

Maxwell 泥床上线性长波衰减的研究

夏乐章¹⁾ 朱克勤

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 用 Maxwell 模型作为非牛顿泥床本构, 建立了一组新的 Boussinesq 型方程组, 以描述波 - 泥相互作用下水波的传播. 基于该方程, 解析给出了一维线性长波衰减率的表达式. 当泥层模型退化到牛顿流体时, 该结果与前人文献的结果一致. 当无量纲松弛时间 λ 较大时, 衰减率随泥深近似地出现周期性的极值现象, 这些极值位置对应泥层中各阶模态的衰减率峰值.

关键词 波泥相互作用, Boussinesq 型方程, Maxwell 模型, 摄动法, 衰减率

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)03-0343-07

引 言

海床与水波的相互作用在近海岸水波的研究中日益受到重视. 一方面, 水波引起的海床运动不但是导致海底管线等沿海区域设施损坏的重要原因, 也是影响海床中营养物或污染物输运从而改变沿海环境的重要因素; 另一方面, 海床能引起水波的反射、折射和散射, 是波浪预测、防波结构设计和波能利用等海洋工程需要考虑的科学问题.

其中较为常见的海床模型大致可分为 3 类: 第 1 类是沙床模型, 主要考虑沙粒引起的水 - 海床界面的表面粗糙度和沙波纹对水波的影响; 波能耗散主要来自水体的黏性耗散, 常采用经验公式来估计海床摩擦阻^[1]. 第 2 类是可渗床模型, 主要考虑海床中的渗流效应对水波的影响^[2-7]. 第 3 类是泥床模型, 海床由黏性很大的物质组成, 能有效地耗散波能; 主要适用于描述由细小颗粒组成的自然沉积物. 由于受不同地理和生态环境的影响, 各地泥床的成分不同, 流变特性各异, 比如类固体的弹性黏土模型^[8-9]; 类流体的牛顿流体模型^[3,10-13], 幂率流体模型^[14]; 兼有流固两种特性的 Bingham 流体模型^[15], Voigt 黏弹性模型^[16-18], 非线性黏弹性模型^[19] 以及多层黏弹性模型^[20] 等. 对各类海床模型的综述可见周显初等的工作^[21].

Boussinesq 型方程是描述近岸浅水波的强有力工具, 它以波高和特征水平速度为变量, 在避开水层中速度剖面描述的同时, 保留自由面的非线性边界条件. 该方程能够描述弱非线性效应和弱色散效应的水波, 适

用于沿海浅水和中等水深中水波的传播问题^[22]. 传统的 Boussinesq 方程仅适用于刚性海底, 而最近, 一些描述波 - 泥相互作用的 Boussinesq 型方程相继发展起来. Liu 等^[12] 给出了牛顿泥床模型下水波的三阶精度的 Boussinesq 型方程, 其中泥层影响以连续方程右端源项的形式出现, 该方程得到的线性长波的衰减率与 MacPherson^[16] 的结果相符. 但是在实际问题中, 由于泥床流变学特性的复杂性, 需要研究非牛顿泥床与水波的相互作用. 本文将文献^[12] 的方法从牛顿泥床拓展到 Maxwell 泥床模型, 以研究水波和该类非牛顿泥床的相互作用.

1 数学模型

泥床 - 水波相互作用的物理模型如图 1 所示. 考虑到水的黏性系数比泥层小 3 个量级, 水层在这里采用了无黏近似.

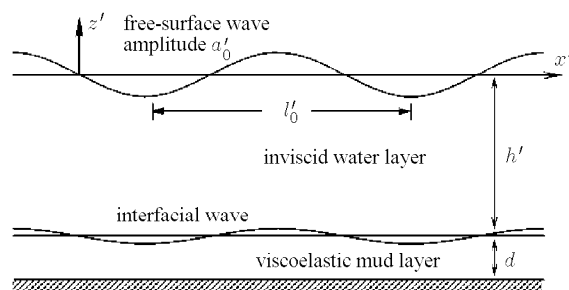


图 1 物理模型简图

Fig.1 Definition sketch of the physical model

2009-03-19 收到第 1 稿, 2009-06-17 收到修改稿.

1) E-mail: jlz02@mails.tsinghua.edu.cn

泥层同时具有黏性和弹性, 其本构关系采用黏弹性体中的 Maxwell 模型描述

$$\frac{1}{\mu'_m} \tau'_m + \frac{1}{G'_m} \frac{\partial \tau'_m}{\partial t'} = \dot{\gamma}' \quad (1)$$

其中 μ'_m 和 G'_m 分别为 Maxwell 模型中动力黏性系数和弹性模量. 假设泥床和水层有清晰的界面, 平均水深为 h' , 泥床厚 d' , 水和泥的密度分别为 ρ'_w 和 ρ'_m . 水表面位置用 $\zeta'(x', y', t')$ 表示, 其中水平坐标 y' 轴垂直于图面向里. 图中 a'_0 为波幅, l'_0 为水波的波长. 利用有关特征量及特征速度 $\sqrt{gh'}$ 和特征时间 $t'_0 = l'_0/\sqrt{gh'}$, 在泥层和水层中引入以下无量纲量

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= \frac{(x', y')}{l'_0}, \quad z = \frac{z'}{h'}, \quad t = t' \frac{\sqrt{gh'}}{l'_0} \\ \zeta &= \frac{\zeta'}{a'_0}, \quad p_{w,m} = \frac{p'_{w,m}}{\rho'_w g a'_0} \\ (u_{w,m}, v_{w,m}) &= \frac{(u'_{w,m}, v'_{w,m})}{\varepsilon \sqrt{gh'}} \\ w_w &= w'_w \frac{\mu}{\varepsilon \sqrt{gh'}}, \quad w_m = \frac{w'_m}{\alpha \varepsilon \sqrt{gh'}} \\ \tau_m &= \frac{\tau'_{xz}}{\alpha \rho'_m g a'_0}, \quad \eta = \frac{z' + h'}{(\alpha/\mu)h'}, \quad d = \frac{d'}{(\alpha/\mu)h'} \\ \lambda &= \frac{\mu'_m}{G'_m} \frac{\sqrt{gh'}}{l'_0}, \quad \gamma = \frac{\rho'_w}{\rho'_m} \\ \varepsilon &= \frac{a'_0}{h'}, \quad \mu = \frac{h'}{l'_0}, \quad \alpha^2 = \frac{\nu'_m}{l'_0 \sqrt{gh'}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, 下标 w 表示水层中的物理量, 下标 m 表示泥层中的物理量. 除了无量纲坐标、压力和速度外, ε 为波幅与水深之比, 其大小可用于衡量非线性效应的强弱; μ 为水深与波长之比, 其大小可用于衡量频散效应的强弱. $\nu'_m = \mu'_m/\rho'_m$ 为泥的运动黏性系数, α 为泥层黏性效应的相对度量, γ 为密度比, λ 为 Maxwell 流体的无量纲松弛时间.

无量纲的水层、泥层控制方程为

$$\mu^2 \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon \zeta \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m + \frac{\partial w_m}{\partial \eta} = 0, \quad -d \leq \eta \leq 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} = -\gamma \nabla p + \frac{\partial \tau_m}{\partial \eta} + O(\varepsilon), \quad -d \leq \eta \leq 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = O(\alpha), \quad -d \leq \eta \leq 0 \quad (6)$$

$$\tau_m + \lambda \frac{\partial \tau_m}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \eta} + O(\alpha^2) \quad (7)$$

其中水层运动采用无黏的势流方程 (3) 描述, 而泥

层控制方程采用了 Stokes 近似和薄层近似 (即要求 $d'/l' = \alpha d \ll 1$, 以使用压强沿泥深方向均匀的假设). 而无量纲的边界条件和泥 - 水界面条件则可表示为:

泥层底部无滑移边界条件

$$u_m = 0, \quad w_m = 0, \quad \eta = -d \quad (8)$$

水层自由面运动学和动力学边界条件

$$\mu^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \zeta \right) = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad z = \varepsilon \zeta \quad (9)$$

$$\mu^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \zeta \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\mu^2 |\nabla \phi|^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad z = \varepsilon \zeta \quad (10)$$

泥 - 水界面速度和应力连续边界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \alpha \mu w_m, \quad \eta = 0 \quad (11)$$

$$\tau_m = 0, \quad \eta = 0 \quad (12)$$

$$-\nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} + O(\varepsilon), \quad \eta = 0 \quad (13)$$

上述各式中 Napla 算子 ∇ 和 Laplace 算子 ∇^2 仅对水平坐标 (x, y) 做微分运算. 式 (13) 中的 $\mathbf{u}_b$ 是界面处水层的切向速度.

2 Boussinesq 型方程的建立

在本研究中, 对小量 α, ε 和 μ 采用同文献 [12] 类似的量级假设

$$O(\alpha) \sim O(\varepsilon^2) \sim O(\mu^4), \quad d \sim O(1) \quad (14)$$

其中, $O(\varepsilon) \sim O(\mu^2)$ 表明水层中波幅、水深和波长间的关系, 它限制波幅在弱非线性的区域; $O(\alpha) \sim O(\varepsilon^2)$ 给出泥床黏性与水深和波幅间的量级关系. 它要求耗散效应相对非线性效应而言是一个小量; $d \sim O(1)$ 意味着泥层与水深相比很薄. 该假设能满足实际观测到的数据. 比如利用文献 [23] 中观测点 CSI3 处的波浪数据和文献 [24] 中的泥层运动黏性系数 $\nu'_m = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$, 可得到 μ, ε, α 的取值分别为 μ : 0.07~0.35, ε : 平均值在 0.024 左右, α : 0.002~0.005. 可见式 (14) 的假设落在这个范围内.

参考文献 [25] 的作法, 把势函数 ϕ 展成坐标 z 的幂级数形式

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \phi_n(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

将上式代入速度势方程 (3) 可得到各阶势函数 ϕ_n 的递推关系

$$\phi_{n+2}(\mathbf{x}, t) = \frac{-\mu^2 \nabla^2 \phi_n(\mathbf{x}, t)}{(n+1)(n+2)} \quad (16)$$

其中起始两项 $\phi_1, \nabla \phi_0$ 可利用泥 - 水界面处泥层的法向速度 w_{mb} 和水层的切向速度表示

$$\phi_1 = \alpha \mu w_{mb} \quad (17)$$

$$\nabla \phi_0 = \mathbf{u}_b \quad (18)$$

把用 w_{mb} 和 $\mathbf{u}_b$ 表示的势函数 ϕ 代入式 (9) 和式 (10), 并保留三阶的精度, 可得

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H \mathbf{u}_b) - \frac{\mu^2}{6} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_b = \gamma \frac{\alpha}{\mu} w_{mb} + O(\mu^4) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial (\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_b)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla H + \varepsilon \mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}_b = O(\mu^4) \quad (20)$$

其中, $H = 1 + \varepsilon \zeta$ 为水深, 而水层中的平均流速 $\bar{\mathbf{u}}$ 与 $\mathbf{u}_b$ 有如下关系

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{H} \int_{-1}^{\varepsilon \zeta} \nabla \phi dz = \mathbf{u}_b - \frac{\mu^2}{6} H^2 \nabla^2 \mathbf{u}_b + O(\mu^4) \quad (21)$$

这样, 以水深 H 和平均流速 $\bar{\mathbf{u}}$ 为变量的 Boussinesq 型方程组为

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H \bar{\mathbf{u}}) = \frac{\alpha}{\mu} w_{mb} + O(\mu^4) \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \varepsilon \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla H - \frac{\mu^2}{3} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) = O(\mu^4) \quad (23)$$

可以看到, 如果没有泥 ($d = 0$), 那么 $w_{mb} = 0$, 上述方程可退化为刚性海床下水波的 Boussinesq 方程.

为得到 w_{mb} , 假设 $t = 0$ 的初始时刻水层中无运动且应力为零. 利用 Laplace 变换从泥层运动方程组 (4)~(7) 解得

$$\mathbf{u}_m = \int_0^t \gamma \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial \tau} G_{\text{Maxwell}}(d, \eta, t - \tau) d\tau + O(\mu^2) \quad (24)$$

其中

$$G_{\text{Maxwell}}(d, \eta, t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(\eta b_n)}{b_n d} \exp\left(\frac{-t}{2\lambda}\right) \cdot$$

$$\left[\frac{\sinh(\theta_n t)}{2\lambda \theta_n} + \cosh(\theta_n t) \right] \quad (25)$$

$$b_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{d}, \quad \theta_n = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{1 - 4\lambda b_n^2} \quad (26)$$

利用连续方程 (4) 即可得到

$$w_{mb} = \int_0^t \gamma \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}_b}{\partial \tau} [-d + I_{\text{Maxwell}}(d, t - \tau)] d\tau + O(\mu^2) \quad (27)$$

其中反映 Maxwell 泥床特性的项

$$I_{\text{Maxwell}} = d - \int_{-d}^0 G_{\text{Maxwell}}(\eta, t) d\eta =$$

$$d - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{db_n^2} \left[\frac{\sinh(\theta_n t)}{2\lambda \theta_n} + \cosh(\theta_n t) \right] \exp\left(\frac{-t}{2\lambda}\right) \quad (28)$$

将式 (28) 代入式 (22) 得到

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H \bar{\mathbf{u}}) =$$

$$\frac{\alpha}{\mu} \int_0^t \gamma \frac{\partial \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}}{\partial \tau} [-d + I_{\text{Maxwell}}(d, t - \tau)] d\tau + O(\mu^4) \quad (29)$$

其中水层平均速度 $\bar{\mathbf{u}}$ 是二维的. 而式 (29) 和式 (23) 构成了描述 Maxwell 泥床影响下, 二维表面波的 Boussinesq 型方程组.

3 一维线性长波的衰减率

对于一维线性长波, 在式 (29) 和式 (23) 中略去非线性项, 可简化为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \gamma \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} [-d + I_{\text{Maxwell}}(d, t - \tau)] d\tau \quad (30)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

引入坐标变换

$$\sigma = x - x_0 - t, \quad \xi = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)t \quad (32)$$

并用 $a(\xi)e^{i\sigma}$ 表示自由表面位移 ζ 的简谐长波解, 慢变波幅 $a(\xi)$ 可表示为

$$a(\xi) = e^{i\beta\xi}, \quad \beta = \beta_r + i\beta_i \quad (33)$$

将式 (33) 代入式 (30) 和式 (31), 就能得到无量纲色散率 β_r 和无量纲衰减率 β_i 如下形式的解

$$\beta_r = -\frac{\gamma}{2} \left[\bar{d} - \int_0^t \sin q I_{\text{Maxwell}}(d, q) dq \right] \quad (34)$$

$$\beta_i = -\frac{\gamma}{2} \int_0^t \cos q I_{\text{Maxwell}}(d, q) dq \quad (35)$$

考虑经过较长时间的一个整周期波列, 就可以得到线性长波的衰减率

$$\beta_i = -\frac{\gamma}{2} \int_0^{2N\pi} \cos q I_{\text{Maxwell}}(d, q) dq, \quad N \rightarrow +\infty \quad (36)$$

从上式可以看到线性长波的衰减率和 γ 成正比, 这意味着密度越大的泥层对应的衰减率越小. 因为在模型中泥床的运动完全由水波产生的压力梯度引起, 泥床密度越大, 其运动速度就越小, 在同样黏性系数下产生的耗散也就越小, 在 $\gamma \rightarrow 0$ 的极端情况下, 泥床引起线性长波的衰减率为零, 表现得与刚性海底一致.

在本构关系中取 $\lambda = 0.0005$ 的极弱弹性的情况, 数值积分式 (36), 可以发现该模型线性长波的衰减率的解能够退化到牛顿模型的解^[12](图 2). 图中数据点是式 (36) 在 $\lambda = 0.0005$ 时给出的衰减率曲线, 实线是文献 [12] 的牛顿泥床衰减率, 虚线是文献 [16] 得到的衰减率.

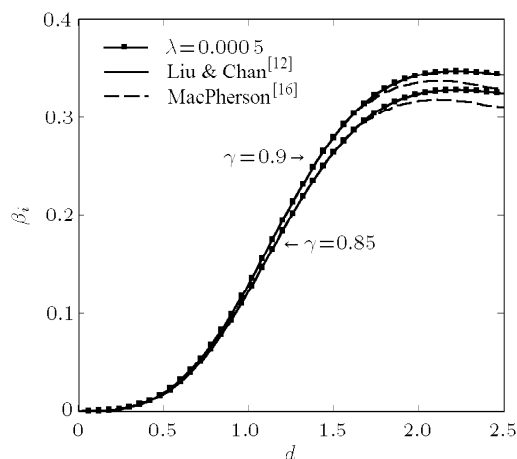


图 2 退化的 Maxwell 泥床模型与其他泥床模型比较

Fig.2 Comparison of degenerated Maxwell model with other mud models

图 3 给出了不同松弛时间 λ 下, 线性长波衰减率 β_i 随泥深 d 的变化情况, 图 4 则给出了不同泥深 d 下, β_i 随 λ 的变化情况. 从图 3 和图 4 中可以发现这样的现象: 不论是给定松弛时间 λ 还是给定泥深 d , β_i 总存在极值, 即使对于很小的 λ 也是如此. 而且在 λ 较大时, 不同泥深 d 对应的 β_i 不只一个极值. 在给定松弛时间 λ 时, λ 越大, β_i 的第 1 个极值对应的泥深 d 越浅; 在给定泥深 d 时, d 越深, β_i 第 1 个极值对应的松弛时间 λ 越小.

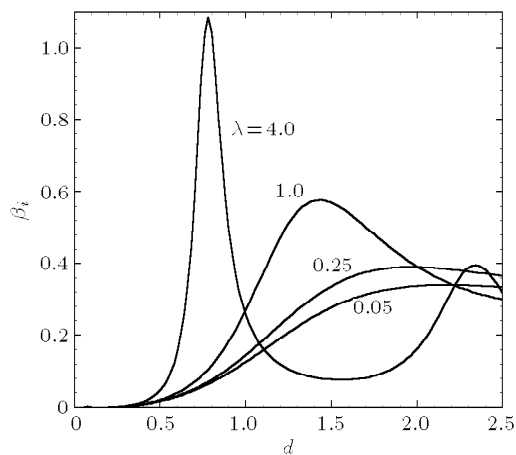


图 3 在不同松弛时间 λ 下, 衰减率 β_i 作为泥深 d 的函数 ($\gamma = 0.85$)

Fig.3 The damping rate β_i as a function of mud depth d at different relaxation time λ ($\gamma = 0.85$)

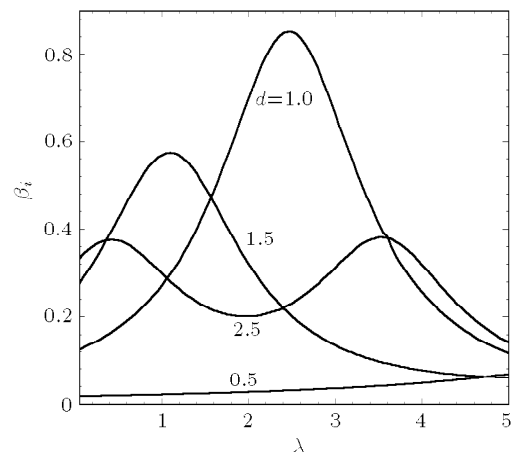


图 4 在不同泥深 d 下, 衰减率 β_i 作为松弛时间 λ 的函数 ($\gamma = 0.85$)

Fig.4 The damping rate β_i as a function of relaxation time λ at different mud depth d ($\gamma = 0.85$)

Piedra-Cueva^[17] 用共振效应解释了 Voigt 泥床的衰减率增强效应, 类似的分析也能用来估计 Maxwell 模型 β_i 的极值位置. 由 β_i 的定义式 (36) 和 I_{Maxwell} 的定义式 (28) 出发, 可把 β_i 表示为

$$\beta_i = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{in} \quad (37)$$

其中, 每阶模态的衰减率 β_{in} 为

$$\beta_{in} = \int_0^{2N\pi} \frac{\cos q}{db_n^2} \left[\frac{\sinh(\theta_n q)}{2\lambda\theta_n} + \cosh(\theta_n q) \right] \exp\left(\frac{-q}{2\lambda}\right) dq, \quad N \rightarrow +\infty \quad (38)$$

由于前几阶模态对 β_i 的影响较大, 因此前几个极值点大致出现在 n 阶模态衰减率 β_{in} 的极值点

处, 如图 5(a) 和图 5(b) 所示. 当然, 由于前面的分析基于泥层较薄, 即 $d \sim O(1)$ 的情况, 因此 d 较大时衰减率的数据仅作参考. 图 5(c) 中虚线表示的是式 (39) 所示的 $d_{\max-n-\lambda}$ 曲线, 分别对应 $n=1, 2, 3$ 的情况.

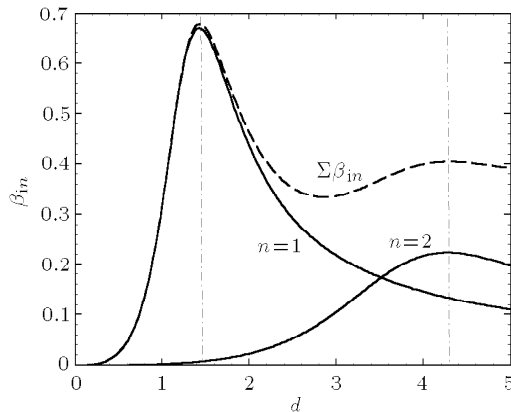
特定条件下, 可以粗略地估计 β_i 极值点的位置: 当松弛时间 λ 较大或泥深 d 较浅, 使得 $\pi^2 \lambda / d > 1$, θ_n 总是虚数时, 式 (38) 的极值点位置可用下式估计

$$d_{\max-n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(n-1/2)\pi + O(2\lambda)^{-5/2} \quad (39)$$

而该点的极值为

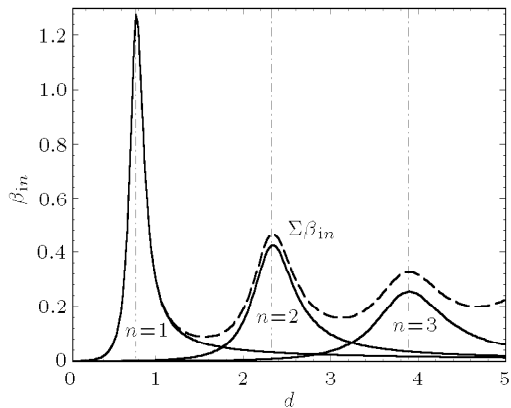
$$\beta_{in-\max} = \frac{\sqrt{\lambda}}{(n-1/2)\pi} \quad (40)$$

比如图 5(b) 中 $\lambda=4$ 所对应的 β_i 极值位置几乎就在式 (39) 预言的 $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ 处, 表现出近



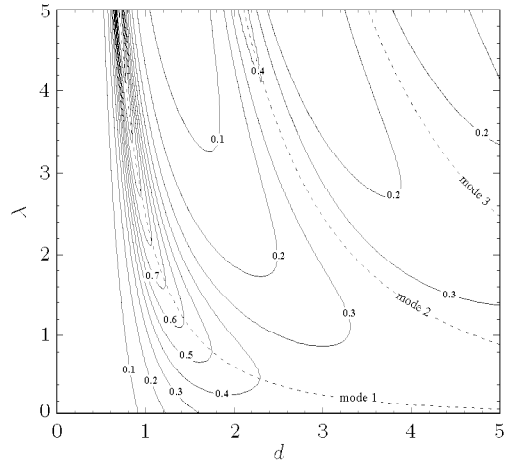
(a) 弹性参数 $\lambda = 1$

(a) Elasticity parameter $\lambda = 1$



(b) 弹性参数 $\lambda = 4$

(b) Elasticity parameter $\lambda = 4$



(c) $\gamma = 0.85$ 时衰减率 β_i 在 d - λ 平面上的等高线图

(c) Contour lines of damping rate β_i in the d - λ plane

($\gamma = 0.85$)

图 5 各阶模态衰减率 β_{in} 以及 $\sum \beta_{in}$ 随泥深 d 的变化曲线

Fig.5 Modal damping rates β_{in} and the sum $\sum \beta_{in}$ varies with mud depth d

似周期的特性. 但如果 λ 较小, 如图 5(a) 中 $\lambda=1$ 的情况, 那么只有一阶模态对衰减率影响明显, 而且式 (39) 对 β_i 极值位置的估计也失准: 极值点出现在 $d_{\max-n} = 1.45, 4.35$ 处, 与式 (39) 预言的 $\pi/2$ 差异较大, 也没有明显的周期性特征. 而从图 5(c) 则给出的 β_i 等高线图, 可以看出式 (39) 给出的 $d_{\max-n-\lambda}$ 曲线正对应衰减率的脊线. 只有给定较大的 λ , 脊线较陡时, 脊线位置的泥深 d 才接近 β_i 的极值位置 $d_{\max}$, $d_{\max}$ 的准周期特性才比较明显.

4 结 论

为描述 Maxwell 泥床存在下弱非线性中长波的传播问题, 本文通过在对水层中流函数的幂级数扰动展开, 以及薄层近似下对 Maxwell 泥床运动进行求解, 建立了一组新型的 Boussinesq 型方程, 并利用该方程组解析地给出了 Maxwell 泥床下一维线性长波的衰减率. 当退化为牛顿流体时, 本模型与文献结果一致, 反映出低密度, 厚泥床衰减较强的特点. 而与牛顿流体相比, Maxwell 泥层下长波衰减率随着泥深 d 的变化将间歇性地出现极大值. 从模态衰减率曲线可知, 只有低阶模态对整体衰减的影响比较显著. 在极值点附近, 将有一模态衰减率占主导, 当该模态的衰减率达到最大, 整体衰减也达到最大. 当松弛时间 λ 较大或泥深 d 较浅时, 这些极值点的位置可用式 (39) 估计, 并具有准周期性的特征.

参 考 文 献

- 1 Jonsson IG. Wave boundary layers and friction factor. In: Proc 10th Conf on Coastal Eng, 1966. 127-148
- 2 Reid RO, Kajiura K. On the damping of gravity waves over a permeable seabed. *Trans Am Geophysical Union*, 1957, 38: 939-950
- 3 Gade HG. Effects of a non-rigid, impermeable bottom on plane surface waves in shallow water. *J Mar Res*, 1958, 16: 61-82
- 4 Moshagen II, Torum A. Wave induced pressures in permeable seabeds. *J Waterways, Harbors Coastal Eng Div, Am Soc Civ Eng*, 1975, 101(1): 49-57
- 5 Yamamoto T, Koning HL, Sellmeigher H, et al. On the response of poro-elastic bed to water waves. *J Fluid Mech*, 1978, 87: 193-206
- 6 Jeng DS. Wave-induced sea floor dynamics. *Appl Mech Rev*, 2003, 56: 407-429
- 7 Liu PL-F, Park YS, Lara JL. Long-wave-induced flows in an unsaturated permeable seabed. *J Fluid Mech*, 2007, 586: 323-345
- 8 Mallard WW, Dalrymple RA. Water waves propagating over a deformable bottom. In: Proc Offshore Tech Conf, 1977, OTC 2895. 141-146
- 9 Wen J, Liu PL-F. Mass transport in water waves over an elastic bed. In: Proc R Soc Lond, 1995, A 450: 371-390
- 10 Dalrymple RA, Liu PL-F. Waves over soft muds: a two layer model. *J Phys Oceanogr*, 1978, 8: 1121-1131
- 11 Ng C-O. Water waves over a muddy bed: a two-layer Stokes' boundary layer model. *Coastal Engng*, 2000, 40: 221-242
- 12 Liu PL-F, Chan I-C. On long-wave propagation over a fluid-mud seabed. *J Fluid Mech*, 2007, 579: 467-480
- 13 齐鹏, 侯一筠. 波浪作用下淤泥质底床泥体输移. 水动力学研究与进展 A 辑, 2005, (S1): 847-853 (Qi Peng, Hou Yijun. Mud mass transport due to waves. *Journal of Hydrodynamics*, 2005(S1): 847-853 (in Chinese))
- 14 Ng C-O. Mass transport in a layer of power-law fluid forced by periodic surface pressure. *Wave Motion*, 2004, 39: 241-259
- 15 Mei CC, Liu K-F. A Bingham-plastic model for a muddy seabed under long waves. *J Geophys Res*, 1987, 92: 14581-14594
- 16 MacPherson H. The attenuation of water waves over a non-rigid bed. *J Fluid Mech*, 1980, 97: 721-742
- 17 Piedra-Cueva I. On the response of a muddy bottom to surface water waves. *J Hydraul Res*, 1993, 31: 681-696
- 18 Ng C-O, Zhang X. Mass transport in water waves over a thin layer of soft viscoelastic mud. *J Fluid Mech*, 2007, 573: 105-130
- 19 练继建, 赵子丹, 张庆河. 波浪作用下底泥输移的非线性粘弹性体模型. 科学通报, 1999, 44 (4): 445-448 (Lian Jijian, Zhao Zidan, Zhang Qinghe. A nonlinear visco-elastic model for mud mass transportation under wave-flow interaction. *Chinese Science Bulletin*, 1999, 44(4): 445-448 (in Chinese))
- 20 Maa JP-Y, Mehta AJ. Soft mud response to water waves. *J Waterway Port Coastal Ocean Engng*, 1990, 116: 634-650
- 21 周显初, 呼和敖德, 李家春等. 淤泥质海床上波浪衰减研究. 力学与实践, 1992, 14(4): 1-9 (Zhou Xianchu, Huhe Aode, Li Jiachun, et al. A study on wave attenuation over muddy seabed. *Mechanics and Practice*, 1992, 14(4): 1-9 (in Chinese))
- 22 李孟国, 王正林, 蒋德才. 关于波浪 Boussinesq 方程的研究. 青岛海洋大学学报, 2002, 32(3): 345-354 (Li Mengguo, Wang Zhenglin, Jiang Decai. Study on the Boussinesq equations. *Journal of Ocean University of Qingdao*, 2002, 32(3): 345-354 (in Chinese))
- 23 Sheremet A, Stone GW. Observations of nearshore wave dissipation over muddy sea beds. *J Geophys Res*, 2003, 108: 3357-3368
- 24 Winterwerp JC, Graaff RF, Groeneweg J, et al. Modelling of wave damping at Guyana mud coast. *Coastal Engineering*, 2007, 54: 249-261
- 25 Liu PLF, Orfila A. Viscous effects on transient long-wave propagation. *J Fluid Mech*, 2004, 520: 83-92

(责任编辑: 刘俊丽)

A STUDY OF LINEAR LONG WAVE ATTENUATION OVER A MAXWELL MUD BED

Xia Yuezhang¹⁾ Zhu Keqin

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract In coastal area, the interactions between waves and muddy seabed lead to energy dissipation. We use Maxwell model as the constitutive equation of non-Newtonian mud and develop a new set of Boussinesq-type equations to describe wave propagation under wave-mud interaction. Based on these equations, the damping rate for one-dimensional linear long waves is analytically obtained. The present result is consistent with previous literatures when the model degenerates to Newtonian case. When dimensionless relaxation time λ is large, extremums of the damping rate appear quasi-periodically as the mud depth increases. These extreme points correspond to the peaks of modal damping rates.

Key words wave-mud interaction, Boussinesq-type equations, Maxwell model, perturbation methods, damping rate