

长方腔自然对流第一次分岔突变现象的数值分析¹⁾

王小华^{*,2)} 朱文芳[†]

^{*}(浙江大学航空航天学院流体工程研究所, 杭州 310027)

[†](浙江科技学院建工学院, 杭州 310012)

摘要 在对网格密度作用进行详细分析的基础上, 采用二阶全展开 Euler-Taylor-Galerkin 分裂步有限元方法, 对封闭水平矩形腔体内流体 ($Pr = 0.71$) 自然对流的第一次分岔过程进行了数值预报. 计算结果表明, 第一次分岔相应的流动拓扑及临界 Rayleigh (Ra) 数随矩形腔体长宽比 (W/B) 取值的不同时会发生较大变化. 在所计算的长宽比取值范围内, 封闭矩形腔内, 流体自然对流第一次分岔拓扑的变化对应两种大的类型: 在较小的长宽比取值范围内 ($W/B \leq 2.5$), 临界 Ra 数两侧, 流动从单一涡核的定常流动突变成为具有不对称结构的定常双涡核运动, 在此范围内临界 Ra 数的取值随 W/B 取值的增加而减小; 当对应长宽比取值 $2.6 \leq W/B \leq 4.0$ 时, 第一次分岔拓扑结构的变化呈现出更加复杂的特性, 临界 Ra 数两侧流动从定常双涡核突变为定常非对称的三涡核流动, 相应的临界 Ra 数也随 W/B 的增加而减少. 而在区间 $[2.5, 2.6]$ 两端, 临界 Ra 数的取值发生一次阶跃式突增, 将该长宽比取值的区间定义为长方腔内该流体第一次分岔的突变区间.

关键词 长方腔, 第一次分岔, 二阶全展开 ETG 分裂步有限元方法, 长宽比, 涡核, 突变

中图分类号: O357 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)03-0389-11

引 言

大量的研究表明, 非线性动力系统会随着相应控制参数的变化, 经历从非对称性局部失稳、周期性、拟周期、多解共存、跳跃、瞬态混沌等复杂的非线性状态, 在流体流动过程中则体现为叉形分岔、Hopf 分岔、过渡和转捩等复杂的现象和过程. 流动经历了从简单层流流动、复杂层流流动 (包括周期性层流)、过渡流动和湍流流动的复杂变化. 封闭方腔中流体的自然对流现象是典型的非线性流动过程, 由于其简单的几何形状以及复杂的流动过程, 常被用作自然对流机理研究的典型实例. 同时, 方腔自然对流具有非常广泛的应用背景, 涉及如化工过程控制等诸多领域. 其流动过程和现象的预报及分析的开展具有重要的意义. 近年来, 国内外关于封闭腔体内自然对流的研究, 可查阅的文献有数百篇之多, 特别是封闭二维方腔内关于空气自然对流的研究, 涉及到从机理研究到应用研究的各个方面^[1-10,12]. 其中在分岔和转捩方面所得到的普适性结论是, 当 Rayleigh(Ra) 数低于 1000 时, 在封闭边界层的内部只存在一个涡核, 热交换以热传导形式

为主; 随着 Ra 数的增加 ($10^4 \sim 10^5$), 在某个 Ra 数值两侧, 流动拓扑经历从单一涡核简单层流象复杂一些的双涡核层流的突变, 即第一次分岔, 文献 [12] 对这一复杂的过程进行了详细的计算分析; 其后, 流动将在 $Ra = 10^5 \sim 10^6$ 经历第二次分岔, 涡核从 2 个突增为 3 个, 这两次分岔都是流动在不同定常层流状态之间变化, 是叉形分岔的表现; 随着 Ra 的进一步提高, 流动将经历 Hopf 分岔, 从定常层流变化为周期性层流, 失稳逐渐从局部向全局扩展; 在 $Ra = 10^6 \sim 10^8$, 彻底转捩成为复杂的湍流流动. 由于该非线性系统的复杂特性, 各级分岔和转捩的研究, 所给出的临界 Ra 数均是在较宽的范围内变化. 这从另外的角度证明, 对于封闭腔体内自然对流, 即使是在层流状态下也还需要进行大量深入的研究.

本文应用二阶全展开 Euler-Taylor-Galerkin (ETG) 分裂步有限元方法, 在分析了网格尺度影响的基础上, 结合分半技术, 对水平温度梯度作用下封闭二维矩形腔内, 空气自然对流发生第一次分岔对应的临界 Ra 进行了数值预报, 并分析了不同长宽比 (L/B , 如图 1 所示, L 和 B 分别为矩形腔

2009-07-27 收到第 1 稿, 2009-12-31 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50708030).

2) E-mail: tommewang@yahoo.com.cn

的长和宽)对分岔过程的影响. 结果表明, 矩形腔内流动拓扑的变化取决于两个因素: Ra 数和 L/B 的取值. 当 L/B 在 (2.5, 2.6) 区间范围内变化时, 对应第一次分岔, 封闭水平长方腔内的涡核, 会由 1 个增加为 2 个的分岔形式突变为从 2 个增加为 3 个的复杂形式, 进而可推断在更高的长宽比条件下, 第一次分岔所对应的流动拓扑的变化将更为复杂. 在此突变区间两侧的长宽比取值范围内, 第一次分岔所表现出来的趋势随 L/B 的增大, 对应的 Ra_{cr} 将减小, 相应的流动更容易分岔 (局部失稳). 由于第一次分岔结构本身的突变特性, 相应 Ra_{cr} 的取值也会发生突变 (表现为某长宽比取值区间两端临界 Ra 数的阶跃式突增). 本文后续的研究还将包括封闭腔体内不同流体第一次分岔的预报和 Prandtl(Pr) 影响规律性研究, 以及第二次分岔、Hopf 分岔和转捩的数值预报等, 可以预见的是由于时间以及空间尺度变化的复杂性, 随着流动从定常流动向周期性流动和湍流流动的演变, 单一通过流动拓扑的变化进行分析是不足的, 还必须引进的是如系统瞬态动能时变过程分析、平均 Nusselt 数时变过程分析等技巧以及大涡模拟的技术.

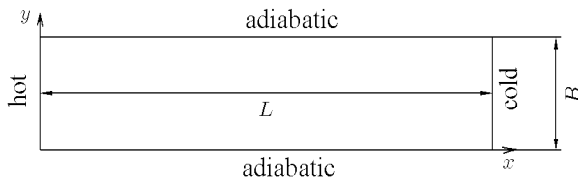


图 1 计算域示意图

Fig.1 Configuration and coordinates

1 计算方法

1.1 控制方程

由于耦合了浮力项的作用, 对应控制方程的数值求解难度有所增加. 对应方程的无量纲化整理如下, 取无因次长度、时间、速度和温度为

$$x_i = \frac{x_i^*}{L}, \quad u_i = \frac{u_i^* L}{\alpha}, \quad p = \frac{p^* L^2}{\rho \alpha^2}$$

$$t = \frac{t^* L^2}{\alpha}, \quad \theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}$$

其中, L 为计算域特征长度, 在本文中取值为方腔的宽度 B ; T_H 和 T_C 分别代表热冷壁面的温度; α 为导热系数; β 为膨胀系数. 自然对流问题对应的基本方程的无量纲形式为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + Pr \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + Ra Pr \theta \cos \phi_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

其中, ϕ_i 为重力加速度 g 与坐标 x_i 之间的夹角, ν 为流体的运动黏度.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g \beta L^3 (T_H - T_C)}{\nu \alpha}$$

1.2 数值方法及边界条件

1.2.1 动量方程的离散

对各非稳态动量方程对应各速度分量做关于时间的二阶 Taylor 展开, 将关于时间的偏导数项用相应的空间偏导数项近似代替, 并将对应的控制方程带入表示各相应项, 然后进行整理并采用标准的 Galerkin 方法, 完成各对应单元的有限元分析, 具体过程可见文献 [11], 得到的单元离散方程形式为

$$A_{IJ} \left(\frac{\partial u_J^n}{\partial t} \right) = B_{IJ} u_J^n + C_{IJ} u_J^n + P_{IJ} + E_I + F_I \quad (4)$$

其中

$$A_{IJ} = \int_{\Omega_e} N_I N_J d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} Pr \Delta t \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} d\Omega$$

$$B_{IJ} = \int_{\Omega_e} \left(-N_I u_j \frac{\partial N_J}{\partial x_j} - Pr \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} \right) d\Omega - \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \Delta t u_j u_j \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega$$

$$C_{IJ} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \Delta t N_I \left[\left(u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - Pr \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} - Ra Pr \theta^n \cos \phi_j \right) \frac{\partial N_J}{\partial x_j} \right] d\Omega$$

$$P_{IJ} = \int_{\Omega_e} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{n-1}}{\partial x_i} \right) \right] N_J d\Omega$$

$$E_I = \int_{\Omega_e} N_I \left[\frac{1}{2} Pr Ra \cos \phi_i (\theta^n - \theta^{n-1}) \right] d\Omega$$

$$F_I = \int_{\Omega_e} \left(N_I + \frac{1}{2} \Delta t u_j^n \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \right) \left(-\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + Pr Ra \theta^n \cos \phi_i \right) d\Omega$$

经过将计算域内所有单元的有限元方程进行叠加, 构成总体的有限元方程如下

$$A u^{n+1} = (B u^n + C u^n + P + E + F) \Delta t + A u^n \quad (5)$$

1.2.2 能量方程的离散

能量方程的离散和有限元分析过程与上述过程类似，所得到的单元离散方程和总体方程形式为

$$R_{IJ}T_J^{n+1} = (S_{IJ} + Q_{IJ})T_J^n \Delta t + R_{IJ}T_J^n \quad (6)$$

其中

$$R_{IJ} = \int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \right) N_J d\Omega$$
$$S_{IJ} = \int_{\Omega_E} N_I \left(1 - \frac{\Delta t}{2} u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \cdot \left(-u_j^n \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \right) N_J d\Omega$$
$$Q_{IJ} = \int_{\Omega_E} -N_I \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) N_J d\Omega$$

叠加后的总体有限元方程如下

$$RT^{n+1} = (S + Q)T^n \Delta t + RT^n \quad (7)$$

1.2.3 边界条件

对应流动所采用的边界条件形式如下

$$u(x, 0) = u(x, H) = u(0, y) = u(W, y) = 0$$
$$v(x, 0) = v(x, H) = v(0, y) = v(W, y) = 0$$
$$\theta(0, y) = 1, \quad \theta(W, y) = 0$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(0, x) = \frac{\partial \theta}{\partial y}(H, x) = 0$$

2 结果与讨论

2.1 算法验证及网格尺度影响分析

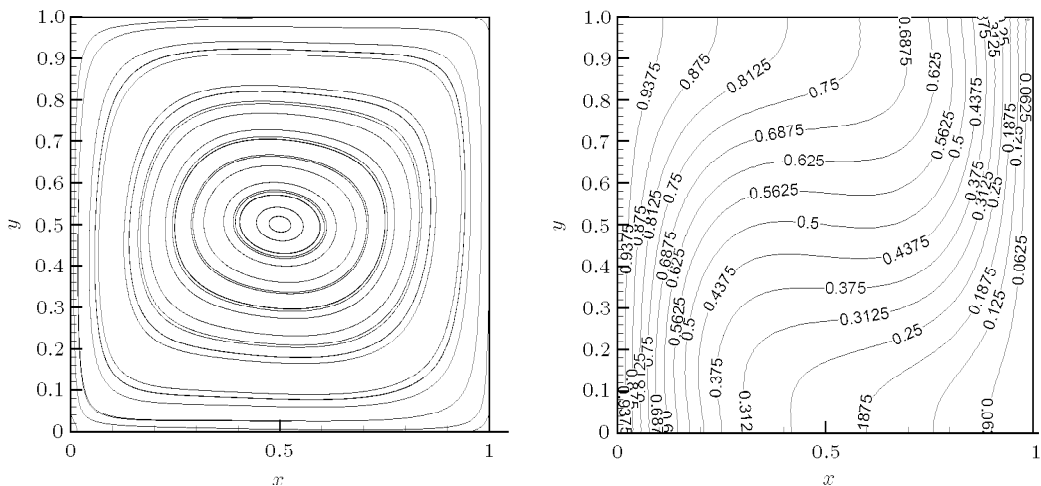
对于封闭方腔内自然对流的数值分析而言，影

响其精度的主要因素有：（1）数值方法本身的精度；（2）所采用的网格形式及密度；（3）时间步长的选择；（4）引入迭代方法时所选择的迭代精度。本文所选用的计算方法是所在课题组发展的二阶全展开 ETG 分裂步有限元方法，网格采用均匀正方形网格，为了验证网格精度对计算结果的影响以及所选用算法在处理这一类型问题中的精度和稳定性，在时间步长取为 2×10^{-4} 和收敛精度为 2×10^{-5} 的条件下，构建了 10 套具有不同单元密度的网格系统，对 $Ra = 10^4$ 和 $Ra = 10^5$ 的典型算例进行了计算和分析，所得结果如图 2 和表 1 所示。

表 1 不同网格密度条件下本文计算结果与经典结果比较

Table 1 Comparison of the presented results with classic results

网格密度	$Ra = 10^4$		$Ra = 10^5$	
	$\overline{Nu}$	E_{re}	$\overline{Nu}$	E_{re}
31 × 31	2.221 401	0.962 95	4.364 006	3.429 83
41 × 41	2.231 353	0.519 26	4.435 599	1.845 56
51 × 51	2.235 542	0.332 5	4.465 842	1.176 32
61 × 61	2.237 690	0.236 74	4.480 849	0.844 24
71 × 71	2.238 965	0.179 89	4.489 221	0.658 97
81 × 81	2.239 682	0.147 93	4.496 830	0.490 6
101 × 101	2.240 534	0.109 94	4.506 029	0.287 03
111 × 111	2.240 759	0.099 91	4.507 567	0.253
131 × 131	2.241 050	0.086 94	4.510 8	0.181 46
151 × 151	2.241 215	0.079 58	4.511 896	0.157 2
Ref.[1]	2.243	—	4.519	—



(a) $Ra = 10^4$ 条件下的流线和等温线
(a) Streamlines and isothermals at $Ra = 10^4$

图 2 典型算例计算结果

Fig.2 Streamlines and isothermal contours at $Ra = 10^4$ and $Ra = 10^5$

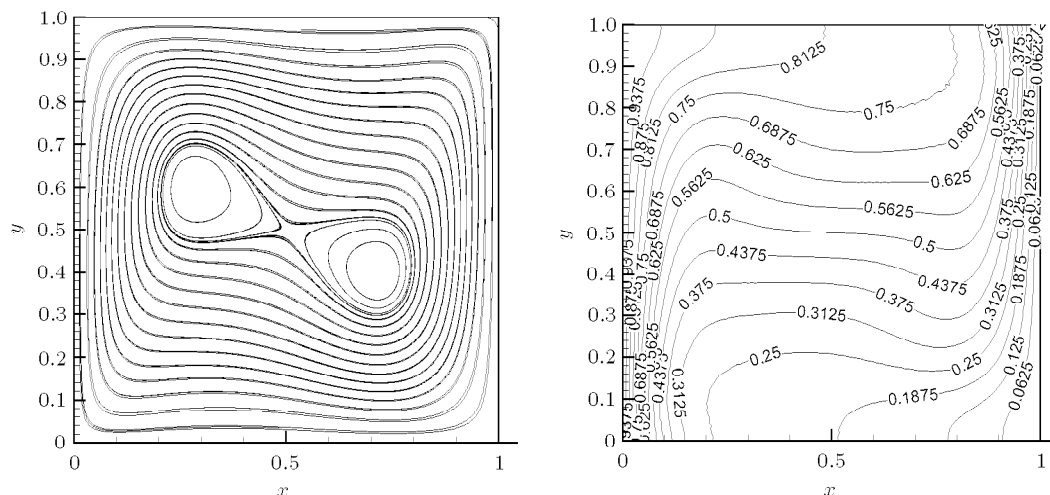
(b) $Ra = 10^5$ 条件下的流线和等温线(b) Streamlines and isothermals at $Ra = 10^5$

图 2 典型算例计算结果 (续)

Fig.2 Streamlines and isothermal contours at $Ra = 10^4$ and $Ra = 10^5$ (continued)

表 1 中 E_{re} 代表本文计算结果相对于 Davis 数值解的相对误差 $E_{re} = \frac{Nu_{平均本文} - Nu_{平均文献}}{Nu_{平均文献}} \times 100\%$, 计算结果表明, 所采用的算法在给定的时间步长条件下, 不同的网格密度对应的计算结果相对误差都低于 4%, 也就是说该方法对于封闭方腔内自然对流的模拟具有较高的精度. 但为了减少数值因素对分析过程的影响, 必须分析网格密度对计算的作用, 来选择有限计算资源条件下的合理网格密度. 从图 3 中可以看出, 计算的相对误差开始随着网格密度的增加而下降, 在网格尺度达到 80×80 以上时, 相对误差的变化将独立于网格密度的取值而趋于常值, 有鉴于此和计算资源的限制, 本文在计算长方形方腔内空气自然对流问题时所选的网格密度以此为准.

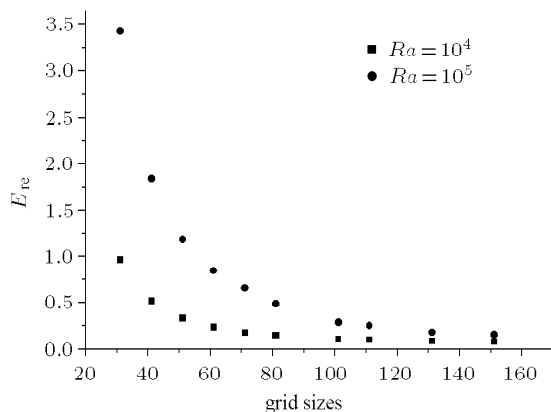


图 3 相对误差与单向网格数间的关系

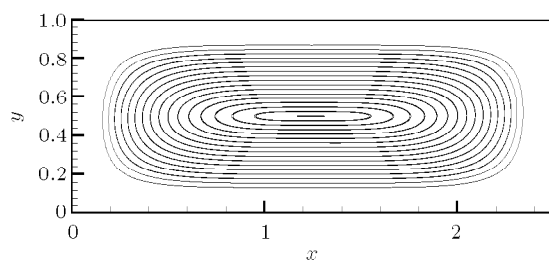
Fig.3 Variation of the relative error with the mesh resolution

2.2 二维封闭长方腔内空气自然对流第一次分岔的数值分析

如前所述, 在第一次分叉点两侧, 流动内部涡核的数目将发生突然的变化, 而这一变化本身所代表的仅是一次局部的流动失稳过程, 对于分叉点两侧温度场的影响几乎可以忽略, 或者说对这一定常层流范围内所发生的复杂现象, 温度场并不敏感, 或者说从温度场的变化难以识别长方腔内第一次的分岔. 有鉴于此, 本文对于临界 Ra 数的判定是依据流线在局部的突然改变, 为了尽量排除数值过程的扰动, 本文所采用的是与方腔内 80×80 单元相当密度的有限元网格, 为了较为精确地估量对应长宽比条件下 Ra_{cr} 的取值, 本文对一系列 Ra 数条件下长方腔内的自然对流进行了详尽的计算, 并采用区间分半的方法来估计指定长方腔内的 Ra_{cr} .

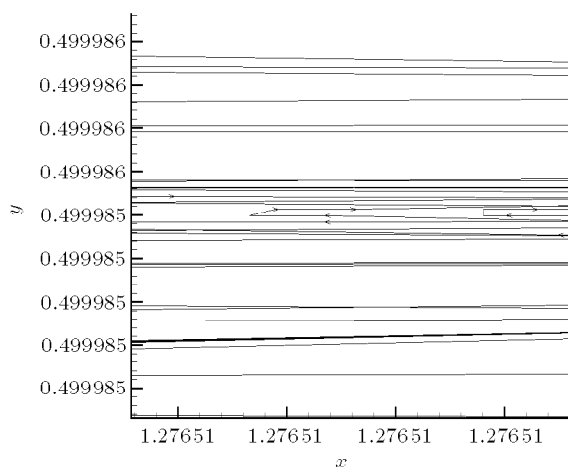
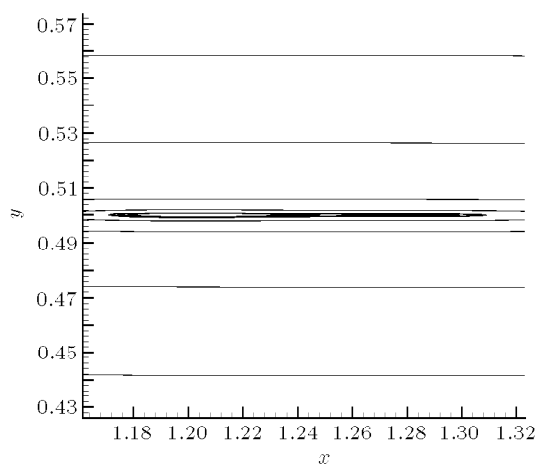
2.2.1 $L/B = 2.5$ 长方腔内自然对流第一次分岔的数值预报

以本研究所发现的长方腔自然对流第一次分岔突变区间的两个端点处对应长方腔内自然对流第一次分岔的数值预报为例, 对整个问题进行分析. 计算结果表明, 在长宽比取值达到 2.5 时, 第一次分岔所对应的临界 Ra 数的取值已经低于 1000, 进入到热传导占主导地位区间, 故以此为突变区间的下分界点, 估算过程如图 4 和图 5 所示.



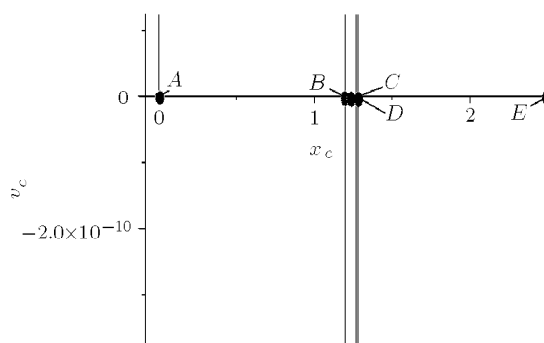
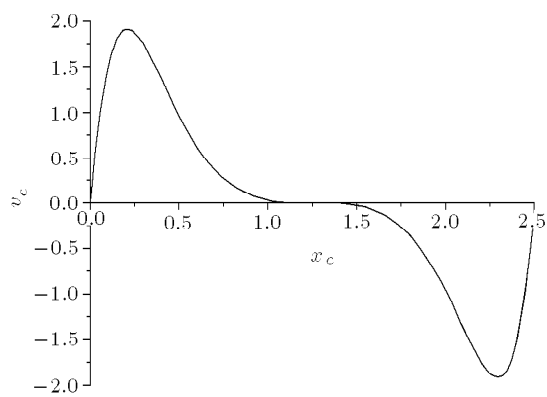
(a) 流线图

(a) Streamlines



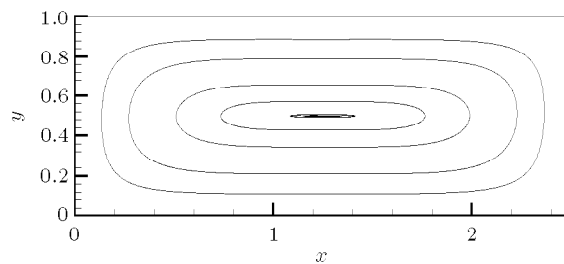
(b) 流线图局部放大

(b) Local expansion of streamlines

(c) 中心线 $y = 0.5$ 处速度廓线及其局部放大(c) Velocity profiles at $y = 0.5$ and its local expansion图 4 $L/B = 2.5$ 的长方腔在 $Ra = 957$ 时的流线图及 $y = 0.5$ 处速度廓线图Fig.4 Streamlines and velocity profiles at $y = 0.5$ for $Ra = 957$ with $L/B = 2.5$

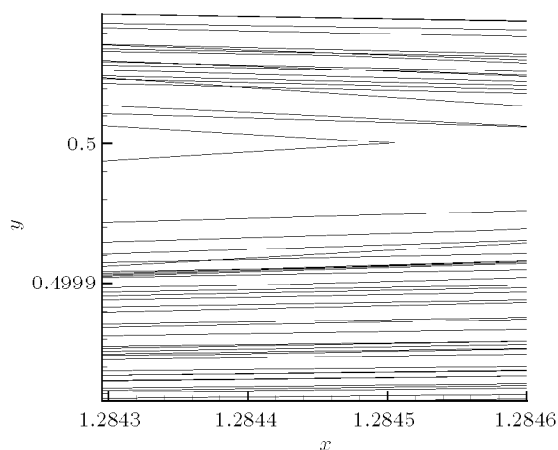
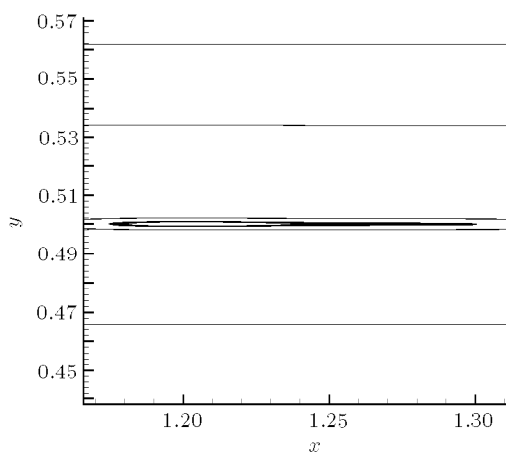
从图中可以看出, 流动拓扑结构上, 涡核的数目在其间经历了从 1 个到 2 个的突变. 为了更清晰地表达这一现象的发生, 分别给出对应 Ra 数条件

下, 矩形腔 $y = 0.5$ 截面处 y 方向速度分量随 x 坐标取值变化的速度廓线图 (图 4(c) 和图 5(c)), 从图中可以看出, 对应速度廓线图, 在 $Ra = 957$ 时共有



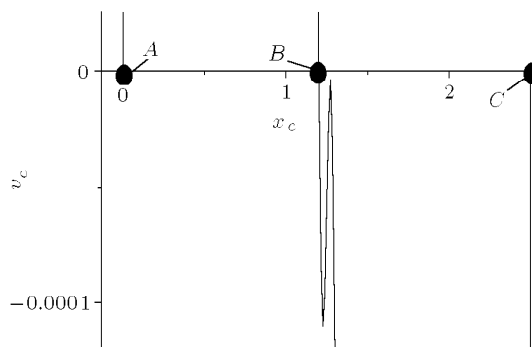
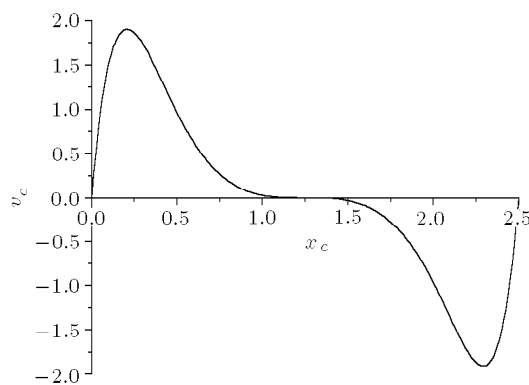
(a) 流线图

(a) Streamlines



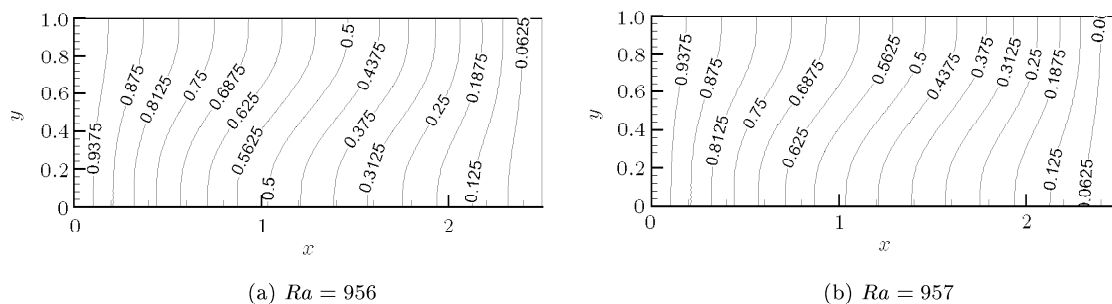
(b) 流线图两次局部放大

(b) Two stages local expansion of streamlines

(c) 中心线 $y = 0.5$ 处速度廓线及其局部放大(c) Velocity profiles at $y = 0.5$ and its local expansion图 5 $L/B = 2.5$ 的长方腔在 $Ra = 956$ 时的流线图及 $y = 0.5$ 处速度廓线图Fig.5 Streamlines and velocity profiles at $y = 0.5$ for $Ra = 956$ with $L/B = 2.5$

5 个零值点, 其中两个与边界无滑移条件相对应 (零点 A, E), 最中间的一个 (零点 C) 是由于两侧旋涡反向旋转的结果, 另外两个 (零点 B, D) 代表涡核的数目和空间分布. 从对应零点取值的分布来看, 该 Ra 数取

值条件下, 拓扑结构已变化为双核不对称稳定结构. 而在 $Ra = 956$ 时, 对应速度廓线只有 3 个零值点 (零点 1, 3 对应无滑移条件, 零点 2 代表涡核), 代表此时流动拓扑仍为只具有单一涡核的定常层流.

图 6 $L/B = 2.5$ 临界 Ra 数两侧温度等值线图Fig.6 Temperature contours at $Ra = 956$ and 957 with $L/B = 2.5$

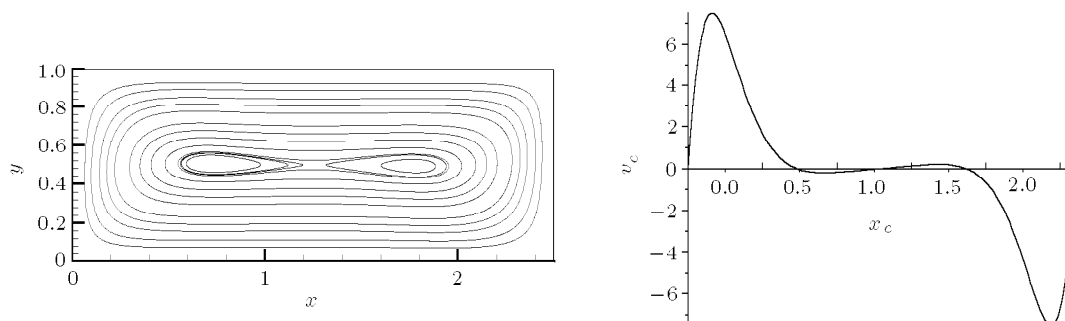
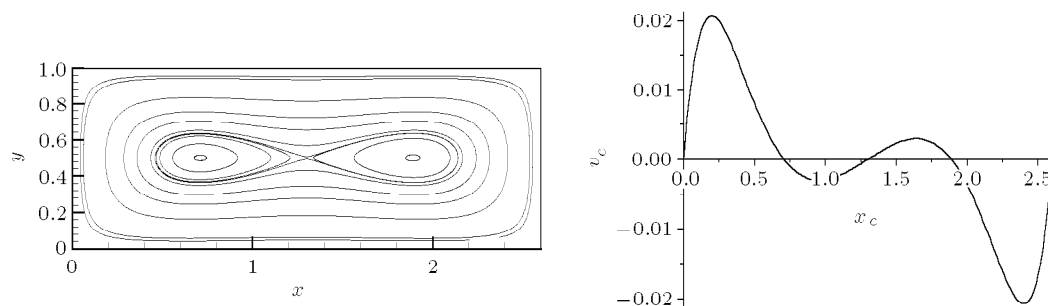
经过第一次分岔后, 在一定的 Ra 数范围内, 流动的拓扑将保持具有两个涡核的特征, 不同之处在于随着 Ra 数的增加, 涡核将从不对称形状向对称的双涡核结构发展. 图 7 给出了 $L/B = 2.5$, $Ra = 4000$ 时的流线图来表明这一点.

2.2.2 $L/B = 2.6$ 长方腔内自然对流第一次分岔的数值预报

对于 $L/B = 2.6$ 的长方腔而言, 其内空气自然对流第一次分岔的数值预报采用与上述过程完全相同的方法来进行, 结果如图 8~ 图 12 所示. 不同之处在于在此条件下, 流动拓扑及分岔结构都发生了

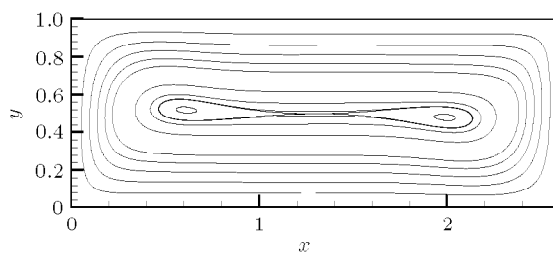
突变. 从图 8 可以看出, $L/B = 2.6$ 条件下 $Ra = 10$ 时, 流动拓扑已具有双核.

对于图 8 所示长方腔而言, 定常流动的拓扑发生了突变, 在 $L/B = 2.5$ 及其之前的范围内, 计算表明, 在 Ra 数高于 1000 的流动中, 定常流动随 Ra 数变化的情况将都从一个涡核开始, 逐步被拉长、失去对称性, 然后再形成第 2 个涡核. 但对于 $L/B = 2.6$ 及其之后的长方腔, 基本的定常层流就具有两个 (有可能是两个以上) 涡核, 其内对应的第一次分岔的拓扑结构也将因此由 2 个突变为 3 个, 这无疑增加了该非线性动力系统的复杂性.

图 7 $L/B = 2.5$, $Ra = 4000$ 时的流线图及 $y = 0.5$ 处速度廓线图Fig.7 Streamlines and velocity profiles at $y = 0.5$ for $Ra = 4000$ with $L/B = 2.5$ 图 8 $L/B = 2.6$, $Ra = 10$ 时的流线图及 $y = 0.5$ 处速度廓线图Fig.8 Streamlines and velocity profiles at $y = 0.5$ for $Ra = 10$ with $L/B = 2.6$

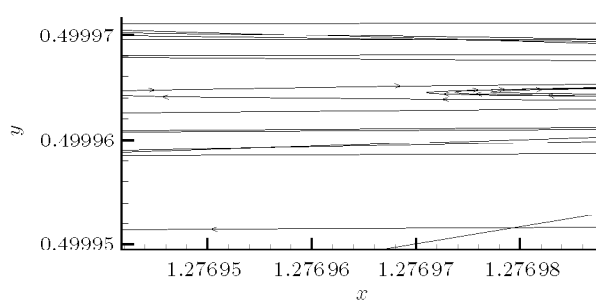
如图 9 所示, 在 $Ra = 10338$ 时, 方腔中心区域已经形成第三涡核, 图 10 给出该流场中 $y = 0.5$ 处中线上 y 方向速度分量的速度廓线图, 速度廓线除去边界处的零值点 (零点 A, G) 外另外存在 5 个零值点, 其中两个 (零点 C, E) 是由于相邻涡对反向旋转的结果, 另外 3 个零值点 (零点 B, D 和 F) 代表流动此时已存在 3 个涡核结构. 由于与此长宽比对应的

矩形腔体内部, 在临界点附近拓扑结构主要体现为局部速度变化, 单纯用拓扑变化的分析较为困难, 为此选用不同 Ra 数条件下, $y = 0.5$ 处速度廓线的零点值的个数的变化来判断对应涡核的数目, 图 11 分别给出 $Ra = 10382 \sim 10384$ 时, 对应 $y = 0.5$ 处速度廓线及相应的局部放大, 从图中可以判定, 长宽比为 2.6 时, 临界 Ra 数的取值确定为 10382.5.



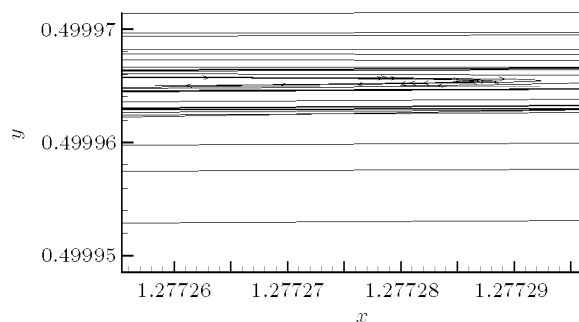
(a) 流线图

(a) Streamlines



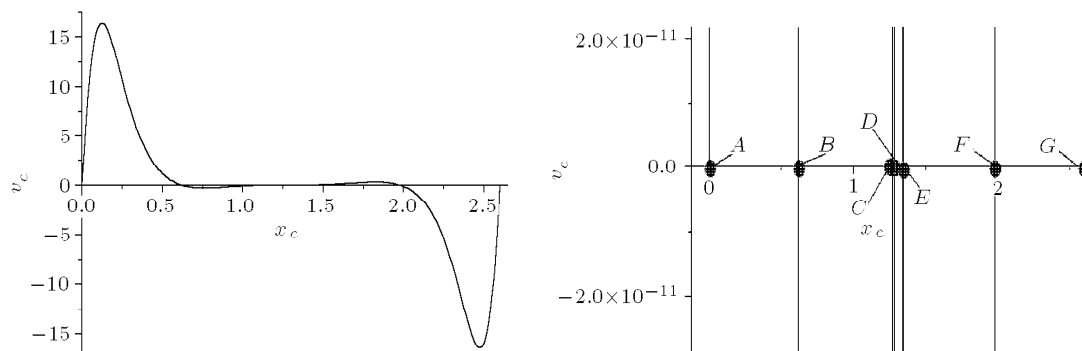
(b) 第三涡核流线的左端局部放大

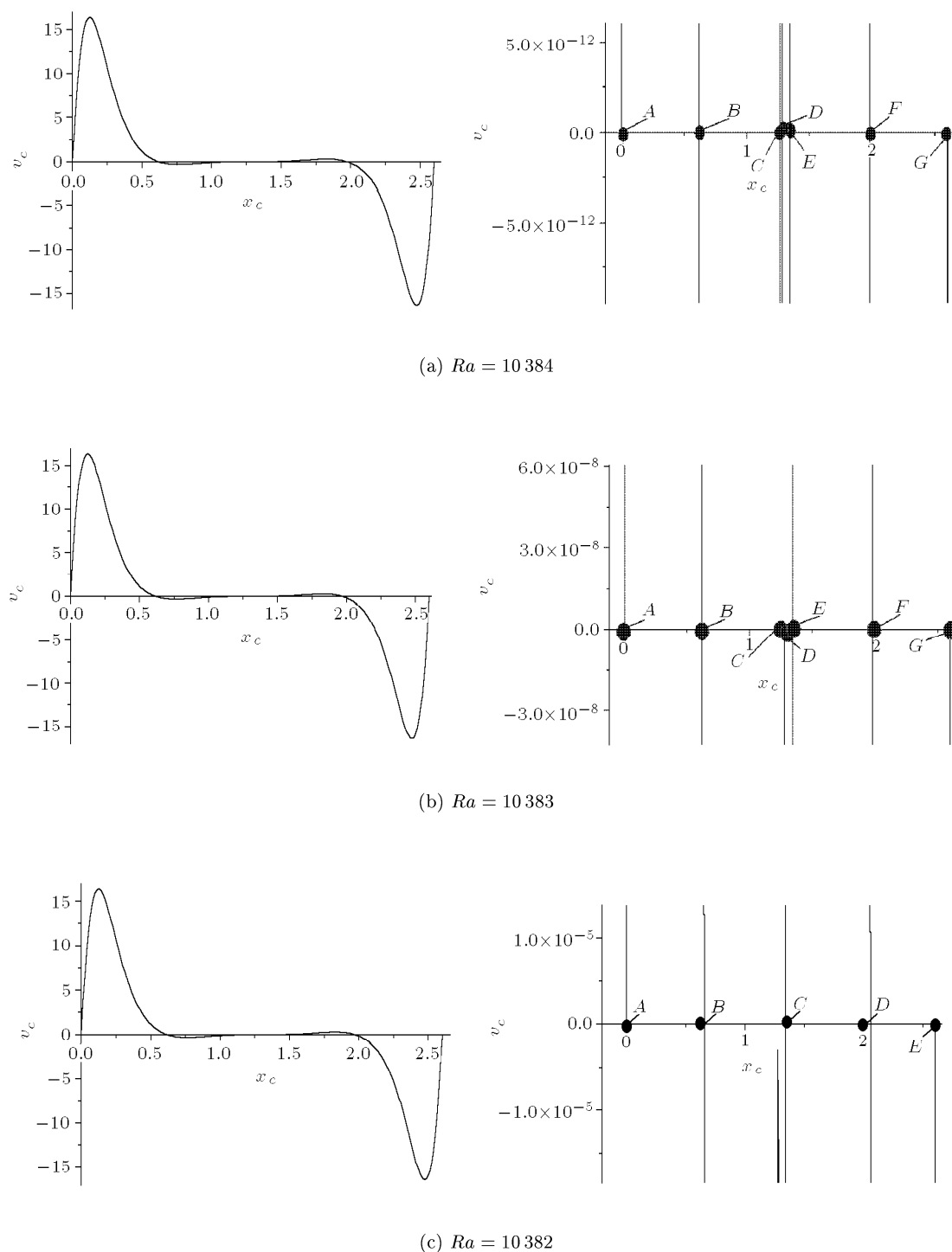
(b) Local expansion of the left side parts of the third vortex



(c) 第三涡核流线的右端局部放大

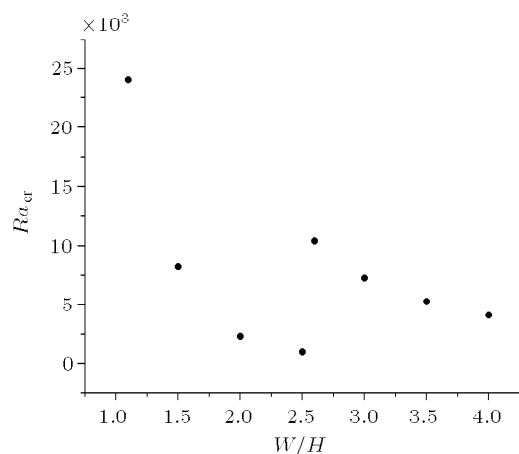
(c) Local expansion of the right side parts of the third vortex

图 9 $L/B = 2.6$ 的长方腔在 $Ra = 10388$ 时的流线图及其局部放大Fig.9 Streamlines and local expansion at $Ra = 10388$ with $L/B = 2.6$ 图 10 $L/B = 2.6$, $Ra = 10388$ 时 $y = 0.5$ 处速度廓线图及局部放大Fig.10 Velocity profiles and local expansion at $Ra = 10388$ with $L/B = 2.6$

图 11 $L/B = 2.6$, 不同 Ra 数条件下 $y = 0.5$ 处速度廓线图及局部放大Fig.11 Velocity profiles and their local expansions for different Ra with $L/B = 2.6$

为了进一步明确长宽比对封闭长方腔内空气自然对流第一次分岔的影响, 采用上述方法分析不同长宽比条件下第一次分岔的变化, 将临界 Ra 数随 L/B 的变化表示在图 12 中. 从图中可以看出, 在对应的长宽比区间上, Ra_{cr} 呈现随 L/B 的增加

而下降的趋势, 对应突变区间的 Ra_{cr} 发生阶跃式突增, 这是封闭长方形腔内空气自然对流拓扑整体突变带来的直接结果. 突变区间之外的趋势表明长宽比较大的长方腔内的空气自然对流更容易局部失稳.

图 12 Ra_{cr} 随 L/B 的变化趋势图Fig.12 Variation of Ra_{cr} with L/B

3 结 论

通过本文的计算和分析,可以初步得到如下的结论:为了排除计算误差对分析的影响,必须选择精度合适的算法和适当的网格密度,并在此条件下进一步展开分析,对于本文而言所选择的算法和网格密度经计算验证是合适的.对于封闭长方腔内的空气自然对流,其拓扑结构的影响因素将主要表现在 Ra 数和长宽比两个方面.本文的计算结果表明作为局部失稳的开始,第一次分岔点两侧流动拓扑结构会发生一次突变,其表现是流动的涡核在基本流动上增加一个,而这一个数的具体变化则直接与长宽比相关,表明了封闭腔体内流动对边界条件的依赖性.同时,计算结果表明对应拓扑结构突变的长宽比区间两端对应方腔内自然对流第一次分岔的临界 Ra 数取值会出现一个阶跃式突变,而在此区间之外,随长宽比的增加, Ra_{cr} 将会随长宽比的增加而减小,即 L/B 越大的方腔更容易局部失稳.

参 考 文 献

- 1 Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. *Int J Numer Methods Fluids*, 1983, 3: 249-264
- 2 Ostrach S. Natural convection in enclosures. *J Heat Trans*, 50th Anniversary Issue, 1988, 110: 1175-1189
- 3 Lartigue B, Lorente S, Bourret B. Multicellular natural convection in a high aspect ratio cavity: experimental and numerical results. *Int J Heat Mass Transfer*, 2000, 43: 3157-3170
- 4 Chikhaoui A, Marcillat JF, Sani RL. Successive transition in thermal convection within a vertical enclosure. In: *Natural Convection in Enclosures*. ASME, New York, 1988. 99
- 5 Wright JL, Jin H, Hollands KGT, et al. Flow visualization of natural convection in a tall air-filled vertical cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49: 889-904
- 6 Yooa JS, Hanb SM. Transitions and chaos in natural convection of a fluid with $Pr = 0.1$ in a horizontal annulus. *Fluid Dynamics Research*, 2000, 27: 231-245
- 7 Yang HX, Zhu ZJ. Numerical study of three-dimensional turbulent natural convection in a differentially heated air-filled tall cavity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, 35: 606-612
- 8 Baïri A. Nusselt-Rayleigh correlations for design of industrial elements: experimental and numerical investigation of natural convection in tilted square air filled enclosures. *Energy Conversion and Management*, 2008, 49: 771-782
- 9 代民果, 高智. 同位网格摄动有限体积分式求解浮力驱动方腔流. *力学学报*, 2006, 38(6): 733-740 (Dai Minguo, Gao Zhi. Solving 2-D buoyancy driven cavity flow on collocated meshes by perturbational finite volume scheme. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(6): 733-740 (in Chinese))
- 10 Sheu TWH, Rani HP, Tan TC, et al. Multiple states, topology and bifurcations of natural convection in a cubical cavity. *Computers & Fluids*, 2008, 37: 1011-1028
- 11 王小华, 朱文芳. 方形钝体受限绕流的三维数值模拟. *计算力学学报*, 2008, 25(5): 671-675 (Wang Xiaohua, Zhu Wenfang. Three dimensional large eddy simulation of the flow field and energy loss characterisation of a ribbed duct turbulent flow. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, 25(5): 671-675 (in Chinese))
- 12 Wang Xiaohua, Wei Yingjie, Shen Xinrong. Numerical investigation of the first bifurcation for natural convection of fluids enclosed in a 2D square cavity with Pr lower than 1.0. *Energy Convers Manage*, 2009, 50(10): 2504-2512

(责任编辑: 周冬冬)

NUMERICAL RESEARCH ON THE SUDDEN CHANGE CHARACTERISTIC OF THE FIRST BIFURCATION FOR NATURAL CONVECTION OF AIR ENCLOSED IN 2D RECTANGULAR CAVITY¹⁾

Wang Xiaohua^{*,2)} Zhu Wenfang[†]

^{*}(*Institute of Fluid Engineering, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

[†](*Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China*)

Abstract Based on grid independence analysis, a second order Euler-Taylor-Galerkin finite element method of fractional steps was used to numerically investigate the first bifurcation of natural convection of air enclosed in a 2D rectangular cavity. The characteristics of the first bifurcation of natural convection in 2D cavities were numerically studied with different height-to-width ratios. The corresponding critical Rayleigh number for each case was estimated using the flow topologies varied with Ra and L/B , and the bisection method. It can be concluded that the first bifurcation depends on the values of Ra and L/B . Flow topologies and the first bifurcation experienced a sudden change as L/B varied between 2.5 (from 1 core to 2 cores) and 2.6 (from 2 cores to 3 cores). For each interval of L/B adjacent to the interval of sudden change, the critical Ra decreased with the increase in L/B . Furthermore, there is a step increase for Ra_{Cr} for the sudden change interval. It can then be concluded that natural convection of air enclosed in a rectangular cavity experiences local instability more easily with higher value of L/B . According to the given results, it can also be deduced that the variation of the characteristic of the first bifurcation should be more complex with higher L/B .

Key words rectangular cavity, the first bifurcation, the second order Euler-Taylor-Galerkin finite element method of fractional steps, the height-to-width ratio, the global flow cores, sudden change

Received 27 July 2009, revised 31 December 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50708030).

2) E-mail: tommewang@yahoo.com.cn