x , m_y , T_x , T_y 之间关系代入后即可得到受拉薄膜力对钢筋混凝土板极限载荷的影响. 表 1 是式 (14) 与文献 [4] 试验结果的比较, 表中 e 为试验

表 1 矩形板试验尺寸及计算增大系数

Table 1 Details of rectangle concrete slab with mild steel tests and calculated enhancements

Slab	Dimension		Reinforcement						Spacing/ mm	$f_{cu}/$ MPa	$P/$ (kN·m ⁻²)	$P_{test}/$ (kN·m ⁻²)	e	Δ max/ mm	$e1$	$P_{cal}/$ P_{test}
	L×l×h/ mm ×mm×mm	Long span			Short span											
		$\phi/$ mm	$f_y/f_u/$ MPa	duct./ %	$\phi/$ mm	$f_y/f_u/$ MPa	duct./ %									
M1	1700×1100×18.2	2.42	732/756	1.49	2.42	757/777	3.26	50.8	41.3	8.52	20.74	2.44	72.5	2.55	1.04	
M3	1700×1100×22.0	1.53	451/487	6.39	1.49	454/495	8.98	25.4	35.3	6.35	12.28	1.93	85.4	2.31	1.19	
M5	1700×1100×18.9	1.47	406/500	9.89	1.48	435/473	9.87	12.7	37.9	8.69	17.92	2.06	68.1	2.33	1.13	
M7	1700×1100×20.4	0.84	599/653	3.30	0.85	604/679	2.91	12.7	41.6	5.11	8.65	1.69	49.7	1.62	0.96	
M9	1700×1100×22.0	0.66	450/470	1.30	0.68	402/454	3.93	6.35	37.6	5.07	7.35	1.45	22	1.47	1.01	
M11	1700×1100×18.6	2.42	732/756	1.49	2.42	757/777	3.26	50.8	39.8	5.11	8.89	1.74	72.4	1.91	1.09	
M13	1700×1100×36.6	2.42	732/756	1.49	2.42	757/777	3.26	50.8	42.0	21.94	29.12	1.33	54.4	1.39	1.05	

注: 混凝土板长跨方向钢筋的保护层为 5 mm, 其中 M11 和 M13 的保护层厚度为 9 mm.

Note: All slabs have 5 mm cover to reinforcement in long span, except M11 and M13 have a cover of 9 mm.

结果与塑性铰线理论计算结果比值, $e1$ 为本文计算结果与塑性铰线理论计算结果比值, 最后一列是本文计算结果与试验结果的比值. 对比发现, 本文结果较之文献 [2,4] 都更接近试验值.

2.2 方形板

对于图 4 中的方形板, 均布载荷作用时外力所做功为

$$W = \frac{1}{3}ql^2 \cdot \nu \quad (17)$$

弯矩转动所作功

$$D_1 = 4m_x \frac{l}{2} \cdot \frac{\nu}{l/2} + 4m_y \frac{l}{2} \cdot \frac{\nu}{l/2} \quad (18)$$

钢筋伸长所作功

$$\begin{aligned} D_2 &= 4 \frac{T_x}{2} \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] + \\ &4 \frac{T_y}{2} \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] = \\ &(2T_x + 2T_y) \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

根据内外功相等, 即 $W = D_1 + D_2$, 得

$$4m_x \frac{l}{2} \cdot \frac{\nu}{l/2} + 4m_y \frac{l}{2} \cdot \frac{\nu}{l/2} + (2T_x + 2T_y) \left(\frac{l}{2} \right) \cdot \left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] = \frac{1}{3}ql^2 \cdot \nu \quad (20a)$$

$$4m_x + 4m_y + (2T_x + 2T_y) \left(\frac{l}{2} \right) \cdot \left[\frac{\nu}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] = \frac{1}{3}ql^2 \quad (20b)$$

式中 $m_x, m_y, T_x, T_y, f_{yx}$ 和 A_s 等符号同前.

前面提及只在塑性铰线形成以后薄膜效应才逐渐明显, 因此上式应写成

$$4m_x + 4m_y + (2T_x + 2T_y) \left(\frac{l}{2} \right) \cdot \left[\frac{\nu - \nu_0}{\sqrt{(l/2)^2 + \nu^2} + l/2} \right] = \frac{1}{3}ql^2 \quad (21)$$

当 $\nu \leq \nu_0$ 时, 上式即变成塑性铰线理论的机动法; 当 $\nu > \nu_0$ 时, 上式即可以考虑钢筋屈服拉力对钢筋极限承载力的影响, ν_0 取值同矩形板.

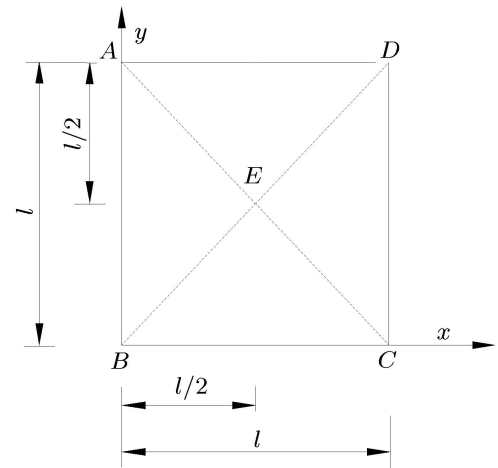


图 4 方形板的塑性铰线

Fig.4 Yield lines of square slab

表 2 是式 (21) 与文献 [4] 试验结果对比, 可以发现, 本文结果较之文献 [2,4] 都更接近试验值.

表 2 方板试验尺寸及计算增大系数

Table 2 Details of square concrete slab with mild steel tests and calculated enhancements

Slab	Dimension		Reinforcement						Spacing/ mm	$f_{cu}/$ MPa	$P/$ (kN·m ⁻²)	$P_{test}/$ (kN·m ⁻²)	e	$\Delta \max/$ mm	$e1$	$P_{cal}/$ P_{test}
	L×l×h/ mm ×mm×mm	Long span			Short span											
		$\phi/$ mm	$f_y/f_u/$ MPa	duct./ %	$\phi/$ mm	$f_y/f_u/$ MPa	duct./ %									
M2	1100×1100×19.1	2.42	732/756	1.49	2.42	757/777	3.26	50.8	38.0	13.8	26.99	1.96	60.4	2.13	1.09	
M4	1100×1100×20.1	1.53	451/487	6.39	1.49	454/495	8.98	25.4	35.3	8.17	18.29	2.24	65.2	2.06	0.92	
M6	1100×1100×21.6	1.47	406/500	9.89	1.48	435/473	9.87	12.7	38.6	15.72	27.03	1.72	48.0	1.67	0.97	
M8	1100×1100×19.0	0.84	599/653	3.30	0.85	604/679	2.91	12.7	42.9	6.68	10.70	1.60	29.8	1.36	0.85	
M10	1100×1100×19.7	0.66	450/470	1.30	0.68	402/454	3.93	6.35	37.3	6.36	9.89	1.56	19.6	1.26	0.81	
M12	1100×1100×19.4	2.42	732/756	1.49	2.42	757/777	3.26	50.8	40.7	8.96	16.17	1.80	65.4	2.10	1.16	
M14	1100×1100×35.9	2.42	732/756	1.49	2.42	757/777	3.26	50.8	40.2	31.03	41.18	1.33	46.0	1.35	1.01	

注: 混凝土板长跨方向钢筋的保护层为 5 mm, 其中 M12 和 M14 的保护层厚度为 9 mm.

Note: All slabs have 5 mm cover to reinforcement in long span, except M12 and M14 have a cover of 9 mm.

3 结 论

文献 [4, 26] 试验中发现: 在同样的挠度下, 方形板的破坏较之矩形板要早. 对比方程 (14) 和 (21) 可知, 矩形板中塑性铰线 EF 的钢筋的伸长耗能较其他塑性铰线伸长耗能要高, 因此矩形板承载力要高于同样条件下的方形板; 从表 1 和表 2 可以看出, 本文方法比已有计算方法 [2,4] 更接近试验结果. 利用本文方法, 同样可以解释在很多矩形板试验中钢筋在短跨方向被拉断的现象. 这是因为在弹性阶段, 短向承担的载荷要多些; 但在形成塑性铰线后, 其极限弯矩基本不增加, 此时增加的载荷将逐渐由长跨方向承担. 由于长跨跨中外载荷产生的弯矩要大于短跨方向的, 在同样配筋情况下, 就出现了钢筋在矩形板短跨方向被拉断的破坏形式.

因此有如下结论:

(1) 根据和分解定义的能量原理可知: 混凝土板大变形时的内力功包括沿塑性铰线截面弯矩转动做功和塑性截面受拉钢筋伸长做功两部分, 所采用的假定与传统的塑性铰线理论一致.

(2) 受拉薄膜效应是在塑性铰线形成后产生的, 当板的挠度小于或等于形成塑性铰线时的挠度, 本文方法变成传统的塑性铰线理论; 当板的挠度大于形成塑性铰线时的挠度, 本文方法可以计算薄膜效应对钢筋混凝土板极限载荷影响, 并认为极限载荷提高是由于塑性截面钢筋的伸长做功引起的.

(3) 本文方法既适用于矩形板和方形板, 也适用于各向同性配筋和各向异性配筋.

参 考 文 献

- 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学. 北京: 清华大学出版社, 1995. 409-466 (Xu Bingye, Liu Xinshen. Applied Elastic-Plastic Mechanics, Beijing: Tsinghua University Press, 1995. 409-466(in Chinese))
- 沈聚敏, 王传志, 江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析. 北京: 清华大学出版社, 1993. 396-410 (Shen Jumin, Wang Chuanshi, Jiang Jianjing. Finite Elements Method of Reinforced Concrete and Limit Analysis of Concrete Slabs and Shells. Beijing: Tsinghua University Press, 1993. 396-410(in Chinese))
- Park R. Tensile membrane behavior of uniformly loaded rectangular reinforced concrete slabs with full restrained edges. *Magazine of Concrete Research*, 1964, 16(46): 39-44
- Bailey CG, Toh WS. Small-scale concrete slab tests at ambient and elevated temperatures. *Engineering Structures*, 2007, 29(10): 2775-2791
- Nielsen MP. Limit Analysis and Concrete Plasticity, 2nd edn. New York: CRC Press, 1999. 625-648
- Christiansen KP. The effect of membrane stresses on the ultimate strength of the interior panel in a reinforced concrete slab. *Structural Engineer*, 1963, 41(8): 261-265
- Roberts EH. Load carrying capacity of slab strips restrained against longitudinal expansion. *Concrete*, 1969, 9(3): 369-378
- Park R. Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movement. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1964, 28: 125-150
- Park R. The lateral stiffness and strength required to ensure membrane action at the ultimate load of a reinforced concrete slab and beam floor. *Magazine of Concrete Research*, 1965, 17(50): 29-38
- Morley CT. Yield line theory for reinforced concrete slabs at moderately large deflections. *Magazine of Concrete Research*, 1967, 19(66): 211-221
- Jacobson A. Membrane flexural modes of restrained slabs. *Journal of Structural Division*, ASCE, 1967, 93(ST5): 85-112
- Brotchi JF, Holley MJ. Membrane action in slabs. *Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems*. ACI, Detroit, 1971(SP.30): 345-377
- Sawczuk A, Winnick L. Plastic behavior of simply supported reinforced concrete plates at moderately large deflections. *Int J. Solids Struct*, 1965, 1(1): 97-110
- Hung TY, Nawy EG. Limit strength and serviceability factors in uniformly loaded isotropically reinforced two-way slabs. *Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems*. ACI, Detroit, 1971(SP. 30): 301-311
- Moy SSJ, Mavfield B. Load deflection characteristics of reinforced concrete slabs. *Magazine of Concrete Research*, 1972, 24(81): 209-218
- Park R, Gamble WL. Reinforced Concrete Slabs. New York: John Wiley & Sons, 1980. 562-610
- Hopkins DC, Park R. Test on a reinforced concrete slab and beam floor designed with allowance for membrane action. *Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems*. ACI, Detroit, 1971(SP. 30): 223-250
- Park R. Further tests on a reinforced concrete floor designed by limit procedures. *Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems*. ACI, Detroit, 1971(SP. 30): 251-269
- Datta TK. Some studies on the ultimate load analysis of slab-beam floor system [PhD Thesis]. Bombay: Indian Institute of Technology, 1973. 80-111
- Ramesh CK, Datta TK. Ultimate strength of reinforced concrete slab-beam systems. *The Indian Concrete Journal*, 1973, 47(8): 301-308
- Kemp KO. Yield of a square reinforced concrete slab on simple supports, allowing for membrane forces. *The Structural Engineer*, 1967, 45(7): 235-240
- Hayes B. Allowing for membrane action in the plastic analysis of rectangular reinforced concrete slabs. *Magazine of Concrete Research*, 1968, 20(65): 205-211
- Bailey CG. Membrane action of unrestrained lightly reinforced concrete slabs at large displacements. *Engineering Structures*, 2001, 23(5): 470-483
- Bailey CG. Efficient arrangement of reinforcement for membrane behaviour of composite floor slabs in fire conditions. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003, 59(7): 931-949
- 陈至达. 杆、板、壳大变形理论. 北京: 科学出版社, 1994. 200-204 (Chen Zhida. Finite Deformation Theory of Beams, Plates and Shells. Beijing: Science Press, 1994. 200-204(in Chinese))
- Foster SJ, Bailey CG, Burgess IW, et al. Experimental behaviour of concrete floor slabs at large displacements. *Engineering Structures*, 2004, 26(9): 1231-1247

(责任编辑: 周冬冬)

CALCULATION OF TENSILE MEMBRANE EFFECTS OF CONCRETE SLABS USING DEFORMATION ADDITIVE DECOMPOSITION THEOREM¹⁾

Dong Yuli²⁾

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

Abstract Significant experimental and theoretical research work showed that, concrete slabs at large vertical displacements could support loads considerably greater than those calculated by the well-established yield-line approach. The mechanism for supporting the load was shown to be tensile membrane action, which could form within the slab irrespective of whether it was restrained or unrestrained horizontally at its boundaries. Most of these research works were based on work method. Combining of previous research work and segment equilibrium method, Bailey (2001) proposed a simplified design method, which took account the membrane action of composite floor slabs at large displacements. This model considered the slab with no in-plane horizontal restraint at its edges, can carry a load greater than that calculated using normal yield-line theory, is partly due to in-plane tensile stresses developing at the centre of the slab and partly due to the increase in yield moment in the outer regions of the slab, where compressive stresses occur. The enhancement included two parts, one is due to membrane action and another is due to membrane forces, of yield line load for each element. Typically the enhancements of 2 elements are not equal, and the difference was explained by the effects of vertical shear or the in-plane shear. Because Bailey's theoretical derivation was based on in-plane resultant moment equilibrium equations, and assumed the fracture failure model of reinforcements occurred through the depth of the slab across the short span at first, so it is not unified with the yield-line theory, and may lead to tedious calculations.

Based on the additive decomposition theory of deformation gradients, this paper presents an energy-based model to determine the limit carrying capacity of concrete slab at large displacement, which considered the membrane effects and unified with the conventional plastic line theory. The model could predict the load-carrying capacity of either rectangular or square concrete slabs with both orthotropic and isotropic reinforcement, and could interpret why for similar reinforcement the square slabs always fail at a lower vertical displacement compared to the rectangular slabs, and the reason of fracture of reinforcement along the short span of rectangular slab. Comparison between the developed model and test results shows good correlation.

Key words membrane effect, extension of reinforcement, plastic hinge line theory, concrete slabs, additive decomposition theorem

Received 31 August 2009, revised 24 February 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50878069) and the China MOST National Key Technology R&D Program (2006BAJ13B03).

2) E-mail: DongYL@hit.edu.cn