

周期激励下 Hartley 模型的簇发及分岔机制¹⁾

陈章耀 张晓芳 毕勤胜²⁾

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

摘要 通过在 Hartley 电路模型中引入周期变化的电流源, 选取适当的参数, 使得周期激励的频率与系统的固有频率之间存在量级上的差距, 从而建立了具有快慢效应的非线性电路. 引入广义自治系统的概念, 分析了其相应的平衡点及各种分岔行为, 给出了不同参数下广义自治系统存在 fold 分岔以及同时存在 fold 分岔与 Hopf 分岔下的两种不同的簇发现象, 即 fold/fold 簇发现象和 fold/subHopf/supHopf 簇发现象. 利用广义自治系统的分岔分析方法和转换相图, 揭示了不同簇发现象的产生机制.

关键词 周期激励 Hartley 模型, 广义自治系统, 转换相图, 簇发现象

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)04-0765-09

引 言

作为一个经典的混沌电路, 蔡氏模型的复杂动力学行为已经得到深刻的认识^[1-9]. 值得指出的是, Hartley 等^[10]用三次方模块取代原来的分段线性的二极管(本文简称为 Hartley 模型), 不仅避开了原系统的非光滑性, 同时也保留了蔡氏电路中的许多非线性现象, 受到了许多学者的关注^[11-12]. 迄今为止, 这些结果大都是基于自治系统的. 然而, 对于电路系统而言, 其结构中可能包含各种形式的交变电源^[13]. 本文在 Hartley 等提出的电路模型的基础上, 并联一个周期变化的交变电流源, 获得一个非自治蔡氏电路. 通过选取适当的物理量, 使周期激励的频率远小于系统的固有频率, 从而建立具有快慢效应的两时间尺度周期激励下的蔡氏电路.

一般地, 快慢系统的周期振荡经常表现为由相对的大幅值和微小幅值两种振荡的组合, 大幅振荡和小幅振荡可以分别看作快慢系统的激发态(spiking)和沉寂态(quiescent state), 这种连接快慢两过程的行为通常也称为簇发(bursting). 簇发现象在神经元模型中已得到广泛的认识^[14]. 对于一般的快慢系统, Eugene^[15]对低维情形下各种簇发现象及其分岔机制做了很好的总结. 然而, 对于两时间尺度下高维非线性系统中的各种簇发现象及其复杂性机制, 还有许多问题亟待解决. 特别地, 有关真实的电

路系统, 尤其是周期激励下电路系统的快慢效应, 有待进一步的探索.

本文模型中, 由于周期激励频率远小于系统固有频率, 即周期激励项的变化是在慢尺度上发生的, 因而将整个周期激励项看作分岔参数, 引入广义自治系统和转换相图的概念, 来分析系统随该分岔参数变化所产生的各种分岔行为及其相应的条件, 进而探讨系统连接快慢过程的各种簇发现象, 并给出其相应的分岔机制.

1 周期激励下两时间尺度的 Hartley 电路模型

在具有立方非线性模块的 Hartley 模型的基础上(图 1), 并联一个周期变化的交变电流源(图 1 虚线所示).

Hartley 模型的方程见文献[9]; 而修改后的电路系统方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G_1(V_2 - V_1) - g(V_1) + I_G \sin \omega t] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G_1(V_1 - V_2) + i_3] \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L_1} V_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2009-10-09 收到第 1 稿, 2009-12-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10872080, 20976075)和江苏大学高级人才启动基金(10JDG062)资助项目.

2) E-mail: qbi@ujs.edu.cn

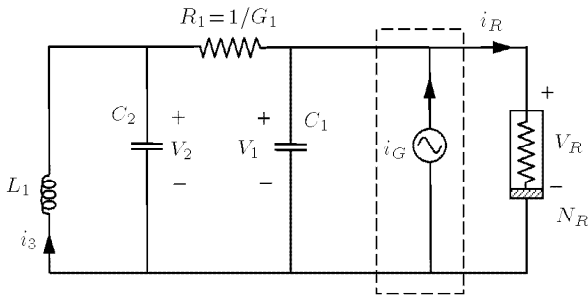


图 1 Hartley 模型 (不含虚线); 外激励下的 Hartley 模型 (含虚线)
($i_G = I_G \sin \omega t$)

Fig.1 Hartley model (without dash line); The externally excited Hartley model (with dash line) ($i_G = I_G \sin \omega t$)

其电阻特性曲线 (图 2) 为

$$i_R = g(V_1) = G_1(\alpha V_1^3 - \beta V_1) \quad (2)$$

其中 $R_1 = 1/G_1$.

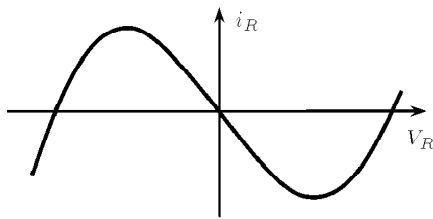


图 2 立方非线性电阻 $V-i$ 特性曲线

Fig.2 The cubic $V-i$ characteristic of the nonlinear resistor

引入变换: $x = V_1$, $y = V_2$, $z = i_3 R_1$, $t = R_1 C_2 \tau$, $f(x) = R_1 g(V_1)$, 将式 (1) 表示为无量纲形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a[y - x - f(x)] + A \sin \theta \tau \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -by \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, $a = \frac{C_2}{C_1}$, $b = \frac{R_1^2 C_2}{L_1}$, $A = I_G R_1$, $\theta = \omega R_1 C_2$, $f(x) = \alpha x^3 - \beta x$. 参数 a, b, A, θ 均大于零. 在本文中, 非线性模块在参数控制中是不变的, 取定 $\alpha = \frac{2}{7}$, $\beta = \frac{8}{7}$. 为研究方便, 将方程 (3) 写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a\left(y - \frac{2}{7}x^3 + \frac{1}{7}x\right) + w \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -by \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, $w = A \sin \theta \tau$, 且 $a > 0, b > 0, A > 0, \theta > 0$.

当外激励频率 ω (即无量纲下的 θ) 远小于系统固有频率 ω_0 时 ($\omega/\omega_0 \leq 10^{-2}$), 外激励项表现为慢

变量, 从而导致整个系统存在两个时间尺度, 即 t 和 ωt (包括无量纲下的 τ 和 $\theta \tau$). 不同时间尺度的行为会相互作用, 产生不同形式的簇发等复杂的动力学行为.

2 广义自治系统的分岔分析

取慢变量 w 为快子系统 (4) 的分岔参数, 则子系统 (4) 可看作广义自治系统. 为揭示快子系统随 w 的分岔特性, 首先叙述 3 个引理.

引理 1^[16] 实系数一元三次方程 $y^3 + py + q = 0$ 有判别式 $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, 则有

- (1) 当 $\Delta < 0$ 时, 有 3 个不同的实根;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有 3 个实根, 且有重根;
- (3) 当 $\Delta > 0$ 时, 只有 1 个实根和 1 对共轭复根.

引理 2 设多项式 $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$, 则 $P(\lambda)$ 有 1 对纯虚根且第 3 个根为负实根的充要条件为

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 = a_1 a_2$$

且有一对纯虚根为 $\lambda = \pm i\omega$, 其中 $\omega = \sqrt{a_2}$.

引理 3^[17] 设 $A(\mu) = D_x F(0, \mu)$, $x \in R^3$, $\mu \in R^1$, $A(\mu)$ 的特征方程为

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^3 + a_1(\mu)\lambda^2 + a_2(\mu)\lambda + a_3(\mu)$$

$F(x, u)$ 关于 x, μ 解析, 且当 $\mu = 0$ 时

- (1) $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$;
- (2) $\frac{da_3}{d\mu} \neq \frac{da_1}{d\mu} a_2 - a_1 \frac{da_2}{d\mu}$;
- (3) $a_3 = a_1 a_2$.

则系统 $\frac{dx}{dt} = F(x, u)$, $F(0, \mu) = 0$, 当 $|\mu|$ 充分小时, 在 $\mu = 0$ 的某一侧存在 Hopf 分支.

2.1 Fold 分岔

为了进一步揭示广义自治系统 (4) 的分岔行为, 首先分析参数 a 及 w 对系统 (4) 平衡点的影响.

定理 1 若 w 设为广义自治系统 (4) 的分岔参数, 则系统平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 在 $w = w_c$ 处产生 fold 分岔的充要条件是

$$\frac{w_c}{a} = \pm \sqrt{\frac{2}{1323}} \quad \text{且} \quad x_0 = \mp \sqrt{\frac{1}{6}}$$

证明 系统 (4) 的平衡点可以表示为 $E(x_0, 0, -x_0)$, 其中 x_0 满足如下方程 (由 $dx/d\tau = 0$, $dy/d\tau = 0$, $dz/d\tau = 0$ 得到)

$$x_0^3 - \frac{1}{2}x_0 - \frac{7}{2} \cdot \frac{w_c}{a} = 0 \quad (5)$$

由引理 1, $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{7}{2} \cdot \frac{w_c}{a}$, 有 $\Delta = \frac{49}{16} \left(\frac{w_c}{a} \right)^2 - \frac{1}{216}$, 若 $\Delta = 0$, 得

$$\left(\frac{w_c}{a} \right)^2 = \frac{2}{1323} \quad (6a)$$

当 $\Delta > 0$ 时, 方程只有 1 个实根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程有 3 个不同的实根; 而在临界条件 $\left(\frac{w_c}{a} \right)^2 = \frac{2}{1323}$, 即 $\Delta = 0$ 时会产生分岔, 导致平衡点数量的改变. 同时, 根据 fold 分岔的定义^[18], 在平衡点处其相应的 Jacobian 矩阵存在为零的特征值, 从而有

$$-\frac{1}{7}ab + \frac{6}{7}abx_0^2 = 0, \quad \text{即} \quad x_0^2 = \frac{1}{6} \quad (6b)$$

证毕.

2.2 Hopf 分岔

定理 2 若 w 设为广义自治系统 (4) 的分岔参数, 则系统平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 在 $w = w_c$ 处产生 Hopf 分岔的充要条件是

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\frac{w_c}{a} \right)^2 > \frac{2}{1323}; \\ (2) \quad & \left(\frac{e_3 w_c}{e_1 + e_2 w_c^2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{e_3 w_c}{e_1 + e_2 w_c^2} \right) - \frac{7w_c}{2a} = 0. \end{aligned}$$

其中, $e_1 = 48a^4(6a - 7)(10a^2 + 35a - 49b)$, $e_2 = -127008a^5$, $e_3 = 7056a^4(7b - 7 + 4a - 4a^2)$.

证明 设当 $w = w_c$ 经过平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 可能产生 Hopf 分岔, 设 $x = X + x_0$, $y = Y$, $z = Z - x_0$, $w = \mu + w_c$, 则原方程改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= a(Y + k_3 X^3 + k_2 X^2 + k_1 X) + \mu \\ \frac{dY}{d\tau} &= X - Y + Z, \quad \frac{dZ}{d\tau} = -bY \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中, $k_3 = -\frac{2}{7}$, $k_2 = -\frac{6}{7}x_0$, $k_1 = -\frac{6x_0^2}{7} + \frac{1}{7}$. 这样广义自治系统 (4) 的 Hopf 分岔的讨论转化为在 $(0, 0, 0)$ 处的讨论, 并可用引理 3. 此时特征多项式为

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^3 + a_1(\mu)\lambda^2 + a_2(\mu)\lambda + a_3(\mu)$$

其中 $a_1 = 1 - ak_1 = 1 - \frac{1}{7}a + \frac{6}{7}ax_0^2$, $a_2 = b - a(k_1 + 1) = b - \frac{8}{7}a + \frac{6}{7}ax_0^2$, $a_3 = -abk_1 = -\frac{1}{7}ab + \frac{6}{7}abx_0^2$.

由引理 2 及引理 3 中条件的 (1) 和 (2) 得方程 (7) 存在 Hopf 分岔条件为

$$a_1 = 1 - \frac{1}{7}a + \frac{6}{7}ax_0^2 = \left(\frac{6}{7}ax_0^2 - \frac{1}{7}a \right) + 1 > 0 \quad (8a)$$

$$a_2 = b - \frac{8}{7}a + \frac{6}{7}ax_0^2 = \left(\frac{6}{7}ax_0^2 - \frac{1}{7}a \right) - (a - b) > 0 \quad (8b)$$

$$a_3 = -\frac{1}{7}ab + \frac{6}{7}abx_0^2 = \left(\frac{6}{7}ax_0^2 - \frac{1}{7}a \right)b > 0 \quad (8c)$$

$$\frac{12x_0}{6x_0^2 - 1}b \neq -\frac{12x_0(a - b + 1)}{6x_0^2 - 1} \quad (8d)$$

由式 (8a)~ 式 (8c), 并代入系统的平衡方程 (5), 得 $\left(\frac{w_c}{a} \right)^2 > \frac{2}{1323}$, 由式 (8d) 得 $a \neq -1$, 根据电路参数的物理意义 $a > 0$, 故式 (8d) 总是成立. 另外由引理 2 和引理 3 中的条件 (3) 得到

$$\frac{36a^2}{49}x_0^4 + \left(\frac{6}{7}a - \frac{54}{49}a^2 \right)x_0^2 + \left(b - \frac{8a}{7} + \frac{8a^2}{49} \right) = 0 \quad (9)$$

由广义自治系统平衡方程 (5) 和 (9) 两式联立消去 x_0 , 得

$$\left(\frac{e_3 w_c}{e_1 + e_2 w_c^2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{e_3 w_c}{e_1 + e_2 w_c^2} \right) - \frac{7w_c}{2a} = 0 \quad (10)$$

其中

$$e_1 = 48a^4(6a - 7)(10a^2 + 35a - 49b)$$

$$e_2 = -127008a^5$$

$$e_3 = 7056a^4(7b - 7 + 4a - 4a^2)$$

证毕.

2.3 广义自治系统的分岔曲线

由上述分析可知, 广义自治系统可能产生 fold 和 Hopf 两种分岔行为. 为进一步描述各种分岔及其相应条件, 取 $R_1 = 0.1\Omega$, $C_2 = 10\text{mF}$, $L_1 = 0.007\text{mH}$, 此时无量纲参数 $b = 100/7$, 可得广义自治系统无量纲参数 a 及 w 平面上的分岔曲线. 由式 (6a) 和式 (10) 可画出 fold 分岔直线 LP1, LP2 和 Hopf 分岔曲线 H1 和 H2.

注意到, 由式 (6b) 可知, fold 分岔点 $x_0^2 = \frac{1}{6} = (\pm 0.408248)^2$, 它与参数 a 及 w 无关. 同时在定理 2 中有 $\left(\frac{w_c}{a} \right)^2 > \frac{2}{1323}$, 由此可知 Hopf 分岔点与 fold 分岔点的位置关系. 图 3 表明, 两根 Hopf 分岔曲线永远在 fold 分岔直线的一侧, 最多与 fold 分岔直线相切, 即 Bogdanov-Takens 分岔点 BT1 和 BT2^[18].

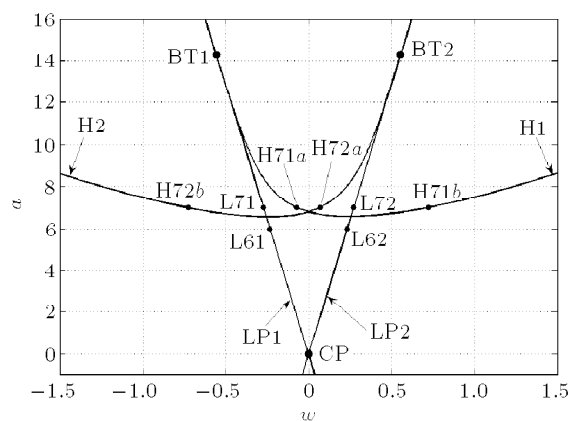


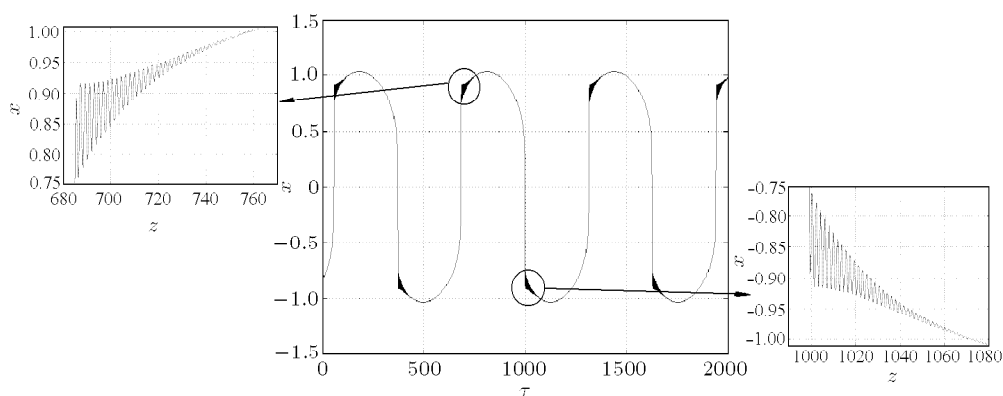
图 3 $b = 100/7$ 时广义自治系统在 $(w-a)$ 参数平面的分岔曲线
Fig.3 Bifurcation sets of the generalized autonomous system
on parameter plane $(w-a)$ for $b = 100/7$

3 快慢效应

3.1 对称式 fold/fold 簇发现象

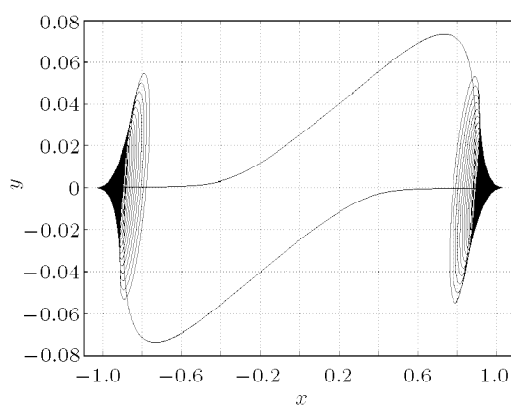
在模型中, 选取 $C_1 = \frac{10}{6}$ mF, 外激励幅值 $I_G = 10$ mA, 外激励圆频率 $\omega = 0.01$ kHz, 无量纲参数 $a = 6$, 此时系统固有频率 $\omega_0 \approx 3.10$ (即 $\omega/\omega_0 < 10^{-2}$). 激励参数 $w = 1.0 \sin(0.01\tau)$.

图 4(a) 和图 4(b) 分别为 $a = 6$ 时, 周期激励下系统 (3) 的时间历程和 $x-y$ 平面的相图. 由图可见, 系统轨迹作大幅的周期振荡, 在局部区域, 则出现微幅振荡.



(a) 时间历程

(a) The time history



(b) $x-y$ 平面相图

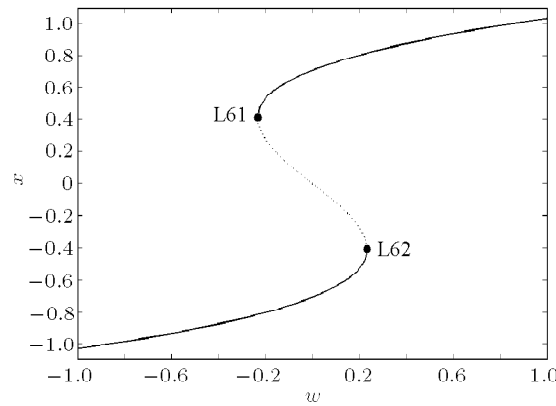
(b) The phase portraits on $x-y$ plane

图 4 $a = 6.0$ 时系统的簇发

Fig.4 The bursting of the system for $a = 6.0$

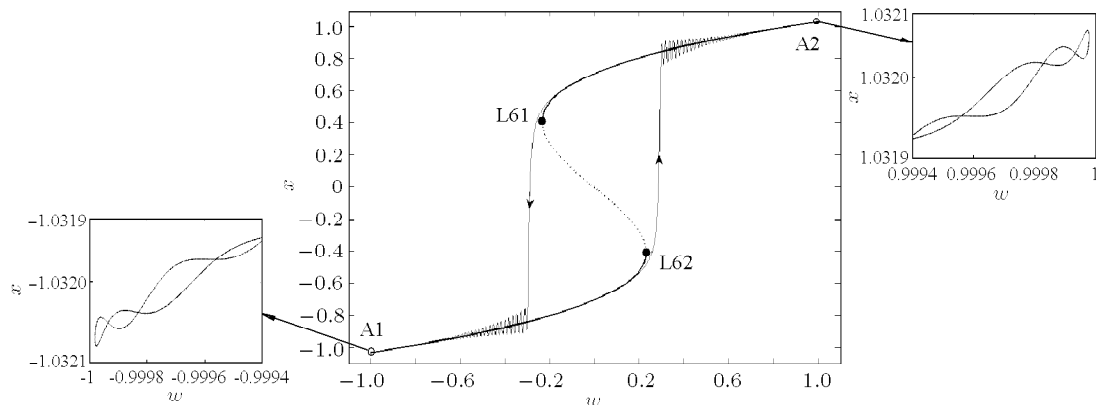
为揭示这种运动模式的产生机制, 引入转换相图的概念, 即将系统的轨线转换到 $(x, w) = (x(\tau), A \sin \theta \tau)$ 平面上. 图 5(b) 中含箭头的曲线给出了系统 $a = 6.0$ 时在平面 $x-w$ 上的转换相图.

图 4(b) 和图 5(b) 中明显存在着与时间历程相对应的快变和慢变过程, 而从图 5(b) 转换相图上可看出, 随慢变量 $w(w = A \sin \theta \tau)$ 的变化, 微幅振荡的特性更加清晰.



(a) $a = 6.0$ 时广义自治系统对 w 的单参数分岔分析

(a) One parameter bifurcation diagram of the generalized autonomous system with respect to w for $a = 6.0$



(b) $a = 6.0$ 时广义自治系统对 w 的单参数分岔分析图与 $w-x$ 平面转换相图叠加

(b) The overlay of the one parameter bifurcation diagram with the projection of transformed phase portrait onto $w-x$ plane for $a = 6.0$

图 5

Fig.5

图 5(a) 为广义自治系统平衡点随参数 w 的分岔图. 当 $w = \pm 0.233285$ 时, 广义自治系统产生 fold 分岔 (L61 和 L62 点), L61 和 L62 区间对应 3 个平衡点. 其中虚线为不稳定焦点, 实线为稳定焦点. 其中 L61, L62 即为图 3 中 $a = 6.0$ 的水平直线与分岔直线的交点. 图 5(b) 为激励系统轨线的转换相图与广义自治系统的分岔图在 $x-w$ 平面上的叠加.

不妨从轨线的上分支 $w = 0$ 开始分析. 当激励参数 $w = 0$ 时, 上分支轨线处于沉寂态, 随着 w 的

减少, 轨线在 L61 点由 fold 分岔跳跃到下分支平衡点附近, w 继续减少, 由于广义自治系统平衡点为稳定的焦点, 故轨迹围绕其平衡点的振动幅值越来越小, 最后在 $w_{\min} = -1$ 处即 A1 点返回. 返回时即 w 增加时, 系统轨迹几乎与平衡线重合, 说明围绕平衡点的系统振动幅值很小. 随 w 增加, 到达 L62 点时, 轨线再由 fold 分岔跳跃到上分支, 此时系统振动幅值较大. 随 w 继续增加, 系统振动幅值由于受到稳定焦点的吸引而不断减小, 并在到达 $w_{\max} = +1$ 时折回. 如

此重复, 形成了对称式 fold/fold 簇发现象.

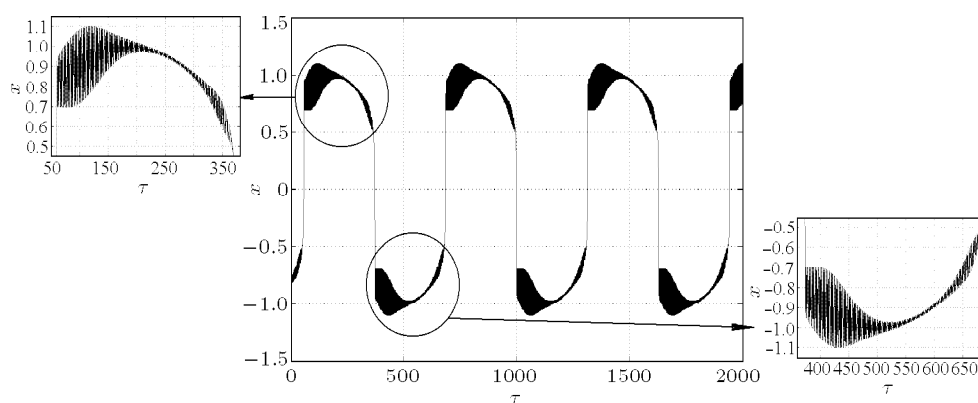
必须指出的是, 图 5(b) 中的转换相图是作者为解释系统快慢效应机制而引入的. 图 4(a) 和图 4(b) 才真实地呈现了系统的时间历程、系统轨线相图及簇发现象. 由此可知, 非线性电路选用适当的控制参数在周期激励下可以产生簇发现象.

3.2 对称式 fold/subHopf/supHopf 簇发现象

随着系统电容 C_1 值增加, 广义自治系统可能

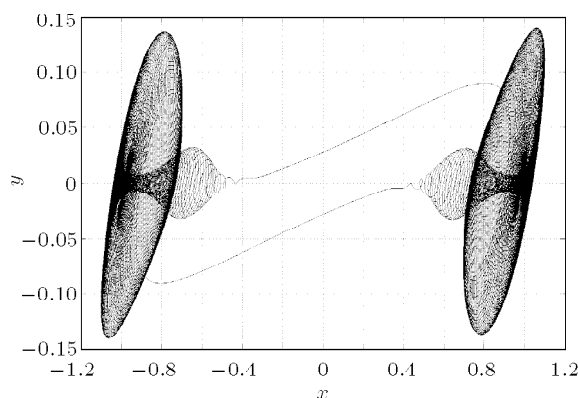
会产生 Hopf 分岔. 选取 $C_1 = \frac{10}{7}$ mF, 外激励幅值 $I_G = 10$ mA, 圆频率 $\omega = 0.01$ kHz, 无量纲参数 $a = 7$, 此时系统固有频率 $\omega_0 \approx 3.07$ (即 $\omega/\omega_0 < 10^{-2}$). 激励参数为 $w = 1.0 \sin(0.01\tau)$.

图 6(a) 和图 6(b) 分别为系统 (3) 的时间历程和 x - y 平面的相图. 它们呈现了周期振荡和微幅振荡的快慢现象. 图 7(b) 中含箭头的曲线为系统 w - x 平面的转换相图, 可清晰看出系统轨线的运动路径.



(a) 时间历程

(a) The time history



(b) x - y 平面相图

(b) The phase portraits on x - y plane

图 6 $a = 7.0$ 时系统的簇发

Fig.6 The bursting of the system for $a = 7.0$

图 7(a) 给出了广义自治系统 $a = 7$ 时, 关于参数 w 的平衡点的分岔分析, 用定理 1 求得了 4 个 Hopf 分岔点 (H71a, H71b, H72a, H72b). 通过数值计算知, H71a, H72a 为超临界 Hopf 分岔点, H71b, H72b 为亚临界 Hopf 分岔点. 由于存在两种

属性的 Hopf 分岔点, 故在 LPC 处稳定的极限环和不稳定的极限环碰撞产生折迭分岔 (limit point bifurcation of cycles). 其中 4 个分岔点的坐标分别为 H71a, H72a ($\mp 0.069\,044, \pm 0.669\,663$), H71b, H72b ($\pm 0.724\,109, \pm 0.940\,683$). 图中实线为稳定的焦点,

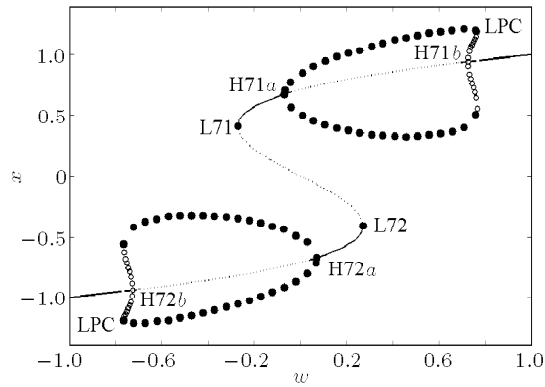
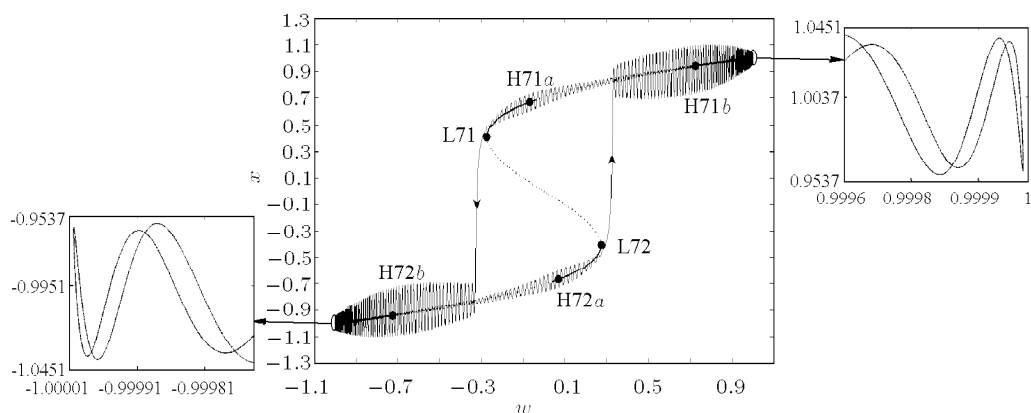
(a) $a = 7.0$ 时广义自治系统对 w 的单参数分岔分析(a) One parameter bifurcation diagram of the generalized autonomous system with respect to w for $a = 7.0$ (b) $a = 7.0$ 时广义自治系统对 w 的单参数分岔分析图与 w - x 平面转换相图叠加(b) The overlay of the one parameter bifurcation diagram with the projection of transformed phase portrait onto w - x plane for $a = 7.0$

图 7

Fig.7

虚线为不稳定的焦点, $L71$, $L72$ 为 fold 分岔点 ($\pm 0.408248, \mp 0.272166$). 图中各分岔点与图 3 中 $a = 7.0$ 水平直线与各分岔线的交点对应.

图 7(b) 为广义自治系统 $a = 7$ 时, 关于参数 w 的平衡点的分岔分析图和系统相轨线在 w - x 平面的叠加. 在轨线处于上分支 $w = 0$ 时, 系统处于激发态, 随 w 减少, 系统在 $H71a$ 点由于超临界 Hopf 分岔进入沉寂态, 到达 $L71$ 点时由于 fold 分岔, 轨线跳跃到下分支, 转换到另一位置的激发态. 随 w 继续减少, 由于亚临界 Hopf 分岔点 $H72b$ 的存在, 系统轨线稳定的周期运动逐渐被稳定的焦点所吸引, 使轨线的微幅运动幅值变小, 直到在 $w_{\min} = -1$ 处折回. 当 w 增加时, 由于此时轨线受到广义自治系统稳定的焦点和不稳定极限环的影响, 轨线的振幅变得更小. 但

随 w 继续增加, 由于亚临界 Hopf 分岔点的存在, 广义自治系统不稳定的焦点和稳定的极限环出现, 使轨线微幅振荡的运动幅值缓慢增加, 直到 $H72a$ 由于超临界 Hopf 分岔, 使轨线进入沉寂态. 随后当 w 增加到 $L72$ 点, 由于 fold 分岔, 轨线又跳跃到上分支, 并围绕上分支平衡点作较大幅值的运动, 即进入激发态. 当 w 继续增加时, 由于亚临界 Hopf 分岔点和稳定焦点的存在, 使得轨线微幅运动幅值逐渐减少, 最后在 $w_{\max} = +1$ 处折回. 当 w 减少时, 由于稳定焦点的吸引, 系统振动的幅值较小. 但当 w 通过了亚临界 Hopf 分岔点 $H71b$ 并继续减少时, 系统运动的幅值缓慢增加, 直至遇到超临界 Hopf 分岔点 $H71a$. 当 w 继续减少时, 系统进入沉寂态. 由此往复, 形成新的簇发现象. 由于系统的激发态到达了两种 Hopf 分

岔情况, 系统轨线连接了 3 个分岔点. 这里将这种现象称为对称式 fold/subHopf/supHopf 簇发现象.

4 结 论

当非线性电路中存在两种不同的时间尺度时, 不同尺度上的行为分别表现为沉寂态和簇发态. 随着参数的变化, 它们之间会产生相互作用, 导致系统产生诸如簇发等特殊的非线性现象. 同时, 连接沉寂态和激发态的分岔模式不同, 也会导致不同的簇发现象, 如当只有 fold 分岔时, 产生 fold/fold 簇发, 而当 fold 分岔和 Hopf 分岔同时存在时, 会产生 fold/Hopf 簇发. 另外, 广义自治系统及转换相图的概念可为分析非自治系统的簇发现象提供一种可借鉴的研究方法.

参 考 文 献

- Chua LO, Lin GN. Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans Circ Syst*, 1990, 37: 885–902
- Albuquerque HA, Rubinger RM, Rech PC. Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless Chua's circuit. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2007, 233: 66–72
- Korneta W, Gomes I, Mirasso C, et al. Experimental study of stochastic resonance in a Chua's circuit operating in a chaotic regime. *Physica D*, 2006, 219: 93–100
- Chua LO, Wu CW, Huang A, et al. A universal circuit for studying and generating chaos. *IEEE Trans Circ Syst*, 1993 40: 732–745
- Stouboulos IN, Miliou AN, Valaristos AP, et al. Crisis induced intermittency in a fourth-order autonomous electric circuit. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 33: 1256–1262
- Korneta W, Gomes I, Mirasso CR, et al. Experimental study of stochastic resonance in a Chua's circuit operating in a chaotic regime. *Physica D*, 2006, 219: 93–100
- Tang F, Wang L. An adaptive active control for the modified Chua's circuit. *Phys Lett A*, 2005, 346: 342–346
- Chen ZY, Zhang XF, Bi QS. Bifurcations and chaos of coupled electrical circuits. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9: 1158–1168
- Cincotti S, Stefano SD. Complex dynamical behaviours in two non-linearly coupled Chua's circuits. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 21: 633–641
- Hartley TT, Mossayebi F. Matrix integrators for real-time simulation of singular systems. In: Proc of Amer Control Conf, Pittsburgh, USA, 1989. 419–423
- Hassan S, Aria A. Adaptive chaos synchronization in Chua's systems with noisy parameters. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 79(3): 233–241
- Yassen MT. Adaptive control and synchronization of a modified Chua's circuit system. *Applied Mathematics and Computation*, 2003 (135): 113–128
- 湛龙, 王德石. 陈氏混沌系统的非反馈控制. 物理学报, 2007, 56(1): 91–94 (Chen Long, Wang Deshi. Nonfeedback control of Chen's chaotic system. *Acta Phys Sin*, 2007, 56(1): 91–94(in Chinese))
- Yang ZQ, Lu QS. Different types of bursting in Chay neuronal model. *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2008, 51 (6): 687–698
- Eugene MI. Neural excitability, Spiking and Bursting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(6): 1171–1266
- 拜尔 WH. 标准数学手册. 荣现志, 张顺忠译. 北京: 化学工业出版社, 1988 (Beyer WH. Standard Mathematical Tables. Rong Xianzhi, Zhang Shunzhong, trans. Beijing: Chemical Industry Press, 1988 (in Chinese))
- 李继彬, 冯贝叶. 稳定性、分支与混沌. 昆明: 云南出版社, 1995 (Li Jibin, Feng Beiye. Stability, Bifurcation and Chaos. Kunming: Yunnan Press, 1995(in Chinese))
- Kuznetsov YA. Elements of Applied Bifurcation Theory. 2nd ed, New York: Springer-Verlag, 1998

(责任编辑: 何漫丽)

BURSTING PHENOMENA AS WELL AS THE BIFURCATION MECHANISM IN PERIODICALLY EXCITED HARTLEY MODEL ¹⁾

Chen Zhangyao Zhang Xiaofang Bi Qinsheng²⁾

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract By introducing periodically alternated current source as well as suitable values for the parameters to ensure that there exists order gap between the natural frequency and the excited frequency, nonlinear electric circuit with fast-slow effect has been established. Based on the conception of generalized autonomous system and the analysis of the properties of equilibrium points, all possible bifurcation forms have been discussed. Different types of bursting phenomena, such as fold/fold burster, fold/subHopf/supHopf burster, in which the fold or Hopf bifurcations may connect the quiescent states and the spiking states, have been presented. The mechanism of the bursters is explored via bifurcation analysis, which has been illustrated by transformed phase portraits of the generalized autonomous system.

Key words periodically excited Hartley model, generalized autonomous system, transformed phase portraits, bursting phenomenon

Received 9 October 2009, revised 13 December 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872080, 20976075) and Senior Qualified Personnel Foundation of Jiangsu University (10JDG062).

2) E-mail: qbi@ujs.edu.cn