

受压橡胶海绵圆筒的轴对称平面应变问题研究

李士军¹⁾ 林国问 马大为

(南京理工大学机械工程学院, 南京 210094)

摘要 针对橡胶海绵材料圆筒受压问题, 根据欧拉 - 拉格朗日变分原理, 建立了基于 Blatz-Ko 材料模型的轴对称平面应变问题的非线性微分方程. 采用参数变换的方法, 获得了该问题的参数形式解析解. 并通过相应数值算例, 得到了径向应力和切向应力沿圆筒径向的变化规律, 以及过盈量对径向应力和切向应力影响规律.

关键词 橡胶海绵, 轴对称平面应变, 有限变形, Blatz-Ko 应变能函数

中图分类号: O343.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)02-0579-04

引 言

橡胶海绵材料是以天然橡胶或者氯丁橡胶等通用橡胶材料作为主体材料^[1], 采用发泡剂作为发泡原料, 通过控制橡胶硫化时的发泡时间来制成橡胶海绵. 橡胶海绵既承袭了橡胶的弹性体特性, 又具有海绵材料的柔软、微孔结构, 近年来在工业和国防建设中得到了广泛的应用. 导弹适配器是导弹冷发射系统中的重要组成部分, 采用橡胶海绵材料制造成圆筒形, 通过过盈配合安装在导弹与发射筒之间隙中. 导弹适配器能够削弱行军和冷弹射时由发射筒振动所带来的不利影响, 避免导弹与发射筒碰撞, 保护导弹安全, 并且能起到密封作用.

受压的导弹适配器可以简化为轴对称模型, 但目前对橡胶海绵材料结构的研究主要集中在球形结构和圆柱结构的空穴效应问题上^[2-3]. Dienes 等^[4]根据橡胶海绵材料应力变化率和应变变化率关系, 提出了“ab initio theory”计算方法, 计算结果和实验结果符合很好; Kirkinis 等^[5]研究了可压缩弹性材料组成的球形结构, 得出了球形结构受压时的封闭解; 廖毕丰等^[6]研究了一类各向同性可压缩的超弹性材料组成的球壳的径向对称变形问题, 求得了问题的参数型解析解; Yang 和 Shim^[7]对橡胶海绵材料进行研究, 提出了一种基于 Cauchy 变形张量中 3 个不变量为多项式基的应变能函数, 并指出了橡胶海绵材料的泊松比近似为 0; 史守霞等^[8]通过平面应变假设研究了橡胶圆柱受压问题, 得到了问题的解析解; 范成业等^[9]和邹雨等^[10]研究了橡胶材

料的轴对称过盈配合问题, 分别基于轴对称平面应变假设和轴对称平面应力假设, 得到了相应问题的解析解. 本文根据 Yang 和 Shim 提出的泊松比近似为 0 的结论, 对受压的橡胶海绵圆筒采用轴对称平面应变假设, 研究其受压时的轴对称变形问题.

1 轴对称平面应变问题的几何描述

由橡胶海绵材料组成的圆筒, 在内外压力作用下发生变形, 考虑到这种材料的泊松比近似为 0, 可以认为其轴向长度不会发生改变, 因此可以把问题简化为轴对称平面应变问题进行研究. 假设圆筒长度为 L , 变形前的内外半径分别为 R_I 和 R_O (下标含有 I 和 O 的参数分别表示圆筒内表面和外表面相关参数), 受到内外压力为 σ_{rI} 和 σ_{rO} 的作用, 变形后的内外半径分别为 r_I 和 r_O . 在柱坐标系下, 任一点变形前的坐标为 (R, θ, Z) , 变形后的坐标为 (r, θ, z) , 由于是轴对称平面应变问题, 所以其变形模式可以设为

$$r = f(R), \quad \theta = \theta, \quad z = \lambda Z \quad (1)$$

根据式 (1) 可以得到变形梯度的 3 个主伸长度

$$\lambda_r = dr/dR, \quad \lambda_\theta = r/R, \quad \lambda_z = 1 \quad (2)$$

2 轴对称平面应变问题的微分方程

橡胶海绵材料是一种可压缩材料, 目前针对可压缩材料的应变能函数主要有 4 种, 修正的 Ogden-Hill 应变势能函数、Blatz-Ko 应变势能函数、Yang

2009-08-18 收到第 1 稿, 2009-12-24 收到修改稿.

1) E-mail: kinzyking@126.com

提出的应变势能函数以及顾占芳提出的应变势能函数. 除 Blatz-Ko 应变能函数外, 其他形式的应变能函数虽然也能够精确描述材料的变形特性, 但是其形式复杂, 不利于对问题进行分析; 而 Blatz-Ko 应变能函数具有简洁的形式, 又能描述可压缩橡胶海绵材料的变形特性, 因此本文采用 Blatz-Ko 应变能函数来描述橡胶海绵的受压特性, 其应变能函数为

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 5) \quad (3)$$

其中, μ 为橡胶海绵材料在自然状态下的剪切模量, λ_i 为主伸长比.

橡胶海绵圆筒径向受压后, 其吸收的能量为

$$E[r(R)] = \int_{R_1}^{R_0} 2\pi RLW(R, r, r')dR \quad (4)$$

上式是一个关于 $r = r(R)$ 函数的泛函, 满足固定边界条件

$$r(R_1) = r_1, \quad r(R_0) = r_0 \quad (5)$$

的极值曲线 $r = r(R)$ 应满足欧拉 - 拉格朗日方程

$$F_r - F_{Rr'} - F_{r'r'} - F_{r'r''} = 0 \quad (6)$$

其中, r' 为变形后坐标 r 对初始坐标 R 的偏导数; r'' 为 r 对 R 的二阶偏导数, 其他情况类似, 本文中若没有做特别说明, 都是对初始坐标 R 求偏导.

考虑式 (1) 和式 (2), 式 (6) 进一步可改写为

$$R \frac{\partial^2 W(\lambda_r, \lambda_\theta)}{\partial \lambda_r^2} - \left(\frac{\partial^2 W(\lambda_r, \lambda_\theta)}{\partial \lambda_r \partial \lambda_\theta} (\lambda_r - \lambda_\theta) + \frac{\partial W(\lambda_r, \lambda_\theta)}{\partial \lambda_r} - \frac{\partial W(\lambda_r, \lambda_\theta)}{\partial \lambda_\theta} \right) = 0 \quad (7)$$

将 Blatz-Ko 应变能函数式 (3) 和式 (2) 带入微分方程 (7), 可得

$$3R\lambda_r' + (\lambda_r^4/\lambda_\theta^3 - \lambda_r) = 0 \quad (8)$$

式 (8) 是一个非线性微分方程, 有一个平凡解为 $\lambda_r = \text{Con} \cdot \lambda_\theta$, Con 为常数.

3 微分方程求解

3.1 微分方程的参数化解

令 $s = \lambda_r/\lambda_\theta = Rr'/r$, 对其求导可得

$$R\lambda_r' = \lambda_\theta R s' - \lambda_r + \lambda_r^2/\lambda_\theta \quad (9)$$

将中间变量 s 的表达式和式 (9) 代入微分方程 (8), 可以得到如下两个常微分方程

$$\left. \begin{aligned} dR/R &= -3ds/[s(s^3 + 3s - 4)] \\ dr/r &= -3ds/(s^3 + 3s - 4) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其相应的解为

$$\left. \begin{aligned} R^8 &= C_0 s^6 h(s)/[(1-s)^4(s^2 + s + 4)] \\ r^4 &= D_0 (s^2 + s + 4)h(s)/(1-s)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中 C_0 和 D_0 为积分常数, 与已知边界条件有关; $h(s) = \exp\left[\frac{6}{\sqrt{15}}\text{tg}^{-1}\left(\frac{(2s+1)}{\sqrt{15}}\right)\right]$. R 和 r 是以 s 为参数的关系式, 并且 $0 < s_A \leq s \leq s_B < 1$.

3 个方向的 Cauchy 应力分别为^[3,11]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \mu[1 - 1/(\lambda_r^3 \lambda_\theta)] \\ \sigma_\theta &= \mu[1 - 1/(\lambda_\theta^3 \lambda_r)] \\ \sigma_z &= \mu[1 - 1/(\lambda_r \lambda_\theta)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

为了研究方便, 引入无量纲符号 $\eta = R/R_0$ 表示变形前的无量纲半径, $\xi = r/R_0$ 表示变形后的无量纲半径, $\zeta_i = \sigma_i/\mu$ 表示无量纲应力, 式 (11) 和式 (12) 改写为

$$\left. \begin{aligned} \eta^8 &= C s^6 h(s)/[(1-s)^4(s^2 + s + 4)] \\ \xi^4 &= D (s^2 + s + 4)h(s)/(1-s)^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_r &= 1 - 1/(\lambda_r^3 \lambda_\theta) \\ \zeta_\theta &= 1 - 1/(\lambda_\theta^3 \lambda_r) \\ \zeta_z &= 1 - 1/(\lambda_r \lambda_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3.2 给定位移边界条件解方程

橡胶海绵圆筒受压, 已知其变形后的内外半径, 即 $\eta = \eta_0 = 1$ 时 $\xi = \xi_0$ 和 $\eta = \eta_1$ 时 $\xi = \xi_1$. 将边界条件带入式 (11), 可得含有边界未知参数 s_0, s_1, C, D 的方程组

$$F(X) = \begin{cases} C s_0^6 h(s_0) - (1-s_0)^4 (s_0^2 + s_0 + 4) \\ C s_1^6 h(s_1) - \eta_1^8 (1-s_1)^4 (s_1^2 + s_1 + 4) \\ D (s_0^2 + s_0 + 4)h(s_0) - \xi_0^4 (1-s_0)^2 \\ D (s_1^2 + s_1 + 4)h(s_1) - \xi_1^4 (1-s_1)^2 \end{cases} = 0 \quad (15)$$

其中, $X = \{s_0 \ s_1 \ C \ D\}^T$. 方程组 (15) 是一个非线性方程, 可以采用 Newton-Raphson 迭代法、拟 Newton 法、最速下降法等算法求解方程组. 在初值选择合理的情况下, Newton-Raphson 迭代法收敛速

度最快, 因此本文采用 Newton-Raphson 方法求解. 计算求得 s_O, s_I, C, D , 根据式 (11) 可以计算对应于任意 R 处的变形后半径 r , 根据式 (12) 可以计算相应位置点的应力.

3.3 给定应力边界条件解方程

如果橡胶海绵圆筒所受到的内外压力为已知, 即 $\eta_O = 1$ 时, $\zeta_r = \zeta_{rO}$ 和 $\eta_I = 1$ 时 $\zeta_r = \zeta_{rI}$ 作为已知条件, 把 $\lambda_{rO}, \lambda_{rI}, s_O, s_I, C, D$ 作为未知量进行求解, 相应地变形后半径和切向伸长比可以改写为 $\xi = \lambda_r \eta / s, \lambda_\theta = \lambda_r / s$, 考虑边界条件并带入式 (13) 和式 (14) 中, 可以列出如下方程组

$$G(X) = \begin{cases} \lambda_{rO}^4(1 - \zeta_{rO}) - s_O \\ \lambda_{rI}^4(1 - \zeta_{rI}) - s_I \\ Cs_O^6 h(s_O) - (1 - s_O)^4(s_O^2 + s_O + 4) \\ Cs_I^6 h(s_I) - \eta_I^8(1 - s_I)^4(s_I^2 + s_I + 4) \\ Ds_O^4(s_O^2 + s_O + 4)h(s_O) - \lambda_{rO}^4(1 - s_O)^2 \\ Ds_I^4(s_I^2 + s_I + 4)h(s_I) - \lambda_{rI}^4\eta_I^4(1 - s_I)^2 \end{cases} = 0 \quad (16)$$

其中 $Y = \{\lambda_{rO} \ \lambda_{rI} \ s_O \ s_I \ C \ D\}^T$, 求解方法同 3.2 节.

4 数值算例

算例 1 已知某型号导弹适配器未安装前的尺寸为 $R_I/R_O = 0.9091$ (以下算例相同), 装入发射筒后的尺寸为 $r_O/R_O = 0.974, r_I/R_O = 0.9091$. 用 Newton-Raphson 迭代法求解方程组 (15), 可以得到 $C = 0.060368, D = 0.001747, s_O = 0.740367, s_I = 0.7070598$. 进一步可以计算相应的切向应力和径向应力, 如图 1 所示.

算例 2 若已知橡胶海绵适配器受到内外压力为 $\zeta_{rI} = -4.574$ 和 $\zeta_{rO} = -4.373$ 作用, 根据方程 (16) 计算求解得到 $\lambda_{rO} = 0.579, \lambda_{rI} = 0.564, s_O = 0.602, s_I = 0.564, C = 1.1738, D = 0.0122$. 相应的切向应力和径向应力如图 2 所示.

算例 3 若令 $\delta = \eta_O - \xi_O$ 表示无量纲的过盈量, 带入方程 (15), 可以得到橡胶海绵圆筒内、外表面的径向应力和切向应力与过盈量的关系, 如图 3 所示.

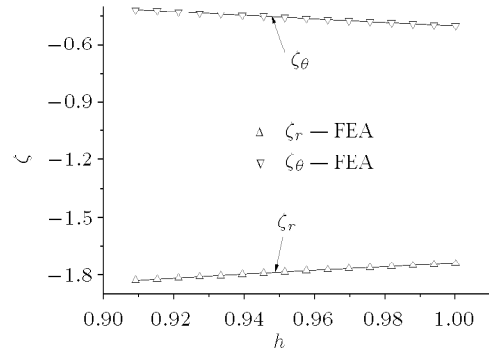


图 1 给定位移边界计算得到的应力变化

Fig.1 Stress variation rules with displacement boundary condition

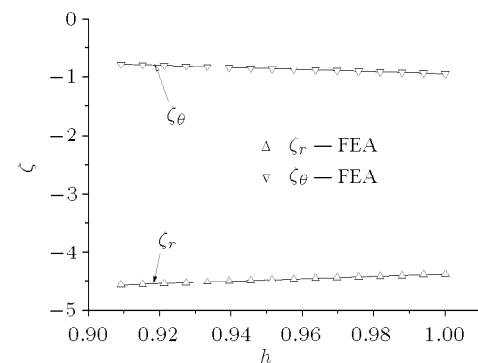


图 2 给定内外压力计算得到的应力变化

Fig.2 Stress variation rules with internal and external pressure boundary condition

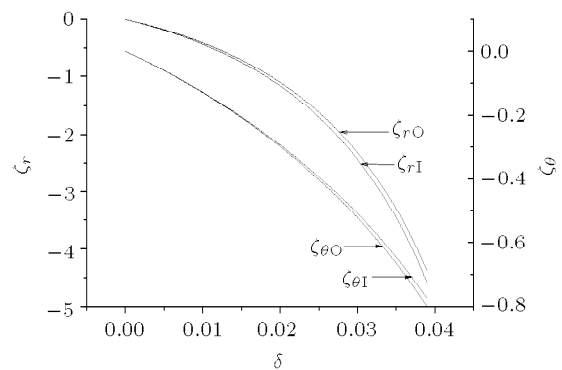


图 3 筒内外表面应力与过盈量的变化关系

Fig.3 Stress variation of internal and external surface via δ

本文采用了 ANSYS 有限元软件对相同参数模型进行了计算, 选用 8 节点的 PLANE183 平面应变单元, 单元数量为 4500 个, 计算结果如图 1 和图 2 所示, 可以看出两种方法得到的结果一致. 橡胶海绵材料圆筒受压时, 其径向应力远大于切向应力; 径向应力沿着橡胶海绵圆筒的厚度由内向外变小, 切向应力由内向外变大.

由图 3 可知, 过盈量对径向应力和切向应力影响非常大, 两个方向的应力都随着过盈量的增加而变大; 当过盈量 $\delta \leq 0.025$ 时, 圆筒内外面上的切向应力相差不大, 可以近似认为相等, $\delta > 0.025$ 时, 两者之差随着过盈量的增大而增大; 当过盈量 $\delta \leq 0.01$ 时, 圆筒内外面上的径向应力可以认为相同, $\delta > 0.01$ 时两者之差也是随着过盈量的增大而变大.

5 结束语

本文基于 Blatz-Ko 应变能函数, 研究了各向同性橡胶海绵材料组成的圆筒结构受压问题, 求得了问题的参数型解析解, 并给出了数值算例, 从而描述了此类材料组成的圆筒结构受压变形的静态机理, 对于导弹适配器的结构设计和发射过程中摩擦力的估算有一定的指导意义.

参 考 文 献

- 1 黄永湘. 海绵密封条大生产新工艺. 特种橡胶制品, 1995, 16(5): 42-45 (Huang Yongxiang. New production technology of sponge sealing strips. *Special Purpose Rubber Products*, 1995, 16(5): 42-45 (in Chinese))
- 2 袁学刚. 具有缺陷的超弹性材料球体中的空穴分叉. [博士论文]. 上海: 上海大学, 2003. 2-23 (Yuan Xuegang. Cavitated bifurcation for spheres composed of imperfect hyper-elastic materials. [PhD Thesis]. Shanghai: Shanghai University, 2003. 2-23 (in Chinese))
- 3 尚新春, 程昌钧. 超弹性材料中的球形空穴分叉. 力学学报, 1996, 28(6): 751-755 (Shang Xinchun, Cheng Changjun. The spherical cavitation bifurcation in superelastic materials. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(6): 751-755 (in Chinese))
- 4 Dienes JK, Solem JC, Alamos Los, et al. Nonlinear behavior of some hydrostatically stressed isotropic elastomeric foams. *Acta Mechanica*, 1999, 138: 155-162
- 5 Kirkinis E, Ogden RW, Haughton DM. Some solutions for a compressible isotropic elastic material. *Z Angew Math Phys*, 2004, 55: 136-158
- 6 廖毕丰, 刘鹏, 袁学刚. 一类可压缩的超弹性球壳的径向对称变形. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2003, 4: 7-9 (Liao Bifeng, Liu Peng, Yuan Xuegang. Radially symmetric deformation of a class of compressible hyper-elastic spherical shells. *Jilin Normal University Journal (Natural Science Edition)*, 2003, 4: 7-9 (in Chinese))
- 7 Yang LM, Shim VPW. A visco-hyperelastic constitutive description of elastomeric foam. *International Journal of Impact Engineering*, 2004, 30: 1099-1110
- 8 史守霞, 杨嘉陵. 平面应变不可压缩橡胶圆柱的大变形. 固体力学学报, 1999, 20(4): 290-296 (Shi Shouxia, Yang Jialing. Large deformation for plane strain incompressible rubber cylinder. *Acta Solid Mechanica Sinica*, 1999, 20(4): 290-296 (in Chinese))
- 9 范成业, 庄茁, 黄克智. 超弹性材料过盈配合的解析解和数值解. 工程力学, 2003, 20(4): 15-18 (Fan Chengye, Zhuang Zhuo, Hwang Kehchih. The theoretical and finite element solutions of an interference problem of hyperelastic materials. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(4): 15-18 (in Chinese))
- 10 邹雨, 庄茁, 黄克智. 超弹性材料过盈配合的轴对称平面应力解答. 工程力学, 2004, 21(6): 72-75 (Zou Yu, Zhuang Zhuo, Hwang Kehchih. The solutions of axisymmetric plane stress for a hyperelastic material interference problem. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(6): 72-75 (in Chinese))
- 11 任九生, 程昌钧. 热超弹性圆筒的不稳定性. 力学学报, 2007, 39(2): 283-288 (Ren Jiusheng, Cheng Changjun. Instability of incompressible thermo-hyperelastic tubes. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(2): 283-288 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

THE RESEARCH ON THE AXISYMMETRIC PLANE STRAIN PROBLEM OF COMPRESSED HOLLOW CYLINDER COMPOSED OF ELASTOMERIC FOAM

Li Shijun¹⁾ Lin Guowen Ma Dawei

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract This paper adopts Euler-Lagrange variational principle to research the compression behavior of hollow cylinder composed of elastomeric foam, and establishes nonlinear differential equations about its axisymmetric plane strain problem based on Blatz-Ko material model. A parametric analytical solution is obtained through the parameter transformation. Finally by utilizing the corresponding numerical case, the variation rules of radial stress and tangential stress along the radial of cylinder, and the influences of magnitude of interference are summarized.

Key words elastomeric foam, axisymmetric plane strain, finite deformation, Blatz-Ko material model

Received 18 August 2009, revised 24 December 2009.

1) E-mail: kinzyking@126.com