

具有精确色散性的非线性波浪数学模型¹⁾金 红^{*,†,2)} 邹志利^{*}^{*}(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116024)[†](大连市环境科学设计研究院, 大连 116023)

摘要 以完全非线性的自由表面边界条件为基础, 以波面升高 η 和自由表面速度势 ϕ_η 为待求变量, 建立了新的波浪方程. 方程在色散性上是完全精确的, 非线性近似至三阶. 与缓坡方程相比较, 两者都具有精确的色散性, 但该方程属于非线性模型, 可模拟波浪的非线性效应, 且适用于不规则波. 方程的特点是属于微分 - 积分方程, 对如何处理方程中积分项进行了讨论, 并数值模拟了不同周期的线性波和二阶 Stokes 波, 也模拟了波群的非线性演化, 以对模型进行验证.

关键词 精确色散性, 非线性, 波群, 波幅离散, 四波相互作用

中图分类号: TV139.2+6 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)01-0023-12

引 言

非线性波浪的计算是海洋水动力学中的重要课题. 但目前精确的三维计算模型, 如三维 Laplace 方程模型和 Navier-Stokes 方程模型, 由于计算量过大而不能在实际中得到广泛的使用, 因此, 人们需要寻求简化的模型. 模型的简化一般可从色散性和非线性两方面分别入手, 对色散性的近似导致了 Boussinesq 方程模型, 其一般要从浅水假定出发, 所以对短波和深水问题只能给出近似结果^[1]; 另一方面, 若要保持精确的色散性, 模型在非线性方面就要做近似. 这类模型的典型例子是缓坡方程模型^[2], 该模型具有精确的色散性, 可适合任何水深, 但模型是线性的. 为了克服这一不足, 人们也提出了非线性的缓坡方程^[3], 但文献^[3]的模型还是像缓坡方程一样不适合于不规则波情况. 为了克服这一问题, Nadaoka 等^[4]采用将速度势用多个具有不同波数的 $\cosh k(z+h)$ 型函数表达来描述速度势沿水深的变化, 建立了可以近似适合不规则波情况的扩展型缓坡方程, 模型中对不规则波的考虑是通过选择上述不同波数来实现的, 因而是近似的. 本文的工作可以看作属于这种类型, 但所建立的模型可以克服 Nadaoka 等模型对不规则波的近似. Schäffer^[5]也与本文工作平行, 进行了类似的研究, 但模型的建立没

有采用本文模型中的 Fourier 积分来表达速度势, 也没有给出实际波浪模拟的算例.

本文仅考虑垂直二维模型. 模型的建立是以完全非线性的自由表面边界条件为基础, 以波面升高 η 和自由表面速度势 ϕ_η 表达新的波浪方程, 方程在色散性上是完全精确的, 非线性近似至三阶. 与缓坡方程相比较, 两者都具有精确的色散性, 但本文方程属于非线性模型, 可模拟波浪的非线性效应, 且适用于不规则波. 方程的特点是属于微分 - 积分方程, 对如何处理方程中积分项进行了讨论. 为了验证模型, 分别对线性波、二阶 Stokes 波和波群的非线性演化进行了数值模拟.

1 控制方程

考虑垂直二维波浪运动, 将笛卡儿坐标系的 x 轴设在静水面上, z 轴向上为正. 流体底部边界为 $z = -h(x)$, $h(x)$ 是可以随空间变化的水深. 自由表面边界为 $z = \eta(x, t)$, η 为波面升高. 假设流体无旋、不可压缩、无黏性, 控制方程以及各边界条件为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad -h(x) < z < \eta(x, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad z = \eta(x, t) \quad (2)$$

2008-02-03 收到第 1 稿, 2009-03-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(50479053, 10672034), 高等学校博士科学点专项科研基金(20040141030) 和辽宁省高校创新团队支持计划资助项目.

2) E-mail: jinhong103@sina.com

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) = 0, z = \eta(x, t) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h(x) \quad (4)$$

式 (1) 为 Laplace 方程, 式 (2) 和式 (3) 分别为完全非线性的自由表面运动学边界条件和动力学边界条件, 式 (4) 为水底边界条件.

Dommermuth 等^[6] 引入自由表面速度势 $\phi_\eta(x, t) = \phi(x, z, t)|_{z=\eta}$, 式 (2) 和式 (3) 可改写为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (6)$$

式 (5) 和式 (6) 中的变量为 η , ϕ_η 和 $(\partial \phi / \partial z)_{z=\eta}$, 只要引入新的关系式, 用波面升高 η 和自由表面速度势 ϕ_η 来表示自由表面垂向速度 $(\partial \phi / \partial z)_{z=\eta}$, 则可得到以波面升高 η 和自由表面速度势 ϕ_η 为变量的控制方程.

将自由表面垂向速度关于 $z = 0$ 展开为泰勒级数的形式

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \left(\frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial z^{n+1}} \right)_{z=0} \quad (7)$$

式 (7) 右端为速度势的垂向导数, 为避免处理三维问题, 首先要将垂向导数转化为空间导数, 使其简化为二维问题. 其次, 需要建立 η 和 ϕ_η 同自由表面速度势 ϕ_0 的关系式.

应用 Fourier 积分建立起速度势 ϕ 的一般表达式. 将满足拉普拉斯方程 (1) 的解用以下 Fourier 积分表达

$$\phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{ikx} dk \quad (8)$$

式中, $A(k, t)$ 为波数谱. 上式对平底情况是自然成立的, 因被积函数满足拉普拉斯方程 (1) 和水底上法向速度为零的条件 $(\partial \phi / \partial z = 0, z = -h)$. 但本文要考虑的不仅是平底情况而且包括缓坡情况, 这里引入缓坡假定 $\sigma = L/\Lambda \ll 1$, 其中 L 为波长, Λ 为水底变化的水平尺度. 该假定表明水底变化的水平尺度要远大于波浪变化的水平尺度, 比值 σ 为一小量. 从而水底梯度也为同一量阶的小量, 即 $\partial h / \partial x = O(\sigma)$. 在这一假定下, 变水深水底条件 (4) 可近似表达为 $\partial \phi / \partial z = O(\sigma)(z = -h)$. 因此可

以应用波浪折射理论^[1], 这时速度势沿水深的变化可近似由 $\cosh k(z+h)$ 表达 (首阶近似). 所以式 (8) 对缓坡情况也是成立的. 缓坡方程^[2] 的推导也采用了类似的表达方式, 应用表明, 这样近似处理所得方程对大部分的缓坡地形是适合的^[7].

根据式 (8) 并结合 Fourier 变换, 静水面上垂向速度可表示为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi_0(x', t)}{\partial x'^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(kh)}{k} e^{ik(x-x')} dk dx' \quad (9)$$

为了书写方便, 将上式积分定义为 T 积分, 积分中核函数定义为 G , 其具体表达式为

$$T\{\cdots\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\cdots\} G(x-x') dx' \quad (10)$$

$$G(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(kh)}{kh} \exp\left(ikh\left(\frac{x-x'}{h}\right)\right) d(kh) \quad (11)$$

式 (10) 中, 左侧 $\{\cdots\}$ 中函数自变量为 (x, t) , x 表示控制点坐标, 当移到右侧积分号内时, 则改写为 (x', t) , x' 为积分点坐标. 式 (11) 中的积分可以积分出来得到解析表达, Broer^[8] 在应用哈密顿原理建立非线性波浪方程时曾得到了这一结果, 表达式为

$$G(\chi) = -\frac{1}{\pi} \ln \left(\tanh \left(\frac{\pi |\chi|}{4} \right) \right) \quad (12)$$

式中 $\chi = (x-x')/h$. 静水面垂向速度为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -T \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \quad (13)$$

将速度势在 $z = 0$ 处展开成泰勒级数, 代入到 Laplace 方程式 (1) 中, 令同次幂 z 的系数和为零, 再应用静水面垂向速度表达式 (13), 最终得到静水面上速度势垂向导数和空间导数的关系式为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^{2n} \phi}{\partial z^{2n}} \right)_{z=0} &= (-1)^n \frac{\partial^{2n} \phi_0}{\partial x^{2n}} \\ \left(\frac{\partial^{2n+1} \phi}{\partial z^{2n+1}} \right)_{z=0} &= (-1)^{n+1} T \frac{\partial^{2n+2} \phi_0}{\partial x^{2n+2}} \\ n &= 0, 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

下面来求 ϕ_0 的表达式. 将自由表面速度势 ϕ_η 在 $z = 0$ 处展开成泰勒级数, 应用式 (14) 将垂向导数

转化为空间导数, 近似至 $O(\eta^3)$, 得

$$\begin{aligned} \phi_0 = \phi_\eta + \eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \\ \eta T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (15)$$

应用式 (14) 和式 (15), 式 (7) 可写为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} = -T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} - \\ T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) - \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) + \\ \frac{\eta^2}{2} T \frac{\partial^4 \phi_\eta}{\partial x^4} - \frac{1}{2} T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta^2 \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) - \\ T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) \right) + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (16)$$

将上式代入自由表面运动学边界条件 (5) 中, 得控制方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} + \\ T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \\ \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \eta^2 T \frac{\partial^4 \phi_\eta}{\partial x^4} + \\ \frac{1}{2} T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta^2 \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) + \\ T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) \right) + O(\eta^3) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \right)^2 - \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

方程 (17) 和 (18) 构成了具有精确色散性、非线性近似至三阶的 (垂直) 二维波浪方程. 控制方程对波浪组成没有任何限制, 适用于任意不规则波, 且方程具有精确的色散性, 这将在下一节给出证明. 非线性的近似仅出现在自由表面运动学边界条件 (17) 中, 自由表面动力学边界条件 (18) 是完全精确的, 无任何近似. 该方程与 Boussinesq 型方程的不同之处在于, 方程推导过程中对水深没有作任何假设, 因此, 该方程适用于任意水深条件下的不规则波浪. 如前面所述, 借助波浪折射理论^[1], 控制方程 (17) 和 (18) 对缓坡情况也近似成立. 以上推导也可推广到 (垂直) 三维问题, 这将在另文给出.

为了分析方程的特性以及验证方程的正确性, 后面各节中将分别对方程 (17) 和 (18) 及其一阶、二阶近似方程进行验证. 方程 (17) 和 (18) 的一阶方程 (线性方程) 可写为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (20)$$

二阶方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} + \\ T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta T \frac{\partial^2 \phi_\eta}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \right)^2 - \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

2 方程色散性分析

为了分析方程的色散性, 将积分算子 T 的表达式 (10) 代入一阶方程 (19) 和 (20) 中, 并消去自由表面速度势 ϕ_η , 得

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \eta(x - x', t)}{\partial x'^2} G(x') dx' = 0 \quad (23)$$

波面升高表达为: $\eta(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$, 式中, k_0 和 ω_0 为常数. 将其和核函数表达式 (11) 代入式 (23), 得

$$\omega_0^2 = gk_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(kh)}{k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k_0)x'} dx' \right) dk \quad (24)$$

式中, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k_0)x'} dx' = \delta(k - k_0)$, 因此可得 $\omega_0^2 - gk_0 \tanh(k_0 h) = 0$, 该式同一阶 Stokes 波浪理论精确色散关系一致, 因此, 本文控制方程具有完全精确的色散性.

3 数值方法

3.1 微分方程的数值离散

控制方程 (17) 和 (18) 是微分 - 积分方程, 对于微分项, 可采用有限差分法进行数值离散, 差分网格的划分以及各变量的相对位置见图 1, 差分方程为

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} = E^n \quad (25a)$$

$$\frac{\phi_\eta^{n+1} - \phi_\eta^{n-1}}{2\Delta t} = F^n \quad (25b)$$

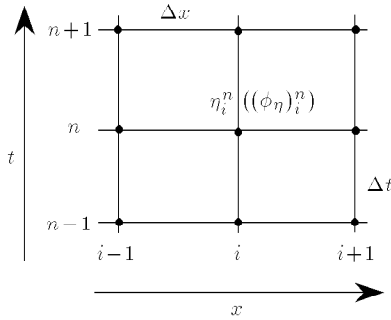


图 1 差分网格示意图

Fig.1 The grids

式中

$$\begin{aligned}
 E^n = & -T \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} - \eta^n \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta^n}{\partial x} \frac{\partial \phi_\eta^n}{\partial x} - \\
 & T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta^n T \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial \eta^n}{\partial x} \right)^2 T \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} - \\
 & \eta^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta^n T \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} (\eta^n)^2 T \frac{\partial^4 \phi_\eta^n}{\partial x^4} - \\
 & \frac{1}{2} T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((\eta^n)^2 \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} \right) - \\
 & T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta^n T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta^n T \frac{\partial^2 \phi_\eta^n}{\partial x^2} \right) \right) \quad (26) \\
 F^n = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\eta^n}{\partial x} \right)^2 - g \eta^n + \\
 & \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta^n}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1} \left(E^n + \frac{\partial \phi_\eta^n}{\partial x} \frac{\partial \eta^n}{\partial x} \right)^2 \quad (27)
 \end{aligned}$$

对方程进行数值离散时,在时间上分 3 层离散,即采用蛙跳差分格式.如式 (25) 所示,方程左端时间位于 $n+1$ 和 $n-1$ 层,右端位于 n 层.数值求解时,右端项均为已知,因此可分别对波面升高 η 和自由表面速度势 ϕ_η 显示求解,不用耦合求解.对方程右端空间导数项,可采用中心二阶差分格式进行离散.

3.2 积分项的数值求解

控制方程 (17) 和 (18) 数值求解的难点在于方程中积分项的计算.由于变水深情况包含了常水深情况,因此,这里直接讨论变水深条件下,控制点 x_i 处 T 积分的计算,根据式 (10),该积分可写为如下形式

$$T\{f(x_i, t)\} = \int_{x_i - \infty}^{x_i + \infty} f(x', t) G(\chi) dx' \quad (28)$$

式中 $\chi = (x_i - x')/h_i$, 由式 (8)~ 式 (12) 可知, h_i 为控制点 x_i 处的当地水深.

首先分析一下 T 积分的性质: 由计算式 (28) 可知, 该积分为广义积分; 由核函数 $G(\chi)$ 定义式 (12) 可知, 零点为核函数的奇点, 零点处核函数值为无穷大; 被积函数 $f(x', t)$ 为 η 和 ϕ_η 的函数, 因此是振荡函数. 为了分析核函数 G 的性质, 图 2 给出了核函数沿自变量 χ 的空间分布, 由图可知, 核函数关于零点中心对称, 且核函数由零点向两侧呈指数衰减, 当 $|\chi| > 3$ 时几乎衰减为零. 核函数的这一特性弥补了 T 积分为广义积分的弱点, 可使得积分域由无穷大简化为有限域 (几个水深范围内). 利用核函数的这一性质, 式 (28) 可变为

$$T\{f(x_i, t)\} = \int_{x_i - \lambda h_i}^{x_i + \lambda h_i} f(x', t) G(\chi) dx' \quad (29)$$

这样就将积分上下限由正负无穷远简化至有限长度, 使数值计算成为可能. 式中, λ 为积分限参数, 通常可取 $\lambda = 3$.

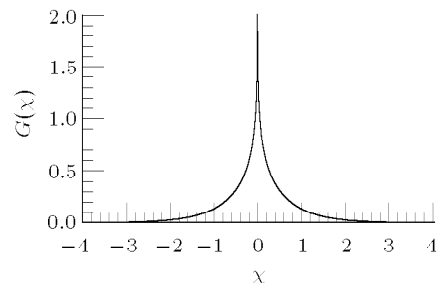


图 2 核函数值分布图

Fig.2 The kernel function

因为控制方程的差分格式为显格式, 被积函数 $f(x', t)$ 在各差分网格节点上的值均为已知, 因此可以利用这些已知的点, 通过插值方法将被积函数 $f(x', t)$ 表达成多项式的形式, 然后通过解析方法来求 T 积分. 这样一来, 积分的误差仅取决于多项式的精度. 对于这里的一维问题, 采用 2 个网格上 3 个节点值把被积函数 $f(x', t)$ 表达成二次多项式的形式. 这样可以把式 (29) 中积分的整个积分域划分为若干个由 2 个网格构成的积分单元. 这样整个积分域被划分为 $2N_i + 1$ 个积分单元. 如图 3 所示, 图中 x 轴和 x' 轴是重合的, 因此, 空间步长 $\Delta x' = \Delta x$, 本文中没有引入 $\Delta x'$, 均由 Δx 来表示. 图中给出的被积函数 $f(x', t)$ 为余弦曲线, 核函数 $G(\chi)$ 如前文所述是呈指数衰减的, 被积函数 $f(x', t)$ 和核函数 $G(\chi)$ 的乘积则呈振荡衰减. 由图可知, 积分可主要集中在 $(x_i - \lambda h_i, x_i + \lambda h_i)$ 区间上. 积分单元的位置

在图中由 n 来表示, N_i 为积分域的分段参数, 计算式为

$$N_i = \text{int}\left(\frac{\lambda h_i}{2\Delta x} + 0.5\right) \quad (30)$$

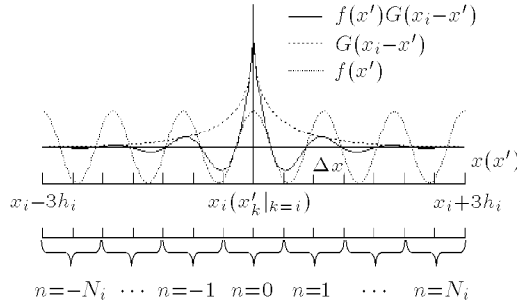


图 3 积分算子 T 计算示意图

Fig.3 The computation of the integral operator T

式 (29) 中积分可写成 $2N_i + 1$ 个积分单元上的积分和的形式

$$T\{f(x_i, t)\} = \sum_{n=-N_i}^{N_i} s_n, \quad s_n = \int_{x'_{i+2n-1}}^{x'_{i+2n+1}} f(x', t) G(\chi) dx' \quad (31)$$

式中 s_n 表示积分单元上的积分.

被积函数 $f(x', t)$ 可采用拉格朗日插值多项式来近似表达

$$f(x', t) = \sum_{k=i+2n-1}^{i+2n+1} a_k(x') f(x'_k, t) \quad (32)$$

式中 $a_k(x') = \prod_{\substack{l=i+2n-1 \\ l \neq k}}^{i+2n+1} \left(\frac{x' - x'_l}{x'_k - x'_l} \right)$, $f(x'_k, t)$ 为网格节点上的函数值.

鉴于核函数的特殊性, 采用对数函数多项式来近似表示 $G(\chi)$

$$G(\chi) = c_1 + c_2 \ln(\chi)^2 + c_3 \chi^2 + c_4 \chi^2 \ln(\chi)^2 + c_5 \chi^4 + c_6 \chi^4 \ln(\chi)^2 \quad (33)$$

式中, 核函数的值可由式 (12) 来计算, 系数 c_i ($i = 1, 2, \dots$) 可通过求解线性代数方程组求出. 为了编程和表达的方便, 可将上式写成矩阵乘积的形式

$$s_n = C \left(\int_{x'_{i+2n-1}}^{x'_{i+2n+1}} P^T A^T dx' \right) F^T \quad (34)$$

式中

$$F = (f(x'_{i+2n-1}, t) f(x'_{i+2n}, t) f(x'_{i+2n+1}, t))$$

$$C = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)$$

$$P = (1 \ \ln(\chi^2) \ \chi^2 \ \chi^2 \ln(\chi^2) \ \chi^4 \ \chi^4 \ln(\chi^2))$$

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{x' - x'_{i+2n}}{x'_{i+2n-1} - x'_{i+2n}} \right) \left(\frac{x' - x'_{i+2n+1}}{x'_{i+2n-1} - x'_{i+2n+1}} \right) \\ \left(\frac{x' - x'_{i+2n-1}}{x'_{i+2n} - x'_{i+2n-1}} \right) \left(\frac{x' - x'_{i+2n+1}}{x'_{i+2n} - x'_{i+2n+1}} \right) \\ \left(\frac{x' - x'_{i+2n-1}}{x'_{i+2n+1} - x'_{i+2n-1}} \right) \left(\frac{x' - x'_{i+2n}}{x'_{i+2n+1} - x'_{i+2n}} \right) \end{pmatrix}$$

式 (34) 右端中间积分项可解析求出.

3.3 边界条件及数值滤波和消波

本文计算中采用两种入射边界条件, 一种为边界入射, 另一种为内部造波. 边界入射的波浪采用 Stokes 波^[1]; 内部造波则采用 Hsiao 等^[9] 的内部造波法. 在计算区域的开边界, 可借助于“数值海绵层”^[10] 使波浪在该边界被吸收.

由于控制方程中含有高阶导数项, 在计算过程中, 容易产生数值短波, 导致计算崩溃. 消除这种高频波的有效方法是数值滤波. Shapiro 等^[11] 详细描述了加权平均的滤波方法, 本文采用 Shapiro 和 Dancy 的四阶滤波公式对计算中原始变量 η 和 ϕ_η 进行数值滤波.

4 数值结果和讨论

4.1 一阶方程结果验证

设置长度为 20 倍波长、水深 $h = 1.0 \text{ m}$ 的均匀水深水槽. 水槽的左端为入射边界, 右端设置 3 倍波长的数值海绵吸收层. 通过给定不同周期, 对从深水到浅水的线性波浪的传播进行较为系统的模拟. 计算波高取为 $H = 0.001 \text{ m}$, 其他各参数见表 1. 图 4 对 $t = 40T$ 时刻的波面空间分布 $\eta(x)$ 的数值计算结果 (实线) 与理论结果 (点线) 进行了比较. 由图可知, 波面空间分布 $\eta(x)$ 的数值计算结果与理论结果对各种水深都吻合良好, 这验证了所建立方程具有完全精确色散性的特征, 其适用于从深水到浅水水域波浪传播的数值模拟. 计算中发现, 周期越小的情况, 核函数项所需的积分范围越大, 见表 1 中第 3 列结果. 其原因可能是由于在积分过程中, 理论上积分上下限应是正负无穷大, 而数值计算要对积分上下限进行截断处理, 取有限长度. 由于被积

表 1 常水深线性波浪计算参数表 ($H = 0.001\text{ m}$, $h = 1.0\text{ m}$)

Table 1 Parameters for linear wave cases (constant water depth, $H = 0.001\text{ m}$, $h = 1.0\text{ m}$)

Case	T/s	The truncated length of the integrals	Wave length	Relative water depth		Wave steepness	
		λ	L/m	h/L	kh	H/L	kA
(a)	0.2	5	0.062	16.01	100.6	0.016	0.05
(b)	0.5	5	0.390	2.562	16.10	0.002 6	0.008
(c)	1.0	4	1.56	0.641	4.027	0.000 641	0.002
(d)	2.0	3	5.22	0.192	1.205	0.000 192	0.000 6
(e)	5.0	3	15.24	0.066	0.412	0.000 066	0.000 2
(f)	10.0	3	31.11	0.032	0.202	0.000 032	0.000 1

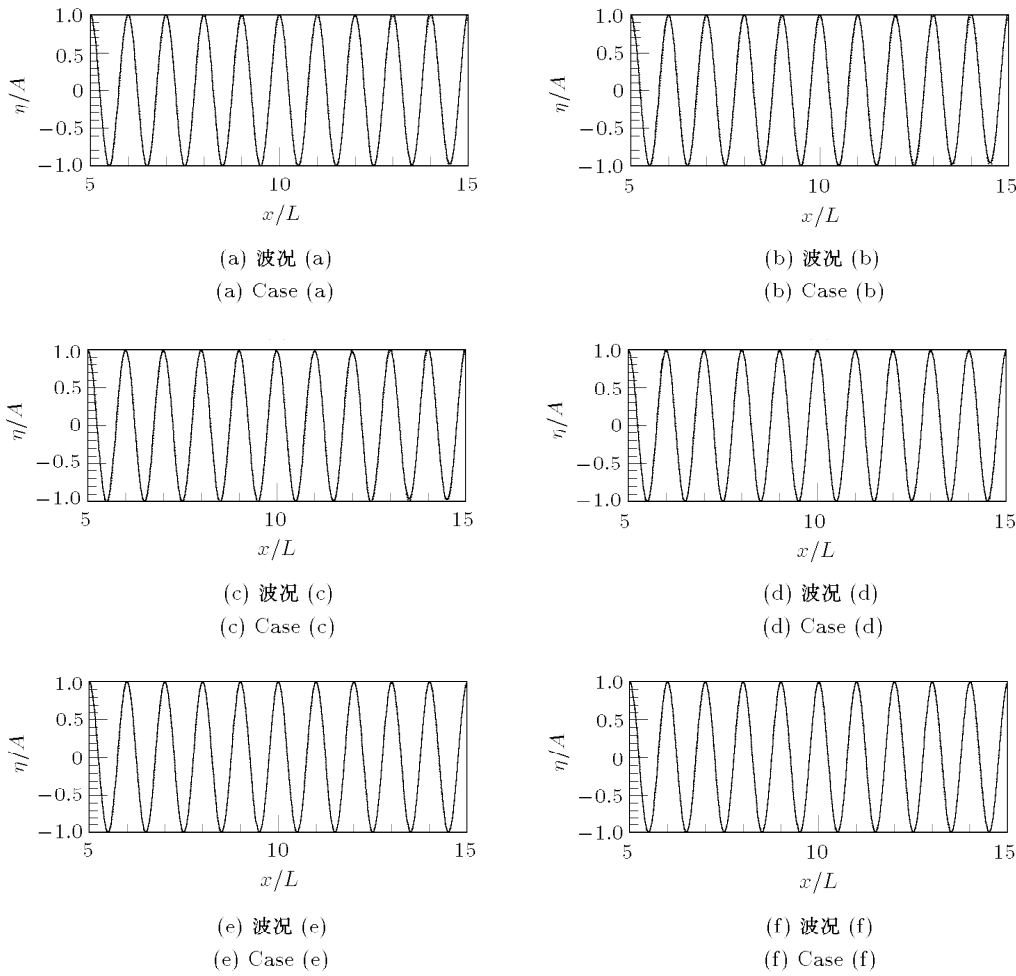


图 4 一阶波面升高空间变化的数值计算与理论结果的比较

Fig.4 The spatial variations of wave surface elevations for first order waves

函数是 $f(x',t)$ 和核函数 $G(\lambda)$ 的乘积项, 因此, $f(x',t)$ 的大小对截断误差也有一定的影响, 计算积分算子 T 时, 不单纯要考虑核函数的值, 还要考虑 $f(x',t)$ 的大小, 由于计算中 $f(x',t)$ 均与空间导数项有关, 因此, 随着周期的减小, 波陡 kA 增大, $f(x',t)$ 值增大, 所以, 总的积分范围必须延长才能得到较

满意的计算结果.

4.2 二阶方程结果验证

这里取与上面一阶方程计算同样的水槽, 但对入射波浪取了不同的波高以考虑波浪非线性的影响, 同时取不同波浪周期, 考虑从深水到浅水水域的情

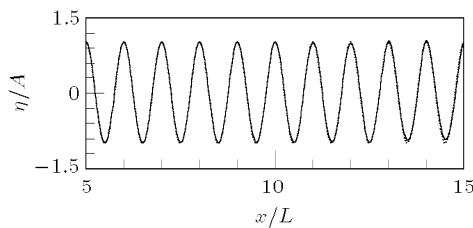
况, 以进一步验证方程色散性的精度, 具体计算情况见表 2. 图 5 给出了 $t = 40T$ 时刻各波况的波面空间分布 $\eta(x)$ 的数值计算结果 (实线) 与理论结果 (点线) 比较. 在波况 (a) 至波况 (e) 的数值求解过程中, 空间步长取为 $\Delta x = L/40$, 时间步长取为 $\Delta t = T/80$, 由于波况 (f) 周期较大, 采用同样的步长, 则表示积

分项分段数的参数 N_i 值偏小, 即核函数影响区间内所包含的网格个数偏小, 影响核函数多项式的计算精度, 因此, 计算中空间步长取为 $\Delta x = L/80$, 时间步长取 3 为 $\Delta t = T/160$. 入射波浪和用来进行对比的理论结果均采用二阶非线性 Stokes 波^[1]. 由图可知, 波面空间分布 $\eta(x)$ 的数值计算结果与理

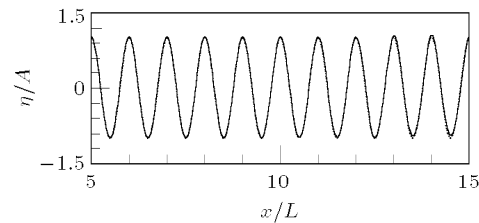
表 2 常水深二阶非线性波计算参数表 ($h = 1.0$ m)

Table 2 The parameters for second order nonlinearity waves (constant water, $h = 1.0$ m)

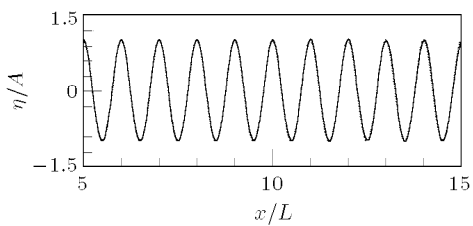
Case	T/s	H/m	The truncated length of the integrals	Wave length L/m	H/h	Relative water depth		Wave steepness	
			λ			h/L	kh	H/L	kA
(a)	0.7	0.01	5	0.765	0.01	1.307	8.213	0.013	0.041
(b)	1.0	0.02	5	1.560	0.02	0.641	4.027	0.013	0.040
(c)	1.5	0.05	5	3.351	0.05	0.298	1.875	0.015	0.047
(d)	3.0	0.04	5	8.69	0.04	0.115	0.732	0.005	0.014
(e)	5.0	0.02	3	15.24	0.02	0.066	0.412	0.0013	0.004
(f)	7.0	0.03	3	21.60	0.03	0.046	0.291	0.0014	0.004



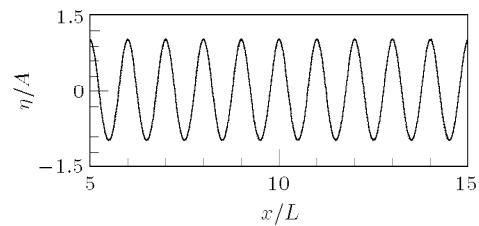
(a) 波况 (a)
(a) Case (a)



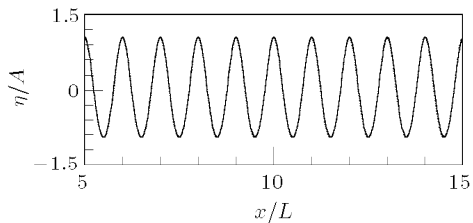
(b) 波况 (b)
(b) Case (b)



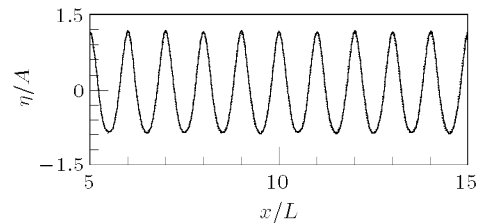
(c) 波况 (c)
(c) Case (c)



(d) 波况 (d)
(d) Case (d)



(e) 波况 (e)
(e) Case (e)



(f) 波况 (f)
(f) Case (f)

图 5 二阶波面升高空间变化的数值计算与理论结果的比较

Fig.5 The spatial variations of wave surface elevations for second order waves

论结果吻合良好,表明本模型适用于从深水到浅水水域的二阶非线性波浪的数值模拟.

4.3 三阶方程结果验证

三阶波浪区别于二阶波浪的重要特征是其存在波幅离散^[1]和四波共振非线性相互作用^[12].这两个非线性特征可以通过波群的传播充分表现出来:前者使波群在传播过程中产生前后不对称,即波群前部分被压缩而后部分被拉长;后者在波群传播过程中会激发起新的自由波成分,使振幅谱发生改变.因此,这里采用波群非线性演化作为算例,考察本文所建立的方程对三阶非线性波浪的模拟精度.算例采用 Shemer 等^[13]进行的常水深波群传播变形的模型实验.实验水槽长 18 m,宽 1.2 m.浪高仪在沿波浪传播方向的 8 个测点上记录波面升高的时间序列,实验水深 h 为 0.6 m,波浪周期 T_0 分别为: 0.7 s, 0.9 s. 实验中分别采用 3 种驱动信号,第 1 种驱动信号为

$$s(t) = a_0 \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t), \quad \Omega = \omega_0/20 \quad (35)$$

式中, a_0 为振幅, ω_0 为载波角频率, Ω 为调制频率. 波群周期为 $\tau = 20T_0$ (T_0 为载波周期, $T_0 = 2\pi/\omega_0$). 该信号谱为双峰谱,即由两个相同振幅不同频率的波浪组成,分别与载波频率 ω_0 偏离 $\pm\omega_0/20$ (见图 6).

第 2 种驱动信号为

$$s(t) = a_0 |\cos(\Omega t)| \cos(\omega_0 t), \quad \Omega = \omega_0/20 \quad (36)$$

该驱动产生的波群包络线与第 1 种驱动信号 (35) 相同,但波群周期和振幅谱不同. 上式对应的波群周期为 $\tau = 10T_0$; 上式对应的振幅谱由一个主峰和位于其两侧的两个次峰组成,频率间隔为 $\omega_0/10$ (见图 8).

第 3 种驱动信号为

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= a_0 \exp(-(t/mT_0)^2) \cos(\omega_0 t) \\ m &= 3.5, -16T_0 < t < 16T_0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

波群周期为 $\tau = 32T_0$, 相对于前两种驱动信号,信号 (37) 的振幅谱呈高斯型分布,谱宽也较大(见图 10).

数值模拟中采用内部造波法进行数值造波,两侧边界设置 3 倍波长的数值海绵吸收边界,空间步长取为 $\Delta x = L_0/40$,考虑到计算振幅谱时,FFT(快

表 3 波群计算参数表

Table 3 Parameters for the waves group simulations

Case	Driving signal	a_0/m	T/s	h/m	$k_0 h$	$k_0 a_0$
(a)	(35)	0.042	0.9	0.6	3.0	0.21
(b)	(36)	0.042	0.9	0.6	3.0	0.21
(c)	(37)	0.028	0.704	0.6	4.872	0.227

速傅立叶) 变换需要输入 2^n 个值,因此计算中,驱动信号 (35) 和 (36) 的时间步长取为 $\Delta t = T_0/51.2$,驱动信号 (37) 的时间步长取为 $\Delta t = T_0/64$, L_0 为载波的波长. 由于第 3 种驱动信号 (37) 相对较复杂、信号谱较宽、周期较小,因此,计算中,核函数的影响范围取为 6 倍水深 ($\lambda = 6$),其余两种信号均取为 3 倍水深 ($\lambda = 3$). 数值模拟的波群参数见表 3,实验测量和数值模拟的波面升高随时间的变化以及实验测量和数值模拟的振幅谱分布见图 6~ 图 11.

图 6,图 8 和图 10 分别给出 3 种造波信号下离造波板 0.24 m, 9.47 m(或 8.67 m) 处的实验测量和数值模拟的振幅谱分布图,由图可见,随着波群沿水槽的传播,振幅谱由起始位置 ($x = 0.24$ m) 的左右对称形状演变成水槽末端 ($x = 9.47$ m 或 $x = 8.67$ m) 的左右不对称形状,在高频一侧出现了新的波浪成分. 这反映了四波共振非线性作用导致新波浪成分的生成. 本文精确色散性方程的计算结果与实验结果吻合良好,反映了该方程对这一三阶非线性现象可以给出很好的数值模拟结果. 因为数值模拟采用内部造波生成波浪,而模型实验是采用造波板,所以二者所产生波浪的振幅谱有时会存在一些微小差别,如图 6 中 $x = 0.24$ m 处结果,又如图 10 中计算结果在倍频频率带(围绕 $f = 2.8$ Hz) 存在能量分布,而实验结果没有,除此以外其它图中差别是很小的.

图 7,图 9 和图 11 分别给出了对应图 6,图 8 和图 10 的离造波板 0.24 m, 3.69 m(或 2.89 m), 6.58 m(或 5.78 m), 9.47 m(或 8.67 m) 处的波面升高时间历程. 由图可见,在靠近造波板处 ($x = 0.24$ m),波群剖面前后是对称的. 随着波群沿水槽的传播,波群前后出现不对称,波群前部分被压缩而后部分被拉长. 这是由于波群前后部分的波幅小于波群中间的波幅,由波幅离散可知,小振幅波浪的传播速度较小,所以使得波群前的波浪被压缩,而波群后的波浪被拉伸,从而出现波群前后不对称现象. 以上各图中,计算结果与实验结果吻合程度很好,进一步验证了本

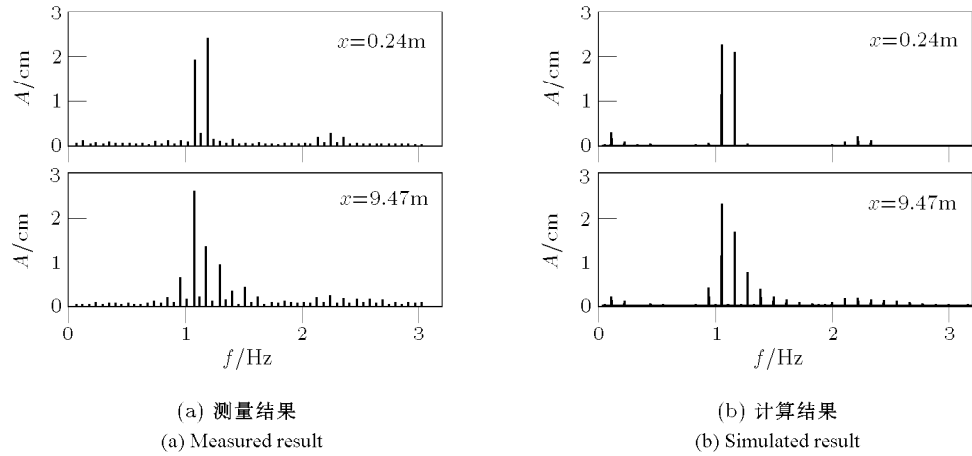


图 6 测量及计算的振幅谱对比 (波况 (a))

Fig.6 The measured and simulated amplitude spectra (case (a))

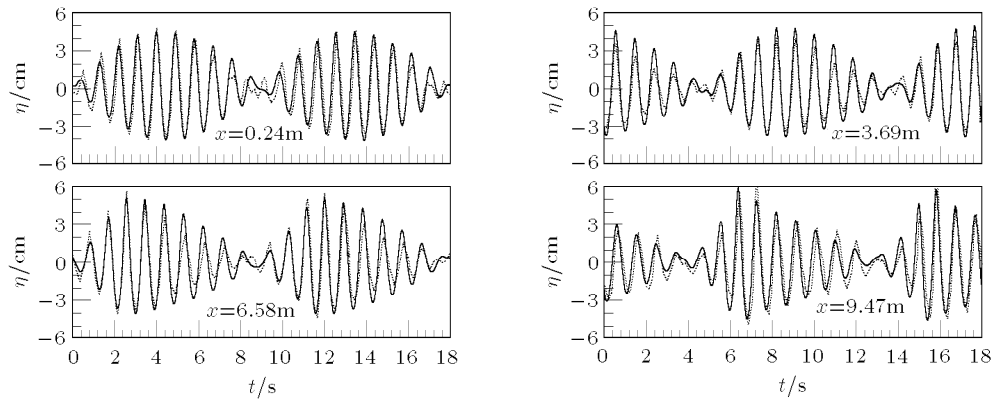


图 7 测量及计算的波面升高对比 (波况 (a))

Fig.7 The measured and simulated surface elevation (case (a))

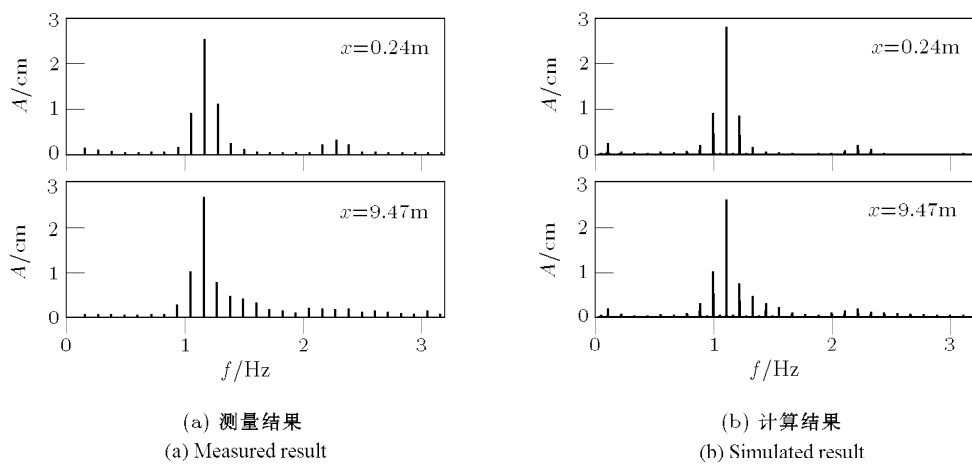


图 8 测量及计算的振幅谱对比 (波况 (b))

Fig.8 The measured and simulated amplitude spectra (case (b))

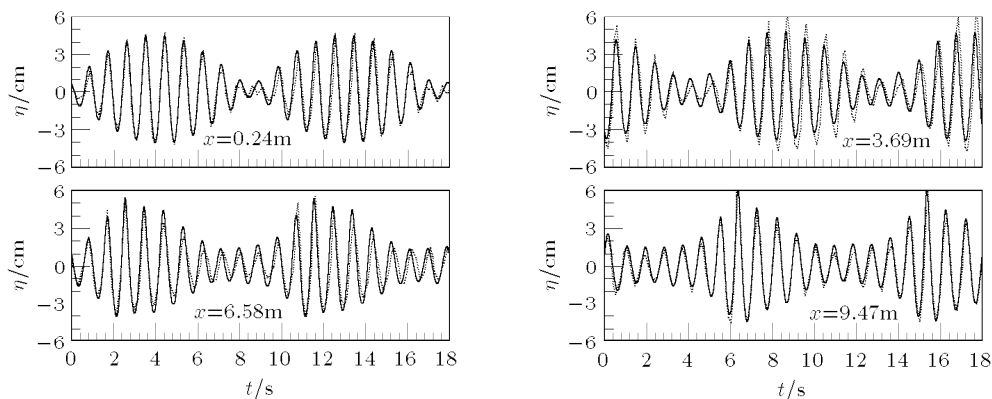


图 9 测量及计算的波面升高对比图 (波况 (b))

Fig.9 The measured and simulated surface elevation (case (b))

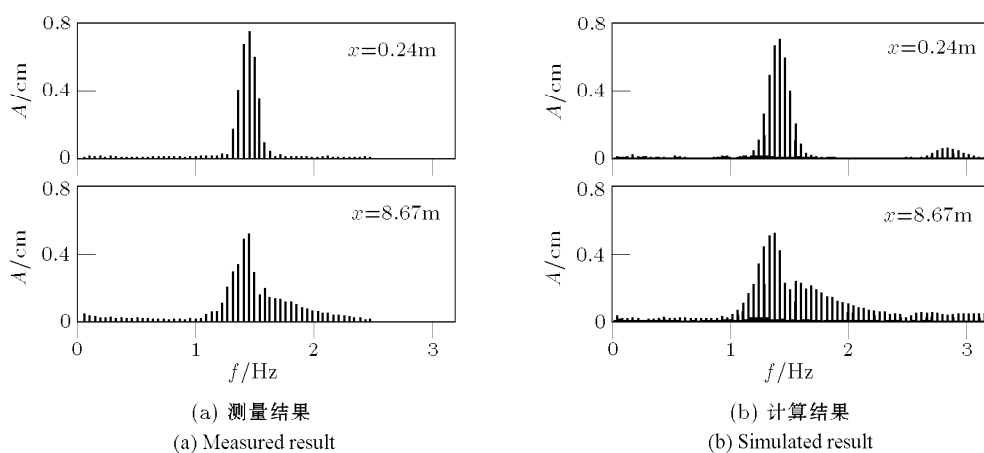
(a) 测量结果
(a) Measured result(b) 计算结果
(b) Simulated result

图 10 测量及计算的振幅谱对比 (波况 (c))

Fig.10 The measured and simulated amplitude spectra (case (c))

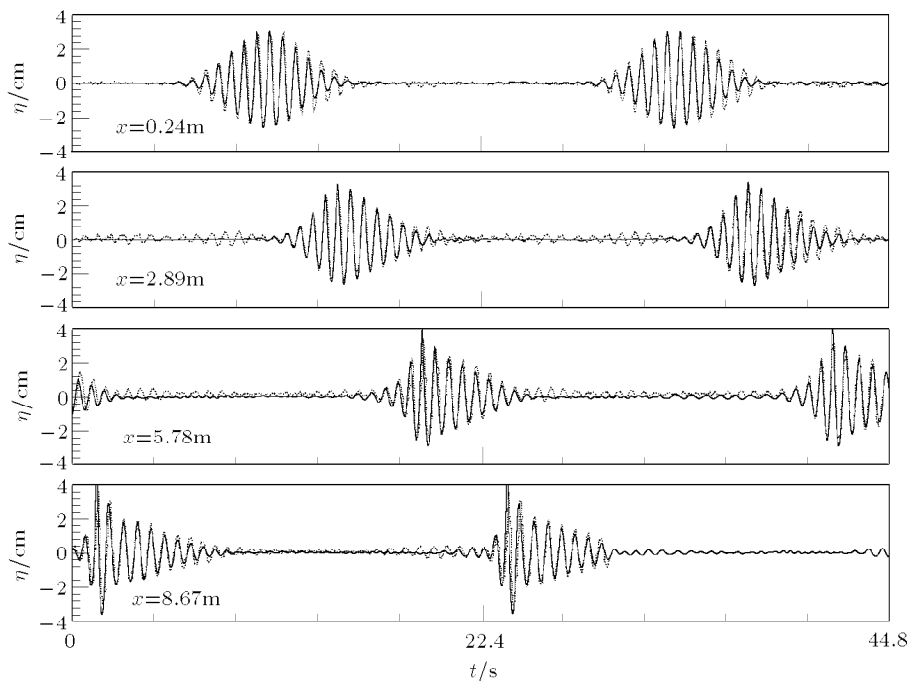


图 11 测量及计算的波面升高对比图 (波况 (c))

Fig.11 The measured and simulated surface elevation (case (c))

文方程和数值模型的精度.

注意到, 本文模型非线性精确到三阶, 而实验结果包含了全部非线性, 但以上计算和实验结果的符合程度表明, 计算模型所没有考虑的四阶以上非线性的影响不大.

5 结 论

本文建立了一个新的具有精确色散性和三阶非线性(垂直)二维波浪方程, 方程推导从完全非线性的自由表面边界条件出发, 所得方程以波面升高 η 和自由表面速度势 ϕ_η 表达. 方程在色散性上是完全精确的, 非线性近似至三阶. 方程具有很宽的水深适用范围(从深水到浅水), 方程形式也较简单. 方程的特点是属于微分-积分方程, 与一般微分方程相比较, 该方程数值求解的特殊性在于积分项的处理, 通过对方程中积分算子 T 和核函数 G 的性质分析, 本文给出了数值求解该方程的具体方法.

对控制方程 (17) 和 (18) 及其一阶、二阶近似方程分别进行验证. 与常水深线性波、二阶 Stokes 波的解析结果进行比较, 计算结果与解析结果符合很好, 说明该方程可适用于从深水到浅水水域的线性波以及非线性波的传播变形计算, 同时验证了本文给出的数值求解方法是有效的. 对常水深波群非线性演化模型实验^[13] 的数值模拟结果表明, 计算结果与实验结果吻合, 特别是对由三阶非线性特征——波幅离散和四波共振非线性相互作用引起的波群和振幅谱的不对称现象给出了具有较高精度的模拟结果, 显示了本文方程完全精确色散性的优点.

参 考 文 献

1 邹志利. 水波理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2005(Zou Zhili.

Water Wave Theories and Their Applications. Beijing: Science Press, 2005 (in Chinese))

- 2 Berkhoff JCW. Computation of Combined Refraction-Diffraction. In: Proc 13th Int Conf Coastal Eng, ASCE, Vancouver, Canada, 1972. 471~490
- 3 Beji S, Nadaoka K. A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves. *Proc R Soc Lond, A*, 1997, 453: 319~332
- 4 Nadaoka K, Beji S, Nakagawa Y. A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proc R Soc Lond, A*, 1997, 453: 303~318
- 5 Schäffer HA. Another step towards a post-boussinesq wave model. In: Proc 29th Int Conf Coastal Eng, ASCE, Lisbon, Portugal. 2004. 132~144
- 6 Dommermuth DG, Yue DKP. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J Fluid Mech*, 1987, 184: 267~288
- 7 金红. 具有精确色散性的线性和非线性波浪模型. [博士论文]. 大连: 大连理工大学, 2008 (Jin Hong. Linear and nonlinear wave models with accurate dispersion. [Ph D Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008 (in Chinese))
- 8 Broer LJJ. On the Hamiltonian theory of surface waves. *Appl Sci Res*, 1974, 30: 430~446
- 9 Hsiao SC, Lynett P, Hwang HH, et al. Numerical simulations of nonlinear short waves using the multi-layer model. *Journal of Engineering Mechanics*, 2005, 131(3): 231~243
- 10 Larson J, Dancy H. Open boundary in short wave simulations—a new approach. *Coastal Eng*, 1983, 7: 285~297
- 11 Shapiro R, Dancy H. Open boundaries in short-wave simulation: A new approach. *Coastal Eng*, 1983, 7(3): 285~297
- 12 Phillips OM. On the dynamics of unsteady gravity waves on finite amplitude. Part 1. The elementary interaction. *J Fluid Mech*, 1960, 9: 193~217
- 13 Shemer L, Jiao H, Kit E, et al. Evolution of a nonlinear wave field along a tank: experiments and numerical simulations based on the spatial Zakharov equation. *J Fluid Mech*, 2001, 427: 107~129

(责任编辑: 刘俊丽)

THE NONLINEAR WATER WAVE EQUATIONS WITH FULL DISPERSION¹⁾Jin hong^{*,†,2)} Zou Zhili^{*}^{*}(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)[†](Dalian Municipal Design and Research Institute of Environmental Science, Dalian 116023, China)

Abstract A 2D nonlinear water wave model with full dispersion is developed. The model is based on the nonlinear kinematic and dynamic free surface boundary conditions and is expressed in terms of free surface elevation η and the velocity potential ϕ_η at the free surface. The derivation of the equations is accurate to third order in nonlinearity and keeps exact dispersion. The mild slope assumption is adopted and the derived equations can be seen as the extension of the mild slope equation of Berkhoff (1972) to the nonlinear and irregular wave case. The corresponding numerical scheme is presented, and the special attention is paid on the treatment of the integration terms in the equations. The validation of the model is made by simulating the first and second order Stokes waves and the nonlinear evolution of wave groups, the advantage of the model is shown by the good prediction of amplitude dispersion and four-wave resonant interaction for the wave group evolution.

Key words full dispersion, nonlinearity, wave groups, amplitude dispersion, four-wave resonant interaction

Received 3 February 2008, revised 20 March 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50479053,10672034), Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20040141030) and Research Team in Higher Educational Institutions of Liaoning Province.

2) E-mail: jinhong103@sina.com