

软化材料厚壁筒的解析解及其稳定性分析

殷有泉* 陈朝伟^{†,1)}

*(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

[†](中国石油集团钻井工程技术研究院, 北京 100195)

摘要 将弹塑性材料的应力应变全过程曲线简化为三线性模型(弹性-线性软化-残余理想塑性), 并假设材料服从 Tresca 屈服准则和关联流动法则, 推导出受内压厚壁筒的解析解. 在这个解析解的基础上, 讨论了厚壁筒的平衡稳定性问题, 内压达到临界载荷时, 厚壁筒丧失稳定性, 其临界载荷就是软化塑性材料厚壁筒的承载能力.

关键词 厚壁筒, Tresca 屈服准则, 应变软化, 临界载荷, 平衡稳定性

中图分类号: O344.7 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)01-0056-09

引 言

受内压厚壁筒是工程中常见的结构物, 也是塑性力学教材中的典型例题.

理想弹塑性材料厚壁筒的解析解在通常的塑性力学教材^[1,2]中都有详尽的介绍. 由于材料是理想塑性的, 在塑性区内屈服应力 σ_s 保持常数, 可由屈服准则和平衡方程直接求得应力解的表达式, 因而应力求解是一静定问题. 然后再根据塑性不可压缩条件由应力场求得位移场.

然而软化塑性材料厚壁筒求解的困难要大得多, 主要原因是在软化塑性区各点的屈服应力 σ_s 是不同的, 而且事先是未知的. 这样, 应力求解不再是静定问题. 在文献[2]中为了简化求解, 事先假设了软化区的强度参数(例如黏聚力 c) 是坐标 r 的线性函数, 静定地求解出应力场. 然而由于采用 Coulomb 屈服准则, 塑性体应变不再为零, 难于从应力场求得位移场. 本文使用 Tresca 屈服准则和关联流动法则, 对软化塑性区的屈服应力不做事先假设, 求得了软化材料厚壁筒的应力和位移的解析表达式.

理想弹塑性材料受内压厚壁筒的极限载荷或承载能力是当塑性区贯穿整个筒壁时得到的. 而软化弹塑性材料厚壁筒在塑性区贯穿筒壁之前就丧失稳定性, 失稳时的临界载荷为厚壁筒的承载能力. 因而软化塑性和理想塑性厚壁筒的破坏失效形式有不同的力学含义, 前者属于失稳破坏, 后者属于强度

破坏.

国内外许多学者很早就注意到, 软化塑性材料的结构破坏失效是一种稳定性问题. Dems 等^[3]将软化塑性结构称为脆塑性结构, 将结构内弹性区和塑性区(损伤区)的界面称为损伤面, 用敏感度分析和优化设计方法研究了损伤面传播的稳定性条件. 他们还举例研究了弹脆性材料(拉伸应力跌落模型)厚壁筒的稳定性. 刘文政等^[4]用损伤面扰动方法给出了厚壁筒的稳定性判据, 计算出 Tresca 型线性软化厚壁筒在内压作用下的极限载荷. 李朝弟等^[5]使用 Coulomb 屈服准则, 考虑了损伤后屈服面的收缩(软化), 对厚壁筒的极限承载能力进行了分析. 以上文献主要关注的是随厚壁筒软化塑性区扩展内压变化的规律, 称之为厚壁筒承载能力降低的特性. 内压与塑性区尺度的曲线不是平衡路径曲线, 不能论证曲线上的峰值压力就是稳定性意义下的临界载荷.

根据一般稳定性理论, 可将厚壁筒看作一个系统, 设内壁压力 p 是广义力为控制变量, 内壁位移 u 是广义位移为状态变量, 每一对 p 和 u 构成系统的一个平衡状态. p - u 曲线称为平衡路径, 其上每一个点对应于一个平衡状态. 平衡路径曲线的斜率 $K = \delta p / \delta u$ 可视为厚壁筒的切线刚度的一种度量. 曲线上的极值点将曲线分为两支, 极值点前的分支为稳定的分支(刚度为正), 极值点后的分支为不稳定的分支(刚度为负). 当内压达到极值点后, 位移迅速增大, 系统丧失稳定性(极值点型失稳). 由于本

2008-07-17 收到第 1 稿, 2009-05-27 收到修改稿.

1) E-mail: Chenzwdri@cnpc.com.cn

文给出了软化塑性材料厚壁筒的应力和位移的解析解，容易得到厚壁筒的平衡路径曲线，从而严谨地讨论了厚壁筒的稳定性问题。

1 软化弹塑性受内压厚壁筒的解析解

设厚壁筒的内半径为 a ，外半径为 b ，在内壁受均布压力 p 的作用，如图 1，载荷从零逐渐增大。一般可简化为平面应变问题。采用柱坐标 (r, θ, z) ，非零位移分量为 u ，非零应变分量为 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ ，非零应力分量为 σ_r, σ_θ 和 σ_z ，它们都只是半径 r 的函数。应力分量满足平衡方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

位移和应变分量满足几何关系

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2)$$

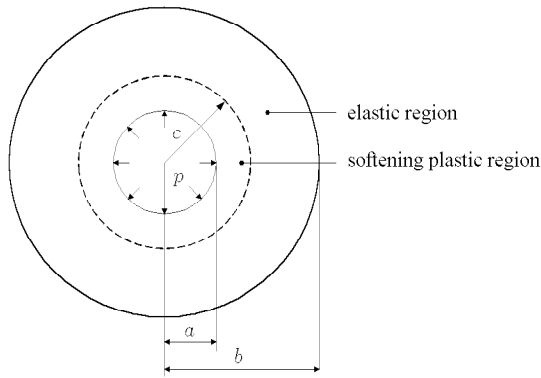


图 1 受内压作用的厚壁筒

Fig.1 Thick-walled cylinder subjected to internal pressure

相应的边界条件

$$\sigma_r = \begin{cases} -p, & r = a \\ 0, & r = b \end{cases} \quad (3)$$

将材料的全应力应变曲线简化为三线性模型，如图 2 所示。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon, & \varepsilon &\leq \varepsilon_s \\ \sigma_s - \sigma &= -E_t(\varepsilon_s - \varepsilon), & \varepsilon_s &\leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma &= \sigma_0 = m_0\sigma_s, & \varepsilon &\geq \varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

变形开始时，满足线弹性关系。当应力达到峰值 σ_s 后，曲线呈线性下降。下降段的切线模量 $E_T = d\sigma/d\varepsilon$ 或 $G_T = d\tau/d\gamma$ 为负值。将 E_T 和 G_T 的数值

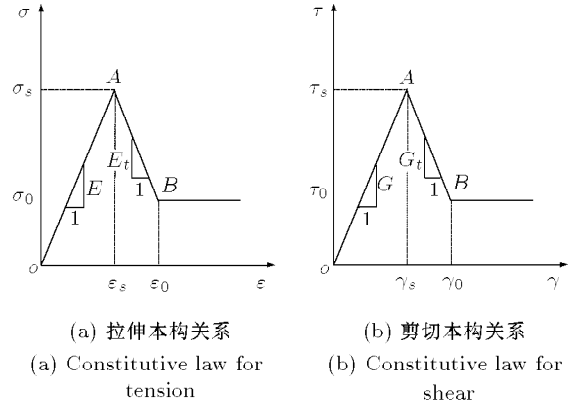


图 2 三线性模型

Fig.2 Three-line model

$E_t = |E_T|$ 和 $G_t = |G_T|$ 称为坡度，在变形达到 ε_0 或 γ_0 后，曲线又呈水平走向，其幅值 σ_0 或 τ_0 为残余屈服应力。当 $E_t = 0$ 或 $G_t = 0$ 时三线性模型退化为理想弹塑性模型。

1.1 弹性阶段解

应用著名的 Lamé 公式，可以得到弹性阶段的应力分量^[6]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p \leq 0 \\ \sigma_\theta &= \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

和位移分量

$$u = \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \left[(1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] p \quad (6)$$

可以论证，当 $0 \leq \sigma_z \leq 2a^2p/(b^2 - a^2)$ 或 $0 \leq T \leq 2\pi a^2p$ (其中 T 是厚壁筒的轴向力) 时， σ_z 将是中间主应力。这时 Tresca 屈服准则为

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s \quad (7)$$

将式 (5) 代入式 (7) 得

$$\frac{2a^2}{b^2 - a^2} p = \sigma_s$$

从而可求得内壁首先进入塑性状态时的内压 p 值

$$p = p_e = \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (8)$$

p_e 称为弹性极限压力或弹性极限载荷。

1.2 塑性阶段解

当内压达到弹性极限压力后，随着变形进一步发展，靠近内壁出现一个塑性区，而在塑性区之外则

是弹性区. 弹性区和塑性区的交界用 $r = c$ 表示, 由于这里的材料处于软化塑性阶段, 图 2 的 AB 段, 塑性区称为软化塑性区. 随着软化塑性区不断扩展, 以至其内边界处的屈服应力达到残余屈服应力 σ_0 . 为了叙述方便, 将仅有软化塑性区的情况称为塑性变形发展的第 1 阶段. 将出现残余理想塑性区之后称为塑性变形发展的第 2 阶段.

现在讨论厚壁筒在塑性变形第 1 阶段的解析解.

(1) 考虑弹性区 ($c \leq r \leq b$). 如果将内层塑性区对外层弹性区的压应力 $\sigma_r(c)$ (简记为 p_c) 看作是作用于内半径为 c , 外半径为 b 的弹性圆筒上的内壁压力, 则可将式 (5) 和式 (6) 中的 a 改为 c , p 改为 p_c 即可得到相应的解. 实际上, 在 p_c 作用下外层弹性筒的内边界 $r = c$ 处可认为就是弹性极限压力, 利用式 (8), 将式中 a 改写为 c , 即得该压力

$$p_c = \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right)$$

得到弹性区 ($c \leq r \leq a$) 的应力和位移表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_s c^2}{2b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_s c^2}{2b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\ u &= \frac{(1+\nu)\sigma_s}{2E} \left(\frac{c^2}{b^2} \right) \left[(1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(2) 考虑塑性区 ($a \leq r \leq c$). 在软化塑性区内屈服应力随坐标 r 的变化规律事先未知, 将屈服应力看作 r 的一个函数

$$\sigma_s(r) = f(r)\sigma_s \quad (10)$$

其中, $f(r)$ 待定. $r = c$, 则 $f(c) = 1$; $r = a$ 时, $f(a) = m$, 其中 $m_0 \leq m \leq 1$. 这时软化塑性区内 Tresca 屈服准则可表示为

$$\sigma_\theta - \sigma_r = f(r)\sigma_s \quad (11)$$

将上式代入平衡方程 (1) 得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{f(r)}{r}\sigma_s$$

利用厚壁筒内壁 ($r = a$) 的边界条件 $\sigma_r(a) = -p$, 对上式积分得

$$\sigma_r(r) = \sigma_s \int_a^r \frac{f(r)}{r} dr - p \quad (12)$$

再由式 (11) 得

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_s \left[\int_a^r \frac{f(r)}{r} dr + f(r) \right] - p \quad (13)$$

在 $r = c$ 两侧的应力 $\sigma_r(c^+)$ 和 $\sigma_r(c^-)$ 可分别用式 (9) 和式 (12) 给出

$$\begin{aligned} \sigma_r(c^+) &= \frac{\sigma_s c^2}{2b^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) = \frac{\sigma_s}{2} \left(\frac{c^2 - b^2}{b^2} \right) \\ \sigma_r(c^-) &= \sigma_s \int_a^c \frac{f(r)}{r} dr - p \end{aligned}$$

由径向应力分量的连续条件 $\sigma_r(c^+) = \sigma_r(c^-)$, 可得

$$p = \frac{\sigma_s}{2} \left(2 \int_a^c \frac{f(r)}{r} dr + 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (14)$$

下面讨论软化塑性区 ($a \leq r \leq c$) 的变形场并确定待定函数 $f(r)$ 的具体表达式. 由于采用的是 Tresca 屈服准则和正交流动法则, 塑性的体应变为零, 材料的体积变形是以弹性规律变化的, 因而有^[1]

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)(\sigma_r + \sigma_\theta)}{E} \quad (15)$$

将式 (12) 和式 (13) 代入上式

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\sigma_s}{E} \left[2 \int_a^r \frac{f(r)}{r} dr + f(r) \right] - \frac{2(1-2\nu)(1+\nu)p}{E}$$

由上式可得塑性区位移为

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\sigma_s}{E} \left[\frac{2}{r} \int_a^r \left(r \int_a^r \frac{f(r)}{r} dr \right) dr + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} \int_a^r r f(r) dr - \frac{p}{\sigma_s} r \right] + \frac{A}{r} \end{aligned} \quad (16)$$

上式中 A 为积分常数, 它需由 $r = c$ 处的位移连续性条件来确定. 利用几何关系式 (2), 可由上式导出应变 ε_r 和 ε_θ 的表达式, 进而得到塑性区最大剪应变 γ 的表达式

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \\ &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \sigma_s [F(r) - f(r)] + \frac{2A}{r^2} \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{4}{r^2} \int_a^r r \int_a^r \frac{f(r)}{r} dr dr + \\ &= \frac{2}{r^2} \int_a^r r f(r) dr - 2 \int_a^r \frac{f(r)}{r} dr \end{aligned} \quad (18)$$

不难验证, 函数 $F(r)$ 满足如下方程

$$r \frac{d}{dr} F(r) + 2F(r) = 0 \quad (19)$$

利用 $\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2G}$, $\sigma_s = 2\tau_s$, $\tau_s = G\gamma_s$, 式 (17) 可改写为更简洁的形式

$$\gamma(r) = (1 - 2\nu)\gamma_s[F(r) - f(r)] + \frac{2A}{r^2} \quad (20)$$

由于所采用 Tresca 屈服准则是最大剪应力的准则, 在剪切的全应力 - 应变曲线 (图 2(b)) 上讨论强度随剪应变 γ 的变化才有意义. 在峰值强度后的下降阶段显然有

$$\tau_s - \tau_s(r) = -G_t(\gamma_s - \gamma(r))$$

由于 $\tau_s = G\gamma_s$, $\tau_s(r) = f(r)G\gamma_s$, 利用式 (20), 上式可写为

$$1 - f(r) = -\frac{G_t}{G} \left[1 - (1 - 2\nu)(F(r) - f(r)) - \frac{2A}{\gamma_s r^2} \right]$$

将上式两端微商, 得

$$-\frac{d}{dr} f(r) = \frac{G_t}{G} \left[-(1 - 2\nu) \left(\frac{dF}{dr} - \frac{df}{dr} \right) + \frac{4A}{\gamma_s r^3} \right]$$

利用式 (19), 可计算出

$$1 - f(r) - \frac{r}{2} \frac{df}{dr} = -\frac{G_t}{G} \left[-1 - (1 - 2\nu)f(r) - (1 - 2\nu) \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \right]$$

函数 $F(r)$ 和常数 A 在推导过程中被消去了, 上式可进一步简化为

$$r \frac{df}{dr} + 2f = 2n \quad (21)$$

其中

$$n = \frac{1 + G_t/G}{1 - (1 - 2\nu)G_t/G} \geq 1 \quad (22)$$

上式定义的 n 可称为厚壁筒的“脆度”, 用以表征厚壁筒脆性的大小. 脆度 n 随 G_t/G 变化的曲线如图 3 所示, 从图上可看出 G_t/G 的取值范围是 $[0, 1/(1 - 2\nu))$. 如果 $\nu = 0.25$, 则 G_t/G 取值范围是 $[0, 2)$, 相应地, n 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

不同的 n 值对应的本构曲线如图 4 所示. $n = 1$ 对应于理想塑性情况 (即不脆), 随 n 的增大脆性增大. $n = \infty$ 对应于所允许的最大坡度 $G_t/G = 1/(1 - 2\nu) \approx 2$. 因此, 用塑性力学理论研究厚壁筒问题不应该采用直接跌落的本构曲线 ($G_t/G = \infty$).

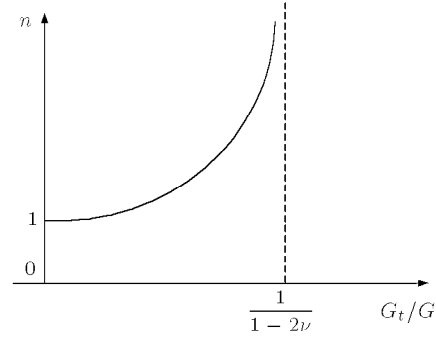


图 3 脆度 n 随 G_t/G 的变化曲线

Fig.3 Curve of n vs G_t/G

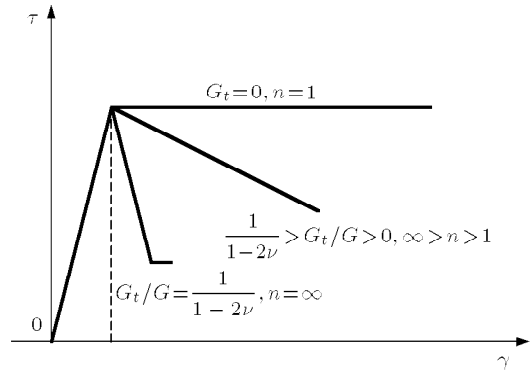


图 4 脆度 n 对应的本构曲线

Fig.4 Constitutive law curve corresponding to n

利用边界条件 $f(a) = m$, 方程 (21) 的解为

$$f(r) = n - \frac{(n - m)a^2}{r^2} \quad (23)$$

利用条件 $f(c) = 1$, 得

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{n - m}{n - 1} \quad (24)$$

引入参数

$$\zeta = (c - a)/a \quad (25)$$

显然它是塑性区径向厚度与筒的内径之比, 它表征塑性区的尺度, 当 c 达到 b 时, ζ 达到最大值, $\zeta_M = (b - a)/a$, 则由式 (24) 和 (25) 得

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \left(\frac{n - m}{n - 1} \right)^{1/2} - 1 \geq 0, \quad m \geq m_0 \\ n - m &= (n - 1)(1 + \zeta)^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

于是式 (23) 还可写成如下形式

$$f(r) = n - \frac{(n - 1)(1 + \zeta)^2 a^2}{r^2} \quad (27)$$

从式 (27) 可看出, 厚壁筒的脆度 n 既决定塑性区的尺度 (用 ζ 表示), 也决定了塑性区的强度下降的规律 (用 $f(r)$ 表示).

在 $r = c$ 两侧的位移 $u(c^+)$ 和 $u(c^-)$, 可分别由弹性区的位移式 (9) 和塑性区位移式 (16) 得到

$$u(c^+) = \frac{(1+\nu)\sigma_s c}{2E} \left[(1-2\nu) \frac{c^2}{b^2} + 1 \right]$$

$$u(c^-) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\sigma_s c}{2E} \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{A}{c}$$

由位移连续条件 $u(c^+) = u(c^-)$ 可确定式 (16) 中的常数 A

$$A = \frac{(1-\nu^2)\sigma_s c^2}{E} = \frac{(1-\nu^2)\sigma_s a^2}{E} (1+\zeta)^2 \quad (28)$$

将式 (27) 代回式 (12) 和式 (13), 得到塑性变形第 1 阶段塑性区应力分量的表达式

$$\sigma_r(r) = \sigma_s \left[n \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) (1+\zeta)^2 \right] - p \quad (29)$$

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_s \left\{ n \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{1}{2} \left[(3-2n) \frac{a^2}{r^2} - 1 \right] (1+\zeta)^2 \right\} - p \quad (30)$$

$$p = \sigma_s \left\{ \frac{1}{2} + n \ln(1+\zeta) + \frac{1}{2} (n-1) [1 - (1+\zeta)^2] - \frac{1}{2} \frac{(1+\zeta)^2}{(1+\zeta_M)^2} \right\} \quad (31)$$

将式 (27) 代入式 (16), 可得塑性变形第 1 阶段塑性区径向位移的表达式

$$u(r) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\sigma_s a^2}{Er} \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} (1+\zeta)^2 + \frac{nr^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} (n-1) (1+\zeta)^2 \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) - \frac{p}{\sigma_s} \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (32)$$

至此, 得到了厚壁筒在塑性变形第 1 阶段塑性区应力和位移解析表达式, 这些公式的适用范围是

$$m_0 \leq m \leq 1 \text{ 或 } 0 \leq \zeta \leq \zeta_{tr} \quad (33)$$

其中

$$\zeta_{tr} = \left(\frac{n-m_0}{n-1} \right)^{1/2} - 1 \quad (34)$$

它表示软化塑性区的最大径向尺度 (对应于 $m = m_0$).

如果变形继续发展, 即进入塑性变形发展的第 2 阶段. 这时在软化塑性区之后存在一个“理想”的

残余屈服应力 σ_0 的塑性区, 如图 5 所示. 厚壁筒将分 3 个区域: (1) 弹性区 ($b \geq r \geq c$); (2) 软化塑性区 ($c \geq r \geq c_1$); (3) 残余理想塑性区 ($c_1 \geq r \geq a$). 这里, $r = c$ 仍表示弹性区与塑性区的交界, $r = c_1$ 是软化塑性区与残余理想塑性区的交界. 随着变形的持续发展, c 和 c_1 的值都不断增大, 而软化塑性区整体地向外移动.

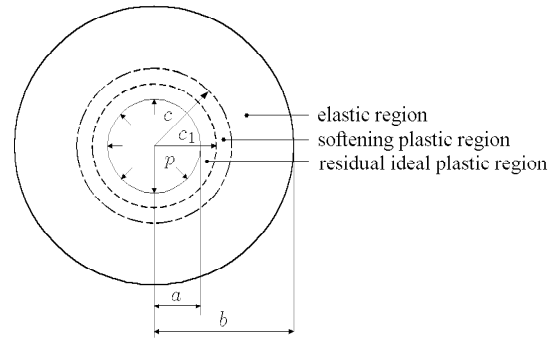


图 5 厚壁筒 3 个区域

Fig.5 Three region of thick-walled cylinder

只要设定塑性区内屈服应力

$$\sigma_s(r) = g(r)\sigma_s$$

完全可用前面的方法求解塑性变形的第 2 阶段的应力分布和位移分布. 只要用 $g(r)$ 代替 $f(r)$, 前述各公式都成立. 这里不难设定, $g(r)$ 的形式为

$$g(r) = \begin{cases} m_0, & a \leq r \leq c_1 \\ f(r - c_1 + a) = n - \frac{(n-m_0)a^2}{(r-c_1+a)^2}, & c_1 \leq r \leq c \end{cases} \quad (35)$$

经过冗繁的初等推演, 可计算出积分

$$\int_a^r r g(r) dr, \quad \int_a^r \frac{g(r)}{r} dr, \quad \int_a^r r \left(\int_a^r \frac{g(r)}{r} dr \right) dr$$

的表达式, 从而得到应力场和位移场

$$\sigma_r(r) = \sigma_s \int_a^r \frac{g(r)}{r} dr - p \quad (36)$$

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_s \left[\int_a^r \frac{g(r)}{r} dr + g(r) \right] - p \quad (37)$$

$$p = \frac{\sigma_s}{2} \left(2 \int_a^c \frac{g(r)}{r} dr + 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (38)$$

$$u(r) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\sigma_s}{E} \left[\frac{2}{r} \int_a^r r \left(\int_a^r \frac{g(r)}{r} dr \right) dr + \frac{1}{r} \int_a^r r g(r) dr - \frac{pr}{\sigma_s} \right] + \frac{A}{r} \quad (39)$$

根据在 $r = c$ 处位移连续条件 $u(c^-) = u(c^+)$, 经过冗长的运算, 可定出常数 A

$$A = \frac{(1 - \nu^2)\sigma_s c^2}{E}$$

此结果与式 (28) 相同. 如果仍用 ζ 表示整个塑性区的径向尺度参数, 即 $c - a = \zeta a$, 用 ζ_{tr} 表示软化塑性区的径向尺度参数 $c - c_1 = \zeta_{tr} a$, 那么有

$$c = (1 + \zeta)a, \quad c_1 = (1 + \zeta - \zeta_{tr})a \quad (40)$$

在式 (36)~式 (39) 写成显示表达式后, 仍可用无量纲参数 ζ 和 ζ_{tr} 代替 c, c_1 . 这些塑性第 2 阶段的公式的适用范围是

$$\zeta_{tr} \leq \zeta \leq \zeta_M \quad (41)$$

至此, 我们在原则上给出了应变软化材料受内压厚壁筒的所有的应力解和位移解.

2 厚壁筒的平衡解的稳定性问题

本节应用稳定性方法分析应变软化材料受内压厚壁筒的承载能力. 在稳定性分析中通常使用平衡路径形象地表述平衡状态的演化过程. 平衡路径上的每一个点代表一个平衡状态.

在式 (6) 中令 $r = a$, 得内壁位移和内壁压力之间的关系为

$$u(a) = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - 2\nu) + \frac{b^2}{a^2} \right] ap \quad (42)$$

引用无量纲变量

$$\bar{u} = \frac{2Eu(a)}{(1 + \nu)a\sigma_s}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_e} = \frac{2b^2 p}{\sigma_s(b^2 - a^2)} \quad (43)$$

式 (42) 可改写为

$$\bar{u} = \left[1 + (1 - 2\nu) \frac{a^2}{b^2} \right] \bar{p} = \left[1 + \frac{1 - 2\nu}{(1 + \zeta_M)^2} \right] \bar{p} \quad (44)$$

式 (44) 为弹性阶段厚壁筒的平衡路径曲线. 上式表示的平衡路径是一有正斜率的直线, 因而在弹性变形阶段的平衡是稳定的. 不难看出, 弹性阶段最大的压力值和相应的位移值为

$$\bar{p} = 1, \quad \bar{u} = 1 + \frac{1 - 2\nu}{(1 + \zeta_M)^2} \quad (45)$$

同样, 将式 (31) 稍加简化, 并用无量纲参数表示, 则为

$$\bar{p} = \frac{(1 + \zeta_M)^2}{(1 + \zeta_M)^2 - 1} \left\{ n + 2n \ln(1 + \zeta) - \left[n - 1 + \frac{1}{(1 + \zeta_M)^2} \right] (1 + \zeta)^2 \right\} \quad (46)$$

厚壁筒内壁位移 $u(a)$ 可在式 (32) 中令 $r = a$ 得到, 采用无量纲参数 $\bar{u}$ 和 $\bar{p}$, 可以整理为

$$\bar{u} = 2(1 - \nu)(1 + \zeta)^2 - (1 - 2\nu) \left[1 - \frac{1}{(1 + \zeta_M)^2} \right] \bar{p} \quad (47)$$

将式 (46) 代入式 (47) 得到用 ζ 表示的 $\bar{u}$. 这样式 (46) 和式 (47) 联立构成了塑性变形第 1 阶段的平衡路径曲线, 它们是用含参变量 ζ 的参数方程形式给出的.

另外, 由式 (35) 和式 (38), 可得到 p 的具体表达式, 并改写成无量纲形式为

$$\bar{p} = \frac{(1 + \zeta_M)^2}{(1 + \zeta_M)^2 - 1} \left\{ 2n \ln \frac{1 + \zeta}{1 + \zeta - \zeta_{tr}} - \frac{(1 + \zeta)^2}{(1 + \zeta_M)^2} + 1 + 2m_0 \ln(1 + \zeta - \zeta_{tr}) + 2(n - m_0) \cdot \left[\frac{-\zeta_{tr}}{(\zeta - \zeta_{tr})(1 + \zeta_{tr})} + \frac{\ln \frac{(1 + \zeta_{tr})(1 + \zeta - \zeta_{tr})}{1 + \zeta}}{(\zeta - \zeta_{tr})^2} \right] \right\} \quad (48)$$

利用式 (38) 和式 (39) 可得到内壁位移 $u(a)$ 的表达式, 写成相应的无量纲位移 $\bar{u}$ 的表达式为

$$\bar{u} = 2(1 - \nu)(1 + \zeta)^2 - \left[1 - \frac{1}{(1 + \zeta_M)^2} \right] (1 - 2\nu) \bar{p} \quad (49)$$

上式与塑性变形第 1 阶段的表达式 (47) 在形式上完全相同, 然而两式中 $\bar{p}$ 的含义却是不同的. 式 (48) 和式 (49) 联立, 构成了塑性变形第 2 阶段的平衡路径曲线.

至此, 按厚壁筒变形的 3 个阶段的内壁压力 $\bar{p}$ 和内壁位移 $\bar{u}$ 之间平衡路径曲线已经完全得到.

对塑性变形第 1 阶段压力 $\bar{p}$ (式 (46)) 求导数, 并令其为零, 可确定出

$$\zeta_{cr} = \left[\frac{n}{n - 1 + (1 + \zeta_M)^{-2}} \right]^{1/2} - 1 \quad (50)$$

从而得临界压力

$$\bar{p}_{cr} = \frac{(1 + \zeta_M)^2}{(1 + \zeta_M)^2 - 1} n \ln \frac{n}{n - 1 + (1 + \zeta_M)^{-2}} \quad (51)$$

对于 $m_0 = 0$ 情况, 有

$$\zeta_{tr} = \left(\frac{n}{n - 1} \right)^{1/2} - 1 \quad (52)$$

因而有 $\zeta_{cr} < \zeta_{tr}$, 也即对 $m_0 = 0$ 情况, 临界点总是发生在塑性变形第 1 阶段. 此外, 由于 $(1 + \zeta_M)^2 = b^2/a^2$, 总有 $0 < (1 + \zeta_M)^{-2} < 1$, 按式 (51), 随 n 的增大, $\bar{p}_{cr}$ 总是减小的; 当 $n \rightarrow \infty$, $\bar{p}_{cr} \rightarrow 1$.

取厚壁筒的尺寸参数 $\zeta_M = 2$ (相对于 $b/a = 3$) 材料残余强度参数 $m_0 = 0$, 泊松比 $\nu = 0.25$, 图 6 给出了对应于不同脆度参数 n 的平衡路径曲线, 表 1 列出了每条曲线关键点所对应的数据. $n = 1$ 对应的是理想塑性的平衡路径曲线, 该曲线单调上升, 在塑性极限时达到承载能力. 而其他 $n > 1$ 的曲线对应应变软化材料的平衡路径曲线, 随着内壁位移 $\bar{u}$ 的增大, 每支曲线都有一个压力 $\bar{p}$ 的转向点, 即极值点. 在极值点之前的平衡路径状态是稳定的, 在极值点之后各点代表的平衡状态是不稳定的. 这就是说, 当厚壁筒内壁压力 $\bar{p}$ 从零开始增加, 达到临界压力 $\bar{p}_{cr}$ 时, 在外界扰动下突然失稳, 塑性参数从 ζ_{cr} 迅速增大到 ζ_M , 厚壁筒的承载能力完全丧失.

厚壁筒的失稳显然是极值点型失稳. 从图 6 还可以看到, 当脆度 n 不断增大, 临界力 $\bar{p}_{cr}$ 和相应的塑性区尺度(用 ζ_{cr} 表示) 都随之减小.

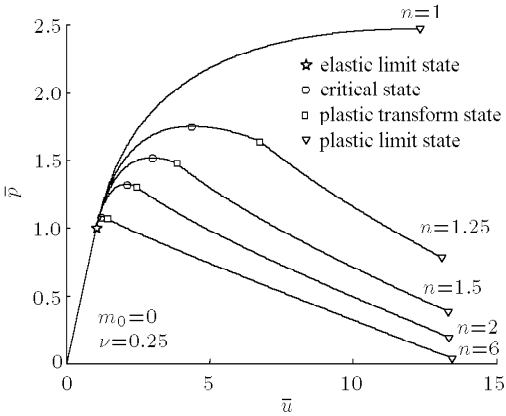


图 6 平衡路径曲线
Fig.6 Curve of balance path

表 1 平衡路径曲线关键点对应的数据 ($m_0 = 0$)

Table 1 Data corresponding to key point on the curve of balance path ($m_0 = 0$)

n	Parameters											
	Elastic limit state			Critical state			Plastic transform state			Plastic limit state		
	ζ_e	$\bar{p}_e$	$\bar{u}_e$	ζ_{cr}	$\bar{p}_{cr}$	$\bar{u}_{cr}$	ζ_{tr}	$\bar{p}_{tr}$	$\bar{u}_{tr}$	ζ_M	$\bar{p}_M$	$\bar{u}_M$
1	0	1	1.056							2	2.471	12.4
1.25	0	1	1.056	0.861	1.746	4.413	1.236	1.637	6.779	2	0.777	13.2
1.5	0	1	1.056	0.567	1.515	3.005	0.732	1.478	3.848	2	0.384	13.3
2	0	1	1.056	0.342	1.323	2.114	0.414	1.309	2.423	2	0.192	13.4
6	0	1	1.056	0.084	1.082	1.278	0.095	1.080	1.323	2	0.038	13.5

对于 $m_0 \neq 0$ 的情况, 问题稍复杂一些, 图 7, 图 8 和图 9 分别给出了 $m_0 = 0.2$, $m_0 = 0.4$ 和 $m_0 = 0.6$ 的平衡路径曲线. 仅在 m_0 较小和 n 较小的情况临界点才发生在塑性变形的第 1 阶段, 而大多数情况,

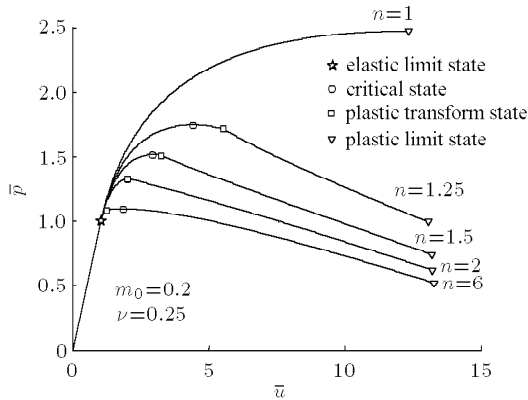


图 7 平衡路径曲线

Fig.7 Curve of balance path

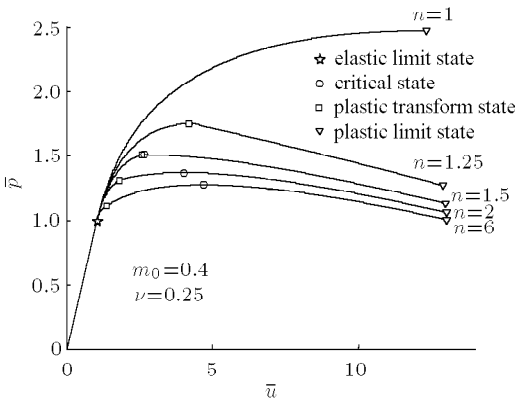


图 8 平衡路径曲线

Fig.8 Curve of balance path

临界点发生在塑性变形的第 2 阶段. 随着 m_0 的增大, 临界载荷随之增大. 当 $m_0 \rightarrow 1$ 时, 则退化为理想塑性情况.

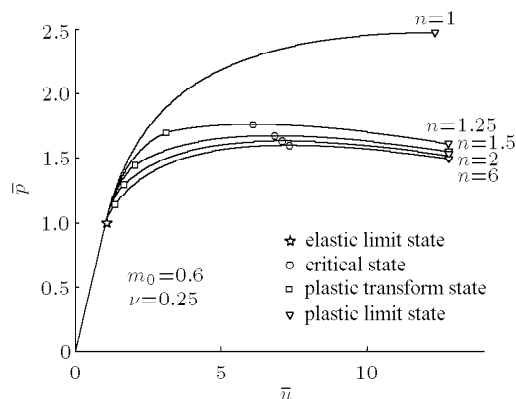


图 9 平衡路径曲线

Fig.9 Curve of balance path

3 结 论

本文对软化弹塑性材料采用 Tresca 屈服准则与关联流动法则，求得了受内压厚壁筒的应力和位移分布的解析解。虽然材料是线性软化的，即屈服应力随内变量线性降低，或在应力应变曲线上峰值后应力随应变线性降低，但在软化塑性区内屈服应力和径向坐标 r 之间是负二次幂关系。当 $G_t = 0$ 或 $n = 1$ 或 $m_0 = 1$ 时本文得到的解析解退化为理想塑性问题的解。

根据厚壁筒的解析解，将内壁压力 p 作为广义力，内壁位移 u 作为广义位移，讨论了厚壁筒的稳定性。结果表明，理想塑性材料的厚壁筒属于强度破坏，软化塑性材料厚壁筒属于极值点型失稳破坏，因而它们的承载能力有不同的力学含义。

在厚壁筒的应力分析和稳定性分析中，脆度参

数 n 或本构曲线下下降坡度 G_t 具有重要的意义，它们不但决定了塑性区尺度和塑性区内强度分布的规律，还影响临界压力的大小。一般地，当脆度不断增大，塑性区尺度和临界力都随之减小。

参 考 文 献

- 1 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论 (修订版). 北京: 北京大学出版社, 1992. 168~179 (Wang Ren, Huang Wenbin, Huang Zhuping. Introduction of Plastic Mechanics (Revision). Beijing: Peking University Press, 1992. 168~179 (in Chinese))
- 2 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学. 北京: 清华大学出版社, 1995. 184~200, 530~533 (Xu Bingye, Liu Xinseng. Applied Elastoplastic Mechanics. Beijing: Tsinghua University Press, 1995. 184~200, 530~533 (in Chinese))
- 3 Dems K, Mroz Z. Stability conditions for brittle-plastic structures with propagating damage surfaces. *J Struct Mech*, 1985, 13(1): 95~122
- 4 刘文政, 徐秉业. 线性软化脆塑性厚壁筒的极限载荷. 力学学报, 1989, 21(增刊): 192~197 (Liu Wenzheng, Xu Bingye. Limit loads for thick-walled cylinders of linear softening brittle plastic materials. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21(SUP): 192~197 (in Chinese))
- 5 李朝弟, 刘信声. 考虑材料损伤时厚壁筒的承载能力. 力学与实践, 1993, 15(1): 23~26 (Li Chaodi, Liu Xinseng. Bearing capacity of thick-walled cylinders when the material is damaged. *Mechanics in Engineering*, 1993, 15(1): 23~26 (in Chinese))
- 6 李志明, 殷有泉. 油水井套管外挤力计算及其力学基础. 北京: 石油工业出版社, 2006. 2~5 (Li Zhiming, Yin Youquan. Computation of Outer Extruded Force on Casing of Oil and Gas Well and Its Foundation of Mechanics. Beijing: Petroleum Industry Press, 2006. 2~5 (in Chinese))

(责任编辑: 陶彩军)

THE ANALYTICAL SOLUTIONS OF THICK-WALLED CYLINDER OF SOFTENING MATERIAL AND ITS STABILITY

Yin Youquan* Chen Zhaowei^{†,1)}

**(Department of Mechanics and Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)*

[†](Drilling Research Institute, CNPC, Beijing 100195, China)

Abstract The constitutive law of elastoplastic material being simplified to three-line model (elastic-linear softening plastic-residual ideal plastic model), and the material obeying Tresca yield criteria and associated flow rule, the analytical solutions of thick-walled cylinder subject to internal pressure p were derived in the paper. The result shows that the yield stress in the softening plastic region is the inverse square of radial coordinate r .

Firstly, the pressure p was taken as generalized force, the displacement u taken as generalized displacement, and the thick-walled cylinder taken as a whole system. On the basis of the solutions the stability problem of thick-walled cylinder was then discussed. The p - u curve of balance path was drawn, on which each point denotes a balance state. The slope of the tangent line for each point can be considered the stiffness of thick-walled cylinder. The extreme value of generalized force is the critical point on the curve, and the critical point separates the curve into two sections: the section before the critical point is stable, and the stiffness is positive; the section after the point is unstable, and the stiffness is negative. When the generalized force reaches the critical point, the displacement increases quickly and the system loses its stability, while ideal plastic thick-walled cylinder loses its stability only when the plastic region penetrates through the whole cylinder. Therefore, the failure mechanism is completely different: the former belongs to extreme value point destabilization, and the latter belongs to strength failure. That is to say, the bearing capacity has different mechanical meanings.

Key words thick-walled cylinder, Treaca yield criteria, strain-softening, critical load, equilibrium stability