关于返回映射算法中应力的四阶张量值函数

陈明祥 [1)]

(武汉大学土木建筑工程学院，武汉 430072)

摘要　针对各向同性材料，基于一组相互正交的基张量，建立了一套有效的相关运算方法. 基张量中的两个分别是归一化的二阶单位张量和偏应力张量，另一个则使用应力的各向同性二阶张量值函数经过归一化构造所得，三者共主轴. 根据张量函数表示定理，本构方程和返回映射算法中所涉及到的应力的二阶、四阶张量值函数及其逆都由这组基所表示. 推演结果表明：这些张量之间的运算，表现为对应系数矩阵之间的简单关系. 其中，四阶张量求逆归结为对应的 3×3 系数矩阵求逆，它对二阶张量的变换则表现为该矩阵对 3×1 列阵的变换. 最后，对这些变换关系应用于返回映射算法的迭代格式进行了相关讨论.

关键词　本构方程积分，应力更新，返回映射算法，各向同性，张量函数表示定理

中图分类号：O344.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0459-1879(2010)02-0228-10

引　言

在弹塑性力学边值问题的数值分析中，一项重要的工作是积分本构方程以达到更新应力的目的. 对于许多工程材料如混凝土、土和岩石等, 为了较好地描述其弹塑性行为，常常需要采用一些较复杂的本构方程，这时，本构方程积分不能通过解析方法实现，而只能依靠数值方法. 然而，积分运算需要在每一次平衡迭代中针对每一个进入屈服的高斯积分点进行，算法的有效性直接影响到整体数值分析的有效性和稳定性. 由于这些原因, 数值积分算法在最近 20 多年来一直是计算力学的重要研究课题之一.

到目前为止，大多数研究与应用均基于所谓的返回映射算法，该算法最早由 Krieg 和 Krieg[1] 提出， Chrield[2] 给出了较全面的评述，最近的有关研究进展可参考文献 [3~7] 的工作. 返回映射算法首先根据本次平衡迭代的应变增量计算弹性预测应力，然后按照一定的方向计算塑性修正应力增量，使得应力返回到更新后的屈服面上. 在返回方向的计算中又分为显式和隐式两种，其中，向后的 Euler 完全隐式算法应用最广泛，它是非线性的，需要进行迭代，每一次迭代中，需要求一个四阶张量的逆，该四阶张量取决于弹性张量和塑性势函数. 显然，有效的求逆方法对提高整个算法的效率至关重要，因为求逆需要在每一次 (整体) 平衡迭代和每一次 (局部) 本构积分迭代中针对每一个进入屈服的高斯积分点进行.

对于各向同性材料，这个四阶张量具有两个特点： (1) 它是应力的各向同性函数； (2) 它具有与弹性张量相同的对称性. Palazzo 等 [8] 结合这两个特点给出了一种求逆方法，他们根据张量函数表示理论，使用二阶单位张量，偏应力张量和它的二次幂共 3 个基张量. 建立逆张量的一般表示式，然后根据它与四阶张量本身的双点积应等于四阶单位张量，通过张量运算得到表示式中所有系数的代数方程，求解这些代数方程，即得到逆张量. 将所得结果应用到本构方程积分算法的迭代格式中，能使问题的维数从六维降低到三维. Rosati 和 Valoroso[9] 通过引入应力张量的谱分解改进了前面的工作，使得分析在主应力空间中进行，所得的代数方程也变得比较简单. 然而，需要求出应力的主轴方向，且在塑性应力的返回计算中，需要将主轴表示的应力转换到整体坐标系中.

本文采用了与文献 [8,9] 类似的方法，最显著的差别是，构造了一个应力的各向同性二阶张量值函数，它与二阶单位张量和偏应力张量分别正交，且共主轴，在归一化后，三者形成一组正交归一化且共主轴的基张量. 其目的是使张量之间的运算变得更加简单，而且，避免求应力主轴方向和进行应力的坐

2009–01–08 收到第 1 稿， 2009–08–05 收到修改稿.

1) E-mail: mxchen@whu.edu.cn

标变换，以进一步提高算法的效率．本文主要的手段是应用张量函数表示理论，在充分利用材料的各向同性性质后，建立积分算法中所涉及到的应力的二阶、四阶张量值函数及其逆由这组基所给出的一般表示．通过导出四阶张量和逆张量对 3 个基张量及其它特征张量的变换，得到一系列张量运算如四阶张量求逆和它对二阶张量的变换等所对应的系数矩阵之间的简单关系．最后，对这些变换关系应用于本构方程积分算法的迭代格式进行了相关讨论．为了内容的完整性，本文简要描述了本构方程使用前述基张量的不变性表示以及完全隐式的向后 Euler 算法．

文中 tr 表示对二阶张量求迹；$\boldsymbol{I}$ 表示二阶单位张量，其分量为 δ_{ij}，即 Kronecker 符号．四阶张量使用 $\mathbb{A},\mathbb{C},\mathbb{I}$ 等表示，其中，$\mathbb{I}$ 表示四阶单位张量．两个二阶张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的点积记作 $\boldsymbol{ST}$；"$\otimes$" 代表两个张量之间的张量积；"$:$" 代表 1 个四阶或者二阶张量与 1 个二阶张量的双点积，如 $(\mathbb{A}:\boldsymbol{S})_{ij}=\mathbb{A}_{ijkl}\boldsymbol{S}_{kl}$．两个二阶对称张量的直积 $\boldsymbol{D}\boxtimes\boldsymbol{E}$ 再双点积 1 个对称二阶张量 $\boldsymbol{A}$，定义为

$$(\boldsymbol{D}\boxtimes\boldsymbol{E}):\boldsymbol{A}=\boldsymbol{DAE}\,,\text{或 }(\boldsymbol{D}\boxtimes\boldsymbol{E})_{ijkl}=D_{ik}E_{jl} \tag{1}$$

使用 $\boldsymbol{S}$ 表示偏应力，应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 3 个不可约不变量由 p,q 和 θ 表示，分别为

$$\left.\begin{aligned}&p=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\,,\quad q=\sqrt{\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^2}\\&\theta=\frac{1}{3}\sin^{-1}\Big[-\frac{\sqrt{6}\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^3}{(\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^2)^{3/2}}\Big]\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 θ 是应力的 Lode 角．

1　本构方程的不变性表示与完全隐式的返回映射算法

1.1　正交张量基

根据张量函数表示理论 [10]，应力的任意各向同性二阶张量值函数均可表示为 3 个完备不可约基张量 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^2$ 的线性组合．为讨论问题的方便，将这 3 个基张量正交化．定义二阶偏张量 $\boldsymbol{T}$，它是应力张量的各向同性函数，要求它与 $\boldsymbol{S}$ 正交，即 $\mathrm{tr}\boldsymbol{T}=0$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{ST})=0$，且还要求 $\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2=\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^2=q^2$，因此有

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\cos 3\theta}\Big(\frac{\sqrt{6}}{3}q\boldsymbol{I}-\sin 3\theta\boldsymbol{S}-\frac{\sqrt{6}}{q}\boldsymbol{S}^2\Big) \tag{3}$$

显然，$\boldsymbol{I},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 三者相互正交，且共主轴 (其中，$\boldsymbol{I}$ 的主轴任意)．将它们归一化，所得张量用相应的小写字母表示，为

$$\boldsymbol{i}=\frac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{\mathrm{tr}\boldsymbol{I}^2}}=\frac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{3}} \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^2}}=\frac{\boldsymbol{S}}{q} \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{T}}{\sqrt{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2}}=\frac{\boldsymbol{T}}{q} \tag{4c}$$

则有

$$\boldsymbol{t}=\frac{1}{\cos 3\theta}(\sqrt{2}\boldsymbol{i}-\sin 3\theta\boldsymbol{s}-\sqrt{6}\boldsymbol{s}^2) \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{tr}(\boldsymbol{i}^2)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{s}^2)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{t}^2)=1\\&\mathrm{tr}(\boldsymbol{is})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{it})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{st})=0\end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

需要强调指出：由于 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}^2$ 是应力的各向同性二阶张量值函数的完备不可约基，将这 3 个张量基正交化后再归一化所得的张量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 则构成另外一组完备不可约基，而且，它们同样共主轴．

不难导出应力的 3 个不变量对应力张量的偏导数为

$$p_{,\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{i} \tag{6a}$$

$$q_{,\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{q}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s} \tag{6b}$$

$$q\theta_{,\boldsymbol{\sigma}}=q\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{q}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{t} \tag{6c}$$

1.2　塑性本构方程的不变性表示

对于各向同性率无关材料，在内变量为标量的假设下，陈明祥 [11] 使用张量函数表示理论给出塑性应变增量的一般表达式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\xi_1\boldsymbol{i}+\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{s}+\mathrm{d}\xi_3\boldsymbol{t} \tag{7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}\xi_1=\mathrm{tr}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{i})=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}\\&\mathrm{d}\xi_2=\mathrm{tr}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{s})=\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}\cos(\psi-\theta)\\&\mathrm{d}\xi_3=\mathrm{tr}(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{t})=\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}\sin(\psi-\theta)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中，$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}=\mathrm{tr}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 是塑性体积应变增量，$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}})^2}$ ($\mathrm{d}\boldsymbol{e}^{\mathrm{p}}$ 是塑性偏应变增量)，ψ 是塑性应变增量的 Lode 角．显然，塑性应变增量与应力共主轴．

定义主应力空间：设三维空间中有一组固定的正交坐标基矢量，让空间中一点的 3 个坐标分量分别代表张量的 3 个主值，即将张量的 3 个主值分别

配上坐标基矢量变成空间中的矢量. 共主轴张量之间的代数运算，如张量的数乘和加减等，可以当作空间中对应的矢量进行，两个共主轴张量之间的双点积等于对应矢量的点乘，于是，如果张量之间正交，则对应的矢量也正交. 记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 三者对应的矢量为 $\boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$, 其中， $\boldsymbol{e_i}$ 沿着静水压力轴， $\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_t$ 位于偏应力平面. 由于加载中 $\boldsymbol{s}$ 不断变化 ($\boldsymbol{t}$ 也随之变化)，相应地， $\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_t$ 将不断转动，但 $\boldsymbol{e_i}$ 不变， $\boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$ 构成局部柱坐标系的基矢量.

根据式 (8), $\mathrm{d}\xi_1$, $\mathrm{d}\xi_2$ 和 $\mathrm{d}\xi_3$ 是塑性应变增量在张量空间中基张量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 上的投影. 在主应力空间，它们就是塑性应变增量对应的矢量在局部柱坐标系中基矢量 $\boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$ 上的投影，将该矢量记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{d}\xi_1\boldsymbol{e_i}+\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{e}_s+d\xi_3\boldsymbol{e}_t \tag{9a}$$

取 $\int\mathrm{d}\xi_1$, $\int\mathrm{d}\xi_2$ 和 $\int\mathrm{d}\xi_3$ 作为 3 个独立的内变量，根据式 (7), 本构方程的实质就是建立 3 个内变量的演化方程. 在主应力空间中，使用 3 个内变量，构造矢量如下

$$\boldsymbol{\xi}=\int\mathrm{d}\xi_1\boldsymbol{e_i}+\int\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{e}_s+\int\mathrm{d}\xi_3\boldsymbol{e}_t \tag{9b}$$

陈明祥 [12] 使用张量函数表示理论，在增量线性假定下，表明 3 个内变量的演化方程在主应力空间中一般表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \tag{10}$$

式中， $\boldsymbol{\eta}$ 代表应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 在主应力空间中对应的矢量， $\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$ 是该矢量的增量，分别为

$$\boldsymbol{\eta}=p\boldsymbol{e_i}+q\boldsymbol{e}_s\ ,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}=\mathrm{d}p\boldsymbol{e_i}+\mathrm{d}q\boldsymbol{e}_s+q\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_t \tag{11}$$

而 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$ 是取决于 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}$ 的二阶张量. 应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 可分解为两部分：主轴方向不变，仅主值改变引起的；主值不变，仅主轴方向改变引起的；前一部分在主应力空间中对应的矢量就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$. 因此，内变量的演化方程与应力主轴的转动无关. 根据上面的描述，本构方程归结为：确定塑性应变增量和应力及应力增量在主应力空间中对应的矢量之间的关系.

确定这些矢量之间本构关系的简单方法就是引入势函数的概念. 假定在主应力空间中存在势函数

$$G=G(p,q,\theta,\boldsymbol{\xi})=G(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}) \tag{12}$$

而且， 3 个内变量增量构成的矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ 与势函数所代表的曲面正交，即与势函数的梯度平行，考虑到柱坐标下的梯度算子，用分量的形式写成

$$\mathrm{d}\xi_1=\mathrm{d}\lambda G_{,p}\,,\quad \mathrm{d}\xi_2=\mathrm{d}\lambda G_{,q}\,,\quad \mathrm{d}\xi_3=\mathrm{d}\lambda\frac{1}{q}G_{,\theta} \tag{13a}$$

或用整体形式表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{d}\lambda G_{,\eta} \tag{13b}$$

式中 $\mathrm{d}\lambda$ 是塑性因子, $G_{,\eta}=G_{,p}\boldsymbol{e_i}+G_{,q}\boldsymbol{e}_s+\dfrac{1}{q}G_{,\theta}\boldsymbol{e}_t$.

将式 (13a) 代入式 (7)，得

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\Big(G_{,p}\boldsymbol{i}+G_{,q}\boldsymbol{s}+\frac{1}{q}G_{,\theta}\boldsymbol{t}\Big) \tag{14}$$

将式 (6) 代入上式并利用复合函数求导法则，得

$$G_{,p}\boldsymbol{i}+G_{,q}\boldsymbol{s}+\frac{1}{q}G_{,\theta}\boldsymbol{t}=\\ G_{,p}p_{,\sigma}+G_{,q}q_{,\sigma}+G_{,\theta}\theta_{,\boldsymbol{\sigma}}=G_{,\boldsymbol{\sigma}} \tag{15a}$$

因此，式 (14) 变为

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda G_{,\boldsymbol{\sigma}} \tag{15b}$$

这说明在主应力空间和张量空间中的流动法则是等价的.

设屈服条件为

$$F(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=F(p,q,\theta,\boldsymbol{\xi})=0 \tag{16}$$

卸载条件为

$$F<0 \text{ 或 } F=0,\ \mathrm{d}F<0 \tag{17a}$$

加载条件为

$$F=0,\quad \mathrm{d}F=0 \tag{17b}$$

当处于加载时, 塑性因子 $\mathrm{d}\lambda$ 通过下面的一致性条件并结合式 (13) 确定

$$F_{,\sigma}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+F_{,\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=0 \tag{18}$$

1.3 完全隐式的返回映射算法

本构方程积分算法的目的是根据时刻 n 已知的一组 ε_n, $\varepsilon_n^{\mathrm{p}}$, $\boldsymbol{\xi}_n$ 和应变增量 $\Delta\varepsilon$, 计算 $n+1$ 时刻的 ε_{n+1}, $\varepsilon_{n+1}^{\mathrm{p}}$, $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ 并满足加卸载条件，由此给出更新的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. 在完全隐式的向后 Euler 方法中，算法写成

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n+\Delta\varepsilon \tag{19a}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{\mathrm{p}}=\varepsilon_n^{\mathrm{p}}+\Delta\lambda_{n+1}(G_{,\sigma})_{n+1} \tag{19b}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}=\boldsymbol{\xi}_n+\Delta\lambda_{n+1}(G_{,\boldsymbol{\eta}})_{n+1} \tag{19c}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}=\mathbb{C}:(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon^{\rm p}_{n+1}) \tag{19d}$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1},\boldsymbol{\xi}_{n+1})=0 \tag{19e}$$

式中 $\mathbb{C}$ 是弹性张量．上述方程组是非线性的，需要进行迭代求解．在求解前，对上述算法给予解释．使用式 (19d), 并结合 (19a) 和 (19b), 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}&=\mathbb{C}:(\varepsilon_n+\Delta\varepsilon-\varepsilon^{\rm p}_n-\Delta\varepsilon^{\rm p}_{n+1})=\\&\mathbb{C}:(\varepsilon_n-\varepsilon^{\rm p}_n)+\mathbb{C}:\Delta\varepsilon-\mathbb{C}:\Delta\varepsilon^{\rm p}_{n+1}=\\&\boldsymbol{\sigma}_n+\mathbb{C}:\Delta\varepsilon-\mathbb{C}:\Delta\varepsilon^{\rm p}_{n+1}=\boldsymbol{\sigma}^{\rm trail}_{n+1}+\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}\end{aligned} \tag{20}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}^{\rm trail}_{n+1}=\boldsymbol{\sigma}_n+\mathbb{C}:\Delta\varepsilon\\&\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}=-\mathbb{C}:\Delta\varepsilon^{p}_{n+1}=-\Delta\lambda_{n+1}\mathbb{C}:(G_{,\boldsymbol{\sigma}})_{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

前者是弹性预测应力，后者是塑性修正应力．

通常采用 Newton 迭代方法．为适应 Newton 迭代求解，将方程组 (19) 写成

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_\sigma=-\varepsilon^{\rm p}+\varepsilon^{\rm p}_n+\Delta\lambda G_{,\boldsymbol{\sigma}}=0\\&\boldsymbol{R}_\xi=-\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}_n+\Delta\lambda G_{,\boldsymbol{\eta}}=0\\&F=F(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=0\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

注意：为简单起见，所有变量都略去了代表时刻的下角标 $n+1$. 上述方程组线性化后，并考虑到 $\Delta\varepsilon^{p(i)}=\varepsilon^{{\rm p}(i+1)}-\varepsilon^{{\rm p}(i)}=-\mathbb{C}^{-1}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, $\varepsilon^{\rm p}_n$ 保持不变，将给出

$$\boldsymbol{R}^{(i)}_{\sigma}+\mathbb{C}^{-1}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+\Delta\lambda^{(i)}\Delta G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}+\delta\lambda^{(i)}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}=0 \tag{23a}$$

$$\boldsymbol{R}^{(i)}_{\xi}-\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}+\Delta\lambda^{(i)}\Delta G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta}}+\delta\lambda^{(i)}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta}}=0 \tag{23b}$$

$$F^{(i)}+F^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+F^{(i)}_{,\boldsymbol{\xi}}\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}=0 \tag{23c}$$

其中

$$\Delta G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}=G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma\sigma}}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma\xi}}\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)} \tag{24a}$$

$$\Delta G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta}}=G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta\sigma}}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta\xi}}\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)} \tag{24b}$$

将式 (24a) 和式 (24b) 分别代入式 (23a) 和式 (23b) 后，写成矩阵形式，有

$$\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\\\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}\end{Bmatrix}=-\boldsymbol{A}^{(i)}\boldsymbol{R}^{(i)}-\delta\lambda^{(i)}\boldsymbol{A}^{(i)}\nabla G^{(i)} \tag{25}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^{(i)^{-1}}=\begin{bmatrix}\mathbb{C}^{-1}+\Delta\lambda G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma\sigma}} & \Delta\lambda G_{,\boldsymbol{\sigma\xi}}\\\Delta\lambda G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta\sigma}} & -\boldsymbol{I}+\Delta\lambda G_{,\boldsymbol{\eta\xi}}\end{bmatrix}^{(i)}\\&\boldsymbol{R}^{(i)}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{R}^{(i)}_{\boldsymbol{\sigma}}\\\boldsymbol{R}^{(i)}_{\boldsymbol{\xi}}\end{Bmatrix},\quad\nabla G^{(i)}=\begin{Bmatrix}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}\\G^{(i)}_{,\boldsymbol{\xi}}\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

将式 (25) 代入式 (23c), 整理后得

$$\delta\lambda^{(i)}=\frac{F^{(i)}-\nabla F^{(i)}\boldsymbol{A}^{(i)}\boldsymbol{R}^{(i)}}{\nabla F^{(i)}\boldsymbol{A}^{(i)}\nabla G^{(i)}} \tag{27}$$

其中，$\nabla F=[F_{,\boldsymbol{\sigma}}\quad F_{,\boldsymbol{\xi}}]$.

塑性应变、内变量、塑性因子和应力更新为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^{p(i+1)}=\varepsilon^{p(i)}+\Delta\varepsilon^{p(i)}=\varepsilon^{p(i)}-\mathbb{C}^{-1}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\\&\boldsymbol{\xi}^{(i+1)}=\boldsymbol{\xi}^{(i)}+\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}\\&\Delta\lambda^{(i+1)}=\Delta\lambda^{(i)}+\delta\lambda^{(i)}\\&\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}=\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=\mathbb{C}:(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon^{p(i+1)})\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

其中，塑性应变和内变量的初始值取为前一个时间步结束时的收敛值，并将塑性应变增量的初始值置零；应力的初始值则取为弹性预测应力，即 $i=0$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^{p(0)}=\varepsilon^p_n,\quad\boldsymbol{\xi}^{(0)}=\boldsymbol{\xi}_n,\quad\Delta\lambda^{(0)}=0\\&\boldsymbol{\sigma}^{(0)}=\boldsymbol{\sigma}^{\rm trail}_{n+1}=\mathbb{C}:(\varepsilon_{n+1}-\varepsilon^{p(0)})\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

在许多本构模型中，通常假设势函数 G 不取决于内变量，这时，根据式 (23) 和式 (24)，直接求解出

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=-\mathbb{A}^{-1}:\boldsymbol{R}^{(i)}_{\boldsymbol{\sigma}}-\delta\lambda^{(i)}\mathbb{A}^{-1}:G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}} \tag{30a}$$

$$\Delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}=\boldsymbol{R}^{(i)}_{\boldsymbol{\xi}}+\Delta\lambda^{(i)}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta\sigma}}:\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}+\delta\lambda^{(i)}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta}} \tag{30b}$$

式中

$$\mathbb{A}=\mathbb{C}^{-1}+\Delta\lambda G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma\sigma}} \tag{31}$$

将它们一起代入式 (23c), 得

$$\begin{aligned}\delta\lambda^{(i)}=&\Big[F^{(i)}-(F^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}+\Delta\lambda^{(i)}F^{(i)}_{,\boldsymbol{\xi}}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta\sigma}}):\\&\mathbb{A}^{-1}:\boldsymbol{R}^{(i)}_{\boldsymbol{\sigma}}+F^{(i)}_{,\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{R}^{(i)}_{\boldsymbol{\xi}}\Big]\Big/\\&\Big[(F^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}+\Delta\lambda^{(i)}F^{(i)}_{,\boldsymbol{\xi}}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta\sigma}}):\\&\mathbb{A}^{-1}:G^{(i)}_{,\boldsymbol{\sigma}}-F^{(i)}_{,\boldsymbol{\xi}}G^{(i)}_{,\boldsymbol{\eta}}\Big]\end{aligned} \tag{32}$$

上面给出了一个完整的本构方程积分的迭代求解过程，它需要在每一个载荷步的每一次平衡迭代

(整体) 后针对每一个进入屈服的高斯积分点进行. 通常假设势函数 G 不取决于内变量，这时，每一次本构积分的迭代中都需要求式 (31) 定义的四阶张量 $\mathbb{A}^{-1}$, 而且，平衡迭代中的一致性切向刚度矩阵的计算也需要使用该四阶张量的逆 [13], 因此，有效的求逆方法非常重要. 对于势函数仅取决于 J_2 的本构方程, 很容易得到 $\mathbb{A}^{-1}$ 的简单闭合形式 [13,14], 然而, 当势函数还取决于 J_3 时，将得不到其简单闭合形式. 下面详细给出一种有效的求逆方法.

2 应力的各向同性四阶张量值函数的不变性表示与求逆

2.1 四阶张量 $\mathbb{A}$ 及其逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 的不变性表示

根据式 (31)，对于各向同性情况，无论弹性张量和塑性势函数取何具体形式，四阶张量 $\mathbb{A}$ 是应力的各向同性张量值函数，且满足下述对称性

$$\mathbb{A}_{ijkl} = \mathbb{A}_{jikl} = \mathbb{A}_{ijlk} = \mathbb{A}_{klij} \tag{33}$$

由于弹性张量是正定的，势函数是外凸的 (即 $G_{,\sigma\sigma}$ 是正定的), 且塑性因子大于零，因此，$\mathbb{A}$ 是正定的.

使用张量函数表示理论 [10,15], 可知它的不可约张量基共 9 个, 由 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}^2$ 的张量积和直积构成, 分别是 $\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{s}^2+\boldsymbol{s}^2\otimes\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s}^2+\boldsymbol{s}^2\otimes\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}^2\otimes\boldsymbol{s}^2$, $\mathbb{I}$, $\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s}^2+\boldsymbol{s}^2\boxtimes\boldsymbol{i}$, 考虑到式 (5a)，可以使用 $\boldsymbol{t}$ 取代 $\boldsymbol{s}^2$, 因此，它的不变性表示写成

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = {}&\varphi_{11}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \varphi_{12}(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{i}) + \\ &\varphi_{13}(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{i}) + \varphi_{22}\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s} + \\ &\varphi_{23}(\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{s}) + \varphi_{33}\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t} + \varphi_{01}\mathbb{I} + \\ &\frac{3}{2}\varphi_{02}(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{i}) + \frac{3}{2}\varphi_{03}(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\boxtimes\boldsymbol{i})\end{aligned} \tag{34}$$

式中，系数 $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \cdots, \varphi_{33}, \varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}$ 是应力不变量的函数， 3/2 是为了后面讨论问题方便而引入的.

$\mathbb{A}$ 作为应力的各向同性张量值函数，其逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 也应是应力的各向同性函数，且应具有相同的对称性 [8,9,16]. 根据张量函数表示理论 [10,15]，又有

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{-1} = {}&\zeta_{11}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \zeta_{12}(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{i}) + \\ &\zeta_{13}(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{i}) + \zeta_{22}\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s} + \\ &\zeta_{23}(\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{s}) + \zeta_{33}\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t} + \zeta_{01}\mathbb{I} + \\ &\frac{3}{2}\zeta_{02}(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{i}) + \frac{3}{2}\zeta_{03}(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\boxtimes\boldsymbol{i})\end{aligned} \tag{35}$$

同样地，式中系数 $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \cdots, \zeta_{33}, \zeta_{01}, \zeta_{02}, \zeta_{03}$ 是应力不变量的函数.

若已知 $\mathbb{A}$, 即已知其表示式中的 9 个系数，直接使用 $\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{A}=\mathbb{I}$, 并通过一系列张量运算，可求出 $\mathbb{A}^{-1}$ 中的 9 个系数，但运算将非常复杂. 下面通过求四阶张量 $\mathbb{A}$ 及其逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 对基张量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 的变换，导出它们对应的系数矩阵之间的关系.

2.2 $\mathbb{A}$ 及其逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 对基张量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 的变换

首先，运算四阶张量 $\mathbb{A}$ 分别对 3 个基张量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 的变换. 利用基张量之间的正交性，并考虑到 $\boldsymbol{i}$ 的定义式 (4a) 和张量运算符号 “$\boxtimes$” 的定义式 (1)，得

$$\mathbb{A}:\boldsymbol{i} = \varphi_{11}\boldsymbol{i} + \varphi_{12}\boldsymbol{s} + \varphi_{13}\boldsymbol{t} + \varphi_{01}\boldsymbol{i} + \varphi_{02}\boldsymbol{s} + \varphi_{03}\boldsymbol{t} \tag{36a}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}:\boldsymbol{s} = {}&\varphi_{12}\boldsymbol{i} + \varphi_{22}\boldsymbol{s} + \varphi_{23}\boldsymbol{t} + \varphi_{01}\boldsymbol{s} + \\ &\sqrt{3}\varphi_{02}\boldsymbol{s}^2 + \sqrt{3}\varphi_{03}\boldsymbol{s}\boldsymbol{t}\end{aligned} \tag{36b}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}:\boldsymbol{t} = {}&\varphi_{13}\boldsymbol{i} + \varphi_{23}\boldsymbol{s} + \varphi_{33}\boldsymbol{t} + \varphi_{01}\boldsymbol{t} + \\ &\sqrt{3}\varphi_{02}\boldsymbol{s}\boldsymbol{t} + \sqrt{3}\varphi_{03}\boldsymbol{t}^2\end{aligned} \tag{36c}$$

使用 $\boldsymbol{t}$ 的定义式 (5a)，则有

$$\boldsymbol{s}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin 3\theta\boldsymbol{s} + \cos 3\theta\boldsymbol{t}) \tag{37}$$

使用一系列张量运算 (见附录)，有

$$\boldsymbol{s}\boldsymbol{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\cos 3\theta\boldsymbol{s} + \sin 3\theta\boldsymbol{t}) \tag{38a}$$

$$\boldsymbol{t}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin 3\theta\boldsymbol{s} + \cos 3\theta\boldsymbol{t}) \tag{38b}$$

将式 (38) 和 (37) 一起代入式 (36b) 和式 (36c), 整理后得

$$\mathbb{A}:\boldsymbol{s} = (\varphi_{12}+\varphi_{02})\boldsymbol{i} + (\varphi_{22}+\varphi_{01}-\alpha)\boldsymbol{s} + (\varphi_{23}+\beta)\boldsymbol{t} \tag{39a}$$

$$\mathbb{A}:\boldsymbol{t} = (\varphi_{13}+\varphi_{03})\boldsymbol{i} + (\varphi_{23}+\beta)\boldsymbol{s} + (\varphi_{33}+\varphi_{01}+\alpha)\boldsymbol{t} \tag{39b}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{02}\sin 3\theta + \varphi_{03}\cos 3\theta) \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\varphi_{02}\cos 3\theta + \varphi_{03}\sin 3\theta)\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

使用 $\boldsymbol{E}_\sigma$ 表示 3 个基张量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 组成的列阵，即

$$\boldsymbol{E}_\sigma = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{t}\end{Bmatrix} \tag{41}$$

根据式 (36a) 和 (39), $\mathbb{A}$ 对 3 个基张量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 的变换可使用矩阵简记为

$$\mathbb{A}:\boldsymbol{E}_\sigma=[\mathbb{A}]\boldsymbol{E}_\sigma \tag{42}$$

其中，系数矩阵 $[\mathbb{A}]$ 为

$$[\mathbb{A}]=\begin{bmatrix}\varphi_{11}+\varphi_{01} & \varphi_{12}+\varphi_{02} & \varphi_{13}+\varphi_{03}\\ \varphi_{12}+\varphi_{02} & \varphi_{22}+\varphi_{01}-\alpha & \varphi_{23}+\beta\\ \varphi_{13}+\varphi_{03} & \varphi_{23}+\beta & \varphi_{33}+\varphi_{01}+\alpha\end{bmatrix} \tag{43}$$

显然，矩阵 $[\mathbb{A}]$ 是对称的.

采用与导出式 (42) 的相同步骤，同样可得

$$\mathbb{A}^{-1}:\boldsymbol{E}_\sigma=[\mathbb{A}^{-1}]\boldsymbol{E}_\sigma \tag{44}$$

其中 $[\mathbb{A}^{-1}]$ 是 $\mathbb{A}^{-1}$ 对应的系数矩阵，与 $[\mathbb{A}]$ 的形式完全相同，只需要将其中的系数 φ(包括 α,β 表达式中的 φ) 用相应的系数 ζ 替换即可. $[\mathbb{A}^{-1}]$ 也应对称.

由于 $\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{A}=\mathbb{I}$, 再根据四阶单位张量 $\mathbb{I}$ 的性质，显然有

$$\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{A}:\boldsymbol{E}_\sigma=\mathbb{I}:\boldsymbol{E}_\sigma=\boldsymbol{1}\boldsymbol{E}_\sigma \tag{45}$$

式中 [1] 是 3×3 单位矩阵. 使用式 (42) 和 (44)，有

$$\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{A}:\boldsymbol{E}_\sigma=\mathbb{A}^{-1}:[\mathbb{A}]\boldsymbol{E}_\sigma=[\mathbb{A}^{-1}][\mathbb{A}]\boldsymbol{E}_\sigma \tag{46}$$

对照式 (45) 和 (46), 则有

$$[\mathbb{A}^{-1}][\mathbb{A}]=\boldsymbol{1} \tag{47a}$$

$$[\mathbb{A}^{-1}]=[\mathbb{A}]^{-1} \tag{47b}$$

由于 $[\mathbb{A}^{-1}]$ 的对称性，通过式 (47) 只能建立 6 个对应关系，而 $[\mathbb{A}^{-1}]$ 有 9 个待定未知数，因此，不能全部求出，还需要建立其它的关系. 下面通过导出四阶张量 $\mathbb{A}$ 及其逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 对 $\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{n}_3$ 和 $\boldsymbol{n}_3\otimes\boldsymbol{n}_1$ 的变换，来建立这些关系，其中， $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ 是应力的主轴方向.

2.3 $\mathbb{A}$ 及其逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 对张量 $\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{n}_3$ 和 $\boldsymbol{n}_3\otimes\boldsymbol{n}_1$ 的变换

设 $\boldsymbol{s}$ 与其主轴方向 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ 相对应的主值分别是 s_1, s_2, s_3, 于是

$$\boldsymbol{s}=s_1\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_1+s_2\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{n}_2+s_3\boldsymbol{n}_3\otimes\boldsymbol{n}_3 \tag{48}$$

使用偏应力主值的特征方程，并考虑到 $\boldsymbol{s}$ 的定义式 (4b), 则

$$\left.\begin{aligned}&s_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right),\quad s_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\\&s_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

考虑到 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 共主轴，且在偏应力平面上它与 $\boldsymbol{s}$ 的 Lode 角相差 $\pi/2$, 因此有

$$\boldsymbol{t}=t_1\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_1+t_2\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{n}_2+t_3\boldsymbol{n}_3\otimes\boldsymbol{n}_3 \tag{50}$$

其中， $\boldsymbol{t}$ 的 3 个主值为

$$\left.\begin{aligned}&t_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right),\quad t_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta\\&t_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

将 $\mathbb{A}$ 双点积 $\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2$ ，由于 $\boldsymbol{i}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{t}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=0$, 且

$$(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{i}):\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(s_2+s_1)\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2 \tag{52a}$$

$$(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{t}+\boldsymbol{t}\boxtimes\boldsymbol{i}):\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(t_2+t_1)\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2 \tag{52b}$$

利用这些结果，很容易得到

$$\mathbb{A}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\left(\varphi_{01}-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_{02}s_3-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_{03}t_3\right)\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2 \tag{53a}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{A}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=&\left(\zeta_{01}-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{02}s_3-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{03}t_3\right)\cdot\\&\left(\varphi_{01}-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_{02}s_3-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_{03}t_3\right)\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2\end{aligned} \tag{53b}$$

考虑到 $\mathbb{A}^{-1}:\mathbb{A}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\mathbb{I}:\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2$, 将式 (53b) 与之对照，得该式右边项的系数应等于 1. 采用同样的方法，可得另外两个相似的等式，将它们统一地写成

$$\zeta_{01}-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{02}s_i-\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{03}t_i=a_i\quad(i=1,2,3) \tag{54}$$

其中

$$\frac{1}{a_i}=\varphi_{01}-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_{02}s_i-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_{03}t_i\quad(i=1,2,3) \tag{55}$$

进一步表示成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & s_1 & t_1\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & s_2 & t_2\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & s_3 & t_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sqrt{3}\zeta_{01}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{02}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_{03}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix} \tag{56}$$

从上面的分析中可知，在建立系数之间的关系时，并不需要具体知道应力的主方向 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$.

2.4 求解 $\mathbb{A}^{-1}$ 对应的系数矩阵

在已知 $\mathbb{A}$ 对应系数矩阵 $[\mathbb{A}]$ 的各元素 (由弹性张量和塑性势函数根据式 (31) 给出，见下一小节) 后，结合式 (56) 和 (47)，就可以求得 $\mathbb{A}^{-1}$ 对应的系数矩阵 $[\mathbb{A}^{-1}]$ 的各元素.

方程式 (56) 中系数矩阵的各列元素所代表的矢量就是主应力空间中的 3 个正交单位矢量 $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_t$, 因此, 系数矩阵是正交的, 它的逆就等于它的转置, 有

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{01} &= \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\\ \zeta_{02} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}(s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3)\\ \zeta_{03} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3)\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

考虑 $\mathbb{A}^{-1}$ 对应的矩阵 $[\mathbb{A}^{-1}]$ 与 $\mathbb{A}$ 对应的矩阵 $[\mathbb{A}]$ 具有相同形式 (式 (43))，使用式 (47)，得

$$\begin{bmatrix}\zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13}\\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & \zeta_{23}\\ \zeta_{13} & \zeta_{23} & \zeta_{33}\end{bmatrix} = [\mathbb{A}]^{-1} - \begin{bmatrix}\zeta_{01} & \zeta_{02} & \zeta_{03}\\ \zeta_{02} & \zeta_{01}-\bar{\alpha} & \bar{\beta}\\ \zeta_{03} & \bar{\beta} & \zeta_{01}+\bar{\alpha}\end{bmatrix}\tag{58}$$

因此，为了求得 $\mathbb{A}$ 的逆 $\mathbb{A}^{-1}$, 我们仅仅需要求 $\mathbb{A}$ 所对应的 3×3 矩阵 $[\mathbb{A}]$ 的逆，即计算 $[\mathbb{A}]^{-1}$，问题得到极大地简化.

2.5 $\mathbb{A}$ 对应的系数矩阵中各元素的表达式

为了导出 $\mathbb{A}$ 对应的系数矩阵中各元素的表达式，需要求势函数对应力的两次偏导数，并使用基张量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 给出. 势函数对应力张量的一次偏导数见式 (15a)，利用该式，对应力张量再次求偏导，得

$$\begin{aligned}G_{,\boldsymbol{\sigma\sigma}} = {}& \boldsymbol{i}\otimes\Big(G_{,pp}\boldsymbol{i} + G_{,pq}\boldsymbol{s} + \frac{1}{q}G_{,p\theta}\boldsymbol{t}\Big) + \\ & \boldsymbol{s}\otimes\Big(G_{,qp}\boldsymbol{i} + G_{,qq}\boldsymbol{s} + \frac{1}{q}G_{,q\theta}\boldsymbol{t}\Big) + \\ & \frac{1}{q}\boldsymbol{t}\otimes\Big(G_{,\theta p}\boldsymbol{i} + G_{,\theta q}\boldsymbol{s} + \frac{1}{q}G_{,\theta\theta}\boldsymbol{t}\Big) + \\ & G_{,q}\boldsymbol{s}_{,\boldsymbol{\sigma}} + \frac{G_{,\theta}}{q}\boldsymbol{t}_{,\sigma} - \frac{G_{,\theta}}{q^2}\boldsymbol{t}\otimes q_{,\boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}\tag{59}$$

其中， $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 两个基张量的偏导数为 (导出过程见附录)

$$\boldsymbol{s}_{,\sigma} = -\frac{1}{q}\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s} + \frac{1}{q}(\mathbb{I} - \boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})\tag{60}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_{,\sigma} = {}& \frac{1}{q}\tan 3\theta\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{q\cos 3\theta}(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{i}) - \\ & \frac{1}{q}\tan 3\theta\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s} - \frac{1}{q}(3\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{t} + 2\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{s}) + \\ & \frac{3}{q}\tan 3\theta\boldsymbol{t}\otimes\boldsymbol{t} - \frac{1}{q}\tan 3\theta\mathbb{I} - \\ & \frac{3\sqrt{2}}{q\cos 3\theta}(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{i})\end{aligned}\tag{61}$$

若采用各向同性线弹性本构方程，则弹性张量的逆可写成

$$\mathbb{C}^{-1} = -\frac{3\nu}{E}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} + \frac{1+\nu}{E}\mathbb{I}\tag{62}$$

将式 (61) 和 (60) 代入式 (59)，将所得结果再与式 (62) 一起代入式 (31)，并与式 (34) 对照，得

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11} &= -\frac{3\nu}{E} + \Delta\lambda\Big(G_{,pp} - \frac{G_{,q}}{q} + \frac{G_{,\theta}}{q^2}\tan 3\theta\Big)\\ \varphi_{12} &= \Delta\lambda\Big(G_{,pq} + \frac{2\sqrt{2}G_{,\theta}}{q^2\cos 3\theta}\Big), \quad \varphi_{13} = \Delta\lambda\frac{G_{,p\theta}}{q}\\ \varphi_{22} &= \Delta\lambda\Big(G_{,qq} - \frac{G_{,q}}{q} - \frac{G_{,\theta}}{q^2}\tan 3\theta\Big)\\ \varphi_{23} &= \Delta\lambda\Big(\frac{G_{,q\theta}}{q} - \frac{3G_{,\theta}}{q^2}\Big)\\ \varphi_{33} &= \frac{\Delta\lambda}{q^2}(G_{,\theta\theta} + 3G_{,\theta}\tan 3\theta)\\ \varphi_{01} &= \frac{1+\nu}{E} + \Delta\lambda\Big(\frac{G_{,q}}{q} - \frac{G_{,\theta}}{q^2}\tan 3\theta\Big)\\ \varphi_{02} &= -\Delta\lambda\frac{2\sqrt{2}G_{,\theta}}{q^2\cos 3\theta}, \quad \varphi_{03} = 0\end{aligned}\right\}\tag{63}$$

当势函数不取决于 J_3 即 Lode 角 θ 时，则 $\varphi_{i3} = 0$ $(i = 1,2,3)$, $\varphi_{02} = 0$, 对照式 (43)， $[\mathbb{A}]$ 退化为 2×2 矩阵，求逆问题将变得非常容易；当势函数只取决于 J_2 时，将有 $\varphi_{12} = 0$, 则它退化为 2×2 的对角矩阵，这时，可求得逆的简单闭合形式.

3 在完全隐式的返回映射算法中的应用

在完全隐式的返回映射算法中，如从式 (28) 和式 (32), 仅涉及到四阶张量 $\mathbb{A}$ 的逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 对 $\boldsymbol{R}_\sigma$ 和 $G_{,\sigma}$ 两个二阶张量的变换，可以表明，这两个二阶张量是应力的各向同性函数. 下面利用前两节的结果给出逆张量 $\mathbb{A}^{-1}$ 对任意应力的各向同性二阶张量值函数的变换，并使用相应的矩阵表示.

根据张量函数表示理论 [10]，应力的各向同性二阶张量值函数一般表示式为

$$\boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{s}+b_3\boldsymbol{t}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_\sigma \tag{64}$$

其中 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=\{b_1\quad b_2\quad b_3\}$. 设 $\mathbb{A}^{-1}$ 对 $\boldsymbol{B}$ 变换所得张量为 $\boldsymbol{C}$, 它仍然是应力的各向同性函数，且与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的表达形式. 对照式 (64), 其表示式为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_\sigma$, 其中 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\{c_1\quad c_2\quad c_3\}$, 使用式 (44), 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}=\mathbb{A}^{-1}:\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}:\boldsymbol{E}_\sigma=\\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}[\mathbb{A}^{-1}]\boldsymbol{E}_\sigma=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_\sigma\end{aligned} \tag{65}$$

考虑到矩阵 $[\mathbb{A}^{-1}]$ 的对称性以及式 (47b), 得

$$\boldsymbol{c}=[\mathbb{A}^{-1}]\boldsymbol{b}=[\mathbb{A}]^{-1}\boldsymbol{b} \tag{66}$$

上式表明：四阶张量 $\mathbb{A}^{-1}$ 对二阶张量的变换等价于 3×3 矩阵对 3×1 列阵的变换，而这个 3×3 矩阵就是四阶张量 $\mathbb{A}$ 对应的系数矩阵的逆，即 $[\mathbb{A}]^{-1}$. 所以，从本构方程积分的角度来说，并不需要求出 $\mathbb{A}^{-1}$ 对应的系数矩阵 $[\mathbb{A}^{-1}]$, 也就是说， 2.3 节和 2.4 节的工作都可以略去，仅需要利用 2.5 节的结果，得到矩阵 $[\mathbb{A}]$ 的各元素，然后求该矩阵的逆即可. 从空间的维数上来说，四阶张量 $\mathbb{A}^{-1}$ 对二阶张量的变换又可看作二阶张量对矢量的变换，从而使得分析问题的维数大大降低.

下面将表明：由于 $\mathbb{A}$ 是正定的，它对应的系数矩阵 $[\mathbb{A}]$ 也是正定的. 任意一个对称的二阶张量均可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}=h_{11}\boldsymbol{i}+h_{22}\boldsymbol{s}+h_{33}\boldsymbol{t}+h_{12}\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2+\\ h_{23}\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{n}_3+h_{31}\boldsymbol{n}_3\otimes\boldsymbol{n}_1\end{aligned} \tag{67}$$

根据式 (42) 和 (53)，则有

$$\begin{aligned}\mathbb{A}:\boldsymbol{H}=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}[\mathbb{A}]\{\boldsymbol{E}_\sigma\}+\frac{h_{12}}{a_3}\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{n}_2+\\ \frac{h_{23}}{a_1}\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{n}_3+\frac{h_{31}}{a_2}\boldsymbol{n}_3\otimes\boldsymbol{n}_1\end{aligned} \tag{68}$$

其中 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}=\{h_{11}\quad h_{22}\quad h_{33}\}$. 利用张量之间的正交性，并考虑到 $\mathbb{A}$ 是正定性，有

$$\boldsymbol{H}:\mathbb{A}:\boldsymbol{H}=\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}[\mathbb{A}]\boldsymbol{h}+\frac{h_{12}^2}{a_3}+\frac{h_{23}^2}{a_1}+\frac{h_{31}^2}{a_2}>0 \tag{69}$$

上式就要求对应的矩阵 $[\mathbb{A}]$ 是正定的，而且，a_1, a_2, a_3 均大于零.

需要强调指出: 在本构方程积分的迭代过程中，应力在不断更新，四阶张量 $\mathbb{A}$ 和逆 $\mathbb{A}^{-1}$ 以及二阶张量 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $G_{,\boldsymbol{\sigma}}$ 的 3 个基张量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ 也应随之更新. 若当前应力已求出，为

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=\sigma_i\boldsymbol{i}^{(0)}+\sigma_s\boldsymbol{s}^{(0)}+\sigma_t\boldsymbol{t}^{(0)}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_\sigma^{(0)} \tag{70}$$

则基张量更新为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{i}^{(i)}=\boldsymbol{i}^{(0)},\quad \boldsymbol{s}^{(i)}=\tilde{\sigma}_s\boldsymbol{s}^{(0)}+\tilde{\sigma}_t\boldsymbol{t}^{(0)}\\ &\boldsymbol{t}^{(i)}=-\tilde{\sigma}_t\boldsymbol{s}^{(0)}+\tilde{\sigma}_s\boldsymbol{t}^{(0)}\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

其中

$$\tilde{\sigma}_s=\frac{\sigma_s}{q^{(i)}},\quad \tilde{\sigma}_t=\frac{\sigma_t}{q^{(i)}},\quad q^{(i)}=\sqrt{\sigma_s^2+\sigma_t^2} \tag{72}$$

根据式 (22), $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}$ 可表示为

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}=R_i\boldsymbol{i}^{(i)}+R_s\boldsymbol{s}^{(i)}+R_t\boldsymbol{t}^{(i)}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)} \tag{73}$$

使用式 (44), 并考虑到式 (73) 和 (15a), $\mathbb{A}^{-1}$ 对 $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $G_{,\boldsymbol{\sigma}}$ 的变换将表示成

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{A}^{-1}:\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}[\mathbb{A}]^{-1}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}\\ &\mathbb{A}^{-1}:\boldsymbol{G}_{,\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{G}_{,\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{T}}[\mathbb{A}]^{-1}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{,\boldsymbol{\sigma}}{}^{\mathrm{T}}=\{G_{,p}\quad G_{,q}\quad \dfrac{1}{q}G_{,\theta}\}$. 将上面的结果代入式 (30a)，得应力增量为

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=\Delta\tilde{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)} \tag{75}$$

其中

$$\{\Delta\tilde{\sigma}\}=-[\mathbb{A}]^{-1}\boldsymbol{R}-\delta\lambda[\mathbb{A}]^{-1}\boldsymbol{G}_{,\boldsymbol{\sigma}} \tag{76}$$

为了将式 (75) 与 (70) 相加更新应力，还需要将式 (76) 中的基张量用初始基张量表示，利用式 (71), 得

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}=\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} \tag{77}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}=\{\Delta\sigma_i\quad \tilde{\sigma}_s\Delta\sigma_s+\tilde{\sigma}_t\Delta\sigma_t\quad -\tilde{\sigma}_t\Delta\sigma_s+\tilde{\sigma}_s\Delta\sigma_t\}^{\mathrm{T}} \tag{78}$$

参数 $\delta\lambda$ 的计算，内变量和塑性应变等的更新都可以采用与上面相似的方法，因此，整个计算均在三维空间中进行，使得问题大大地简化. 一旦应力和塑性应变张量等对应的列阵得到，使用初始基张量很容易得到它们在整体坐标系中的分量，不需要像现有主应力空间中的本构方程积分方法 [6,17,18] 那

样进行从主应力空间到问题整体坐标系的变换，事先也不需要知道主轴方向.

4 结 论

关于本构方程积分的返回映射算法中应力的四阶张量值函数的求逆以及逆张量对二阶张量的变换等，本文针对各向同性材料，建立了一套有效的运算方法. 其中关键在于构造一个应力的各向同性二阶张量值函数，它与二阶单位张量和偏应力张量分别正交，且共主轴，在归一化后，三者形成一组正交归一化且共轴的基张量，本构方程和积分算法中所涉及到的应力的二阶、四阶张量值函数及其逆都由这组基所表示.

通过导出四阶张量和它的逆张量对 3 个基张量及其它特征张量的变换，本文表明：四阶张量的逆所对应的 3×3 系数矩阵就等于四阶张量对应的 3×3 系数矩阵的逆；四阶张量对一个二阶张量的变换等于其对应的 3×3 系数矩阵对 3×1 列阵的变换，即可等价地看作一个二阶张量对矢量的变换. 当这些变换关系应用到本构方程积分的迭代格式中，所有的运算只需要在三维空间中进行，其中，应力和塑性应变以及它们的增量等均以列阵对应，在通过迭代更新后，使用基张量的初始分量很容易得到它们在整体坐标系中的分量，不需要像现有主应力空间中的本构积分方法那样进行从主应力空间到问题整体坐标系的变换，事先也不需要知道主轴方向. 因此，算法的效率将较大地改善.

参 考 文 献

1 Krieg RD, Krieg DB. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 1977, 99: 510～515

2 Crisfield MA. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol.2: Advanced Topics, New York: John Wiley Sons & Ltd, 1997

3 Auricchio F, Taylor RL. A return map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformations regimes. *International Journal of Plasticity*, 1999, 15: 1359～1378

4 Asensi G, Moreno C. Linearization and return mapping algorithms for elastoplasticity models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57: 991～1014

5 Foster CD, Regueiro RA, Fossum AF, et al. Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 5109～5138

6 Clausen J, Damkilde L, Andersen L. An efficient return algorithm for non-associated plasticity with linear yield criteria in principal stress space. *Computers and Structures*, 2007, 85: 1795～1807

7 Wang ZQ, Dui GS. Two-point constitutive equations and integration algorithms for isotropic-hardening rate-independent elastoplastic materials in large deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 75(12): 1435～1456

8 Palazzo V, Rosati L, Valoroso N. Solution procedures for J_3 plasticity and viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191: 903～939

9 Rosati L, Valoroso N. A return map algorithm for general isotropic elasto/visco- plastic materials in principal space. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60: 461～498

10 郑泉水. 张量函数的表示理论 —— 本构方程统一不变性研究. 力学进展，1996, 26(1,2): 114～137 (Zheng Quanshui. Theory of representation for tensor functions: A unified invariant approach to constitutive equations. *Applied Mechanics Review*, 1994, 47: 545～587)

11 陈明祥. 各向同性率无关材料本构关系的不变性表示. 力学学报，2008, 40(5): 629～635(Chen Mingxiang. Invariant tensor function representations of constitutive equations for the isotropic and rate independent materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40 (5): 629～635(in Chinese))

12 陈明祥. 使用主值空间表示的各向同性塑性本构方程. 固体力学学报，2009, 30(4): 346～353 (Chen Mingxiang. The general formulation of the isotropic constitutive equations in principal space. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2009, 30(4): 346～353 (in Chinese))

13 Simo JC, Taylor RL. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, 48: 101～118

14 Belytschko T, Liu WK, Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. New York: John Wiley Sons & Ltd, 2000

15 Zheng QS, Betten J. On the tensor function representations of 2nd-order and 4th-order tensors. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1995, 75: 269～281

16 Rosati L. A novel approach to the solution for the tensor equation AX+XA=H. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37: 3457～3477

17 Larsson R, Runesson K. Implicit integration and consistent linearization for yield criteria of the Mohr-Coulomb type. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1996, 1: 367～383

18 Perić D, Souza Neto E. A new computational model for tresca plasticity at finite strains with an optimal parametrization in the principal space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 171: 463～489

(责任编辑：刘希国)

附　录

对式 (5a) 两边前乘张量 $\boldsymbol{s}$, 得

$$\boldsymbol{st}=\frac{1}{\cos 3\theta}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{s}-\sin 3\theta\boldsymbol{s}^2-\sqrt{6}\boldsymbol{s}^3\right) \tag{A1}$$

根据 Hamilton-Cayley 定理，偏应力张量的幂指数函数应满足

$$\boldsymbol{S}^3-\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^2)\boldsymbol{S}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^3)\boldsymbol{I}=0 \tag{A2}$$

使用 Lode 角的定义式 (2), 得

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^3=-\frac{1}{\sqrt{6}}q^3\sin 3\theta \tag{A3}$$

将式 (A2) 两边同除 q^3, 并将式 (A3) 代入，得

$$\boldsymbol{s}^3=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sin 3\theta\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{s} \tag{A4}$$

将上式代入式 (A1), 得 $\boldsymbol{st}$ 的最终表达式 (38a).

将式 (38a) 两边前乘 $\boldsymbol{s}$, 而式 (37) 两边后乘 $\boldsymbol{t}$, 两式右边应相等，则有

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{t}-\frac{1}{\sqrt{6}}(\sin 3\theta\boldsymbol{st}+\cos 3\theta\boldsymbol{t}^2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\cos 3\theta\boldsymbol{s}^2+\sin 3\theta\boldsymbol{st}) \tag{A5}$$

整理得

$$\cos 3\theta\boldsymbol{t}^2=\frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{t}-2\sin 3\theta\boldsymbol{st}+\cos 3\theta\boldsymbol{s}^2 \tag{A6}$$

在上式中代入 $\boldsymbol{st}$ 和 $\boldsymbol{s}^2$ 的表达式 (38a) 和 (37), 最终得到 $\boldsymbol{t}^2$ 的表达式 (38b).

使用 $\boldsymbol{s}$ 的定义式 (4b), 相对应力张量求偏导，得

$$\boldsymbol{s}_{,\boldsymbol{\sigma}}=\left(\frac{1}{q}\boldsymbol{S}\right)_{,\boldsymbol{\sigma}}=-\frac{1}{q^2}\boldsymbol{S}\otimes q_{,\boldsymbol{\sigma}}+\frac{1}{q}\boldsymbol{S}_{,\boldsymbol{\sigma}} \tag{A7}$$

偏应力对应力的偏导可写成

$$\boldsymbol{S}_{,\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{I}\boxtimes\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} \tag{A8}$$

将式 (A8) 代入式 (A7), 考虑到 $\boldsymbol{I}\boxtimes\boldsymbol{I}$ 是对称的四阶单位张量，以及式 (6b), 则得式 (60).

使用式 (3), 求张量 $\boldsymbol{t}$ 相对应力张量的偏导，得

$$\boldsymbol{t}_{,\boldsymbol{\sigma}}=\frac{3\sin 3\theta}{\cos 3\theta}\boldsymbol{t}\otimes\theta_{,\boldsymbol{\sigma}}+\frac{1}{\cos 3\theta}\cdot(-\sin 3\theta\boldsymbol{s}_{,\boldsymbol{\sigma}}-3\cos 3\theta\boldsymbol{s}\otimes\theta_{,\boldsymbol{\sigma}}-\sqrt{6}(\boldsymbol{s}^2)_{,\boldsymbol{\sigma}}) \tag{A9}$$

求张量 $\boldsymbol{s}^2$ 相对应力张量的偏导时，考虑到式 (60), 得

$$(\boldsymbol{s}^2)_{,\boldsymbol{\sigma}}=(\boldsymbol{I}\boxtimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{I}):\boldsymbol{s}_{,\boldsymbol{\sigma}}=-\frac{2}{q}\boldsymbol{s}^2\otimes\boldsymbol{s}+\frac{\sqrt{3}}{q}(\boldsymbol{i}\boxtimes\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\boxtimes\boldsymbol{i})-\frac{2}{\sqrt{3}q}\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{i} \tag{A10}$$

将式 (A10) 代入式 (A9), 并使用式 (37) 和 (60), 得式 (61).

ON THE FOURTH ORDER TENSOR VALUED FUNCTION OF THE STRESS IN RETURN MAP ALGORITHM

Chen Mingxiang[1)]

(*Civil Engineering School of Wuhan University, Wuhan* 430072, *China*)

Abstract The inversion of a fourth order tensor valued function of the stress and its transformation to the second order tensor are required in the return map algorithm for implicit integration of the constitutive equation. Based on a set of the base tensors which are mutually orthogonal, this paper presents an effective methodology to perform those tensor operations for the isotropic constitutive equations. In the scheme, two of the base tensors are the second order identity tensor and the deviatoric stress tensor, respectively. Another base tensor is constructed using an isotropic second order tensor valued function of the stress. The three base tensors are coaxial. By making use of the representation theorem for isotropic tensorial functions, all the second order, the fourth order tensor valued functions of the stress involved can be represented in terms of the base tensors. It shows that the operations between the tensors are specified by the simple relations between the corresponding matrices. The inversion of a fourth order tensor is reduced to the inversion of corresponding 3×3 matrix, and its transformation to the second tensor is equivalent to transformation of 3×3 matrix to 3×1 column matrix. Finally, some discussions are given to the application of those transformation relationships to the iteration algorithm for the integration of the constitutive equations.

Key words integration of the constitutive equations, stress update, return map algorithm, isotropy, representation theorem

Received 8 January 2009, revised 5 August 2009.

1) E-mail: mxchen@whu.edu.cn