

含分数阻尼特性元件的多体系统动力学研究¹⁾

田 强²⁾ 张云清 陈立平 覃 刚

(华中科技大学 CAD 中心, 武汉 430074)

摘要 在绝对节点坐标体系下研究了具有分数导数阻尼特性元件的多体系统动力学建模、求解问题。采用基于绝对节点坐标的无闭锁效应剪变梁单元离散柔性构件, 建立了含常数质量矩阵的系统动力学方程, 并采用数值耗散可控的广义 α 方法求解。通过数值算例计算, 对比研究了算法参数与阻尼项的分数指数对系统动力学响应的规律。该方法可以进一步扩展到众多工程实际问题研究中。

关键词 绝对节点坐标, 分数导数, 广义 α 方法, 数值耗散, 多体系统

中图分类号: O345 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)06-0920-09

引 言

多刚体系统动力学理论已经相当成熟, 国内众多学者在理论及工程应用研究方面均做出了很多成果^[1~3]。但是随着技术的进步, 人们对设备的精度要求越来越高, 柔性部件被广泛使用于各个领域。于是, 柔性多体大变形动力学问题便不断出现, 如空间站细长机械臂的大变形振动问题, 电力机车运动过程中电力牵引线的大变形问题, 卫星太阳能电池帆板展开过程中的大变形问题等; 传统基于小变形假设的动力学模型建模方法已经不能得到这类大变形柔性多体动力学问题的精确结果^[4]。Shabana^[5]提出了解决这类柔性多体大变形系统动力学问题的绝对节点坐标法 (absolute nodal coordinate formulation), 该方法推导建立的多体系统微分代数方程具有常数惯量矩阵、不存在柯氏加速度项和离心加速度项等特点。这些特点使绝对节点坐标方法构建的动力学模型比传统浮动坐标法、大转动矢量法等更能精确地描述柔性多体系统。绝对节点坐标法已被认为是柔体多体系统动力学历史上的一个重要进展之一^[6,7], 它的出现促使柔性多体系统动力学理论与有限元理论进一步整合, 它一直是多体系统动力学研究者着力研究的热点问题之一。目前该方法已经被用来解决列车电力牵引线系统^[8]、带轮驱动系统^[9]、大变形绳索系统^[10]等众多动力学问题。我

国在绝对节点坐标方法的研究方面起步较晚, 李彬等^[11]对比研究了绝对节点坐标法与一次近似法, 数值计算结果表明绝对坐标法比一次近似的混合坐标法模型更精确, 更适合于描述大变形动力学问题。刘锦阳等^[12]采用绝对节点坐标方法实现了空间刚体柔性梁系统动力学分析。刘锦阳等^[13]提出了一套混合坐标体系, 采用绝对节点坐标方法验证了其仿真结果的正确性。

在很多多体系统中, 如汽车悬架系统、汽车底盘系统等均存在着阻尼元件, 传统方法研究中一般采用整数阶的阻尼数学模型^[14], 如 Kelvin-Voigt 模型和 Maxwell 型; 但是研究发现具有分数导数项的阻尼模型能更好地描述这类元件的阻尼特性, 并且分数导数阻尼模型可以退化为整数阶阻尼模型^[15,16]。张云清等^[17]在绝对节点坐标体系下研究了具有分数导数本构的黏弹性多体系统动力学特性。在以上工作基础上, 本文进一步研究了具有分数导数阻尼特性元件的多体系统动力学建模、求解问题, 探讨了在不同算法参数及分数指数下系统的动力学特性。

1 绝对节点坐标体系下的单元动力学方程

García-Vallejo 等^[18]提出了绝对节点坐标体系下的一种无剪变闭锁效应的三节点剪变梁单元, 如图 1 所示。

2008-09-03 收到第 1 稿, 2008-10-22 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金重点基金子课题 (60736019) 和自然科学基金 (60874064) 资助项目。

2) E-mail: tianqiang_hust@yahoo.com.cn

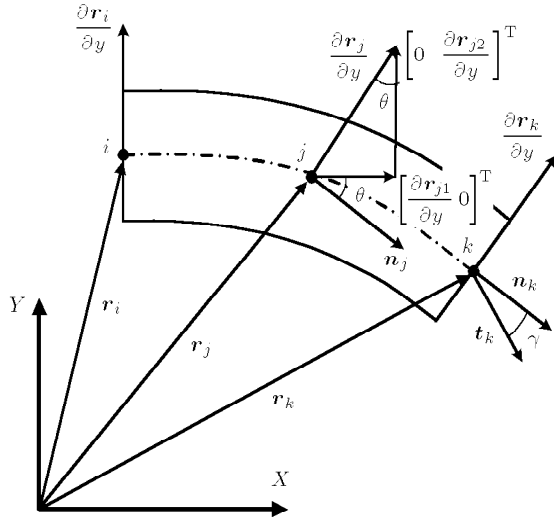


图 1 基于绝对坐标的三节点无闭锁效应剪应变梁单元

Fig.1 The ANC-based three nodes locking-free shear deformable element

单元的位移场定义为全局坐标系 (X-Y) 下的三阶不完备多项式

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5x^2y \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5x^2y \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{e} \quad (1)$$

式中, X, Y 表示单元上任意点的全局坐标; x, y 为单元局部坐标; $\mathbf{S}$ 为单元形函数

$$\mathbf{S} = [S_1 \mathbf{I}_2 \quad S_2 \mathbf{I}_2 \quad S_3 \mathbf{I}_2 \quad S_4 \mathbf{I}_2 \quad S_5 \mathbf{I}_2 \quad S_6 \mathbf{I}_2] \quad (2)$$

式中, $\mathbf{I}_2$ 为 2×2 的单位阵

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2, \quad S_2 = y\left[1 - 3\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \\ S_3 &= 4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right], \quad S_4 = y\left[4\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \\ S_5 &= -\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2, \quad S_6 = y\left[-\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \end{aligned}$$

l 为单元长度. 此单元每节点 4 个绝对坐标, 单元的节点坐标矢量可表达为

$$\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}]^T = \begin{bmatrix} r_{i1}, r_{i2}, \frac{\partial r_{i1}}{\partial y}, \frac{\partial r_{i2}}{\partial y}, r_{j1}, r_{j2}, \frac{\partial r_{j1}}{\partial y}, \frac{\partial r_{j2}}{\partial y}, \\ r_{k1}, r_{k2}, \frac{\partial r_{k1}}{\partial y}, \frac{\partial r_{k2}}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

如图 1 所示, 矢量 $[r_{m1}, r_{m2}]^T$ ($m = i, j, k$) 表示位置矢量, 节点处角度 θ 代表截面方向 (i, k 处类似) 可以用矢量 $\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{j1}}{\partial y} \\ \frac{\partial r_{j2}}{\partial y} \end{bmatrix}^T$ 表示, 即

$$\cos \theta = \frac{\partial r_{j2}}{\partial y} / \sqrt{\left(\frac{\partial r_{j2}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_{j1}}{\partial y}\right)^2} \quad (4)$$

图 1 中 $\mathbf{n}_m$ 表示截面法向矢量, $\mathbf{t}_m$ 为与梁中线相切的矢量, $\mathbf{t}_m = \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial x}$. 角度 γ 用来描述单元剪切变形. 无约束单元的动力学方程可表达为

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}_e - \mathbf{F}_e \quad (5)$$

式中, $\mathbf{M}_e = \int_v \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dv$ 为单元常数质量矩阵, $\mathbf{F}_e$ 代表单元的弹性力, 可以基于连续介质力学理论^[19] 得到其表达式. $\mathbf{Q}_e$ 代表广义外力.

2 绝对节点坐标体系下多体系统微分 - 代数方程组的广义 a 方法求解

绝对坐标体系下, 可按传统有限元方法组装单元, 引入约束条件最终可以得到约束系统的方程为^[20]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{F}(\mathbf{q}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \\ \Phi(\mathbf{q}, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, $\Phi(\mathbf{q}, t)$ 为系统约束方程, Φ_q 为约束方程对系统广义坐标 $\mathbf{q}$ 的偏导数矩阵, $\boldsymbol{\lambda}$ 为拉格朗日乘子, $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ 系统广义力, $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ 代表系统弹性力. $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ 含有由分数阻尼特性元件转化的广义力. 图 2 为一端固定的分数阻尼 - 弹簧元件, 一端有一位移 q 及速度 $\dot{q}$, 则该元件产生的反力可以表达为^[15,16]

$$F = kq + cD^\alpha q \quad (7)$$

式中, k, c 为比例常数; D^α 为分数导数算子, α 为分数指数, $\alpha \in [0, 1]$. 当 $\alpha = 0$ 时, 不产生阻尼力, 为纯弹簧系统; 当 $\alpha = 1$ 时便成为传统的 Kelvin-Voigt 模型.

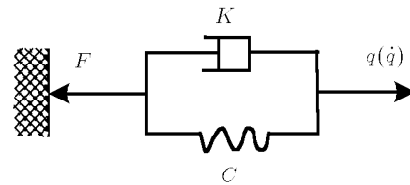


图 2 分数阻尼 - 弹簧元件

Fig.2 The spring-damper with fractional derivative model

如果图 2 变成扭转分数阻尼 - 弹簧元件, 则产生的反扭矩可以相应地表达为

$$T = k\theta + cD^\alpha\theta \quad (8)$$

根据 Grünwald 定义^[15]

$$D^\alpha q = (h)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1} q_{t-jh} \quad (9)$$

式中, A_{j+1} 称为 Grünwald 系数且 $A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j$, $A_1 = 1$. q_{t-jh} 表示 t 时刻前 j 步 q 的值, $\Gamma(\bullet)$ 为 Gamma 函数, N_t 为级数的截断阶数, h 为数值算法的积分步长. 因此式 (6) 可以进一步表达为

$$F = kq + c(h)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1} q_{t-jh} = kq + c(h)^{-\alpha} q_t + c(h)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} q_{t-jh} \quad (10)$$

扭矩 T 的计算类似. 显然 F 或 T 在 t 时刻的值不仅与当前的 q 值有关, 而且还与前 N_t 步 q 的值有关, 这就反应了阻尼元件的记忆特性. 式 (8) 可以得到类似结果, 将 T 或 F 转化成系统广义力后变可带入方程 (6) 进行数值计算. 一个值得关注的问题是有限元离散必然带来的系统伪高频振荡问题. 系统伪高频响应容易造成数值求解不易收敛, 所以一般需采用耗散可控的数值算法将其耗散. Fung^[21] 指出带耗散格式的 Newmark 方法虽然能对系统的高频响应进行耗散, 但是与此同时也会带来系统低频响应的过分丢失. Hussein 等^[22] 首次将 HHT 方法用来求解绝对坐标系下指标 3 的 DAEs(称为 HHT-I3 方法) 使得系统的高频响应耗散同时很好地保持了系统的低频响应特性. 但是 HHT 方法只是广义 $\mathbf{a}$ 方法的一种, 且广义 $\mathbf{a}$ 方法比 HHT 方法可以耗散系统更宽范围的高频响应^[23].

广义 $\mathbf{a}$ 方法对式 (6) 离散是基于 Newmark 方法^[24]. 根据 Newmark 方法系统的广义位置与广义速度可表达为

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}]/2 \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] \quad (12)$$

基于 Newmark 方法, 广义 $\mathbf{a}$ 方法, 引入新的算法矢量 $\mathbf{a}$ 参数, 将上两式进一步表达为

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2(1/2 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1} \quad (14)$$

其中矢量 $\mathbf{a}$ 参数满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n &= (1 - \alpha_f)\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_f\ddot{\mathbf{q}}_n \\ \mathbf{a}_0 &= \ddot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

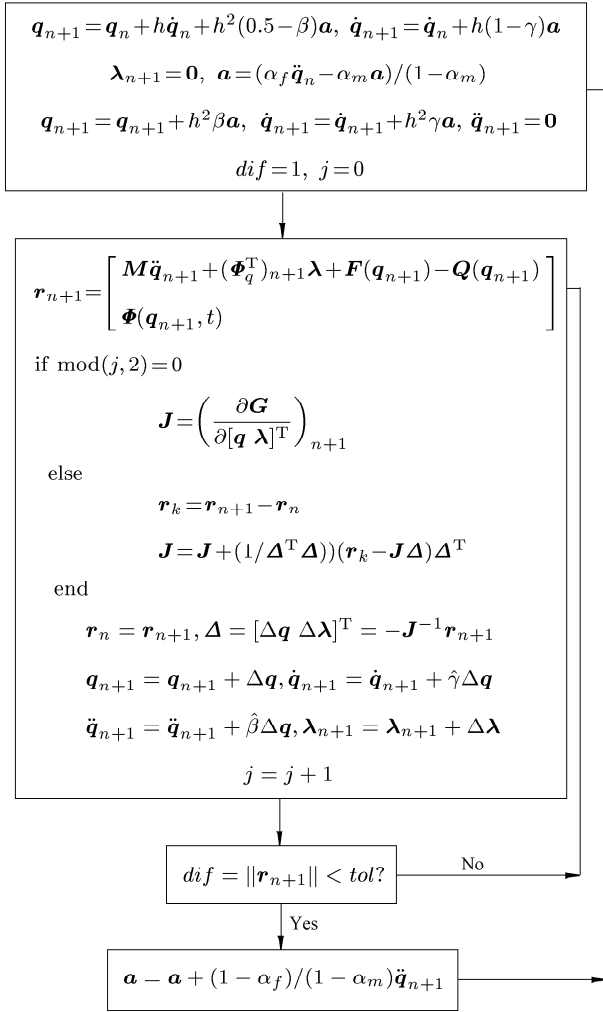
Chung 等^[25] 提出了一种能耗散系统高频响应同时较好保持系统低频响应的广义 $\mathbf{a}$ 方法参数选取方法

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{2\rho - 1}{\rho + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho}{\rho + 1} \\ \beta &= \frac{1}{4}(1 + \alpha_f - \alpha_m)^2, \quad \gamma = 1/2 + \alpha_f - \alpha_m \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 ρ 为算法的谱半径, 它决定算法能耗散能量分布的频率范围, $\rho \in [0, 1]$. ρ 值越大数值耗散越小, $\rho = 1$ 时算法将保持系统能量不产生耗散, $\rho = 0$ 时产生最大能量耗散. 由式 (15) 知当 $\alpha_m = \alpha_f = 0$ 时 $\mathbf{a}_{n+1} = \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ 及 $\mathbf{a}_n = \ddot{\mathbf{q}}_n$, 代入式 (13) 及式 (14), 广义 $\mathbf{a}$ 方法便退化成 Newmark 方法 (式 (11) 与式 (12)), 此时算法的谱半径为 $\rho = -\frac{2\gamma - 3}{1 + 2\gamma}$. 当 $\alpha_m = 0$ 时广义 $\mathbf{a}$ 方法就退化成 HHT 方法. 广义 $\mathbf{a}$ 方法与各种方法的关系讨论详见文献 [26].

本文采用 Arnold 等^[27] 提出的迭代方法并引入 Broyden^[28] 拟牛顿算法以提高计算效率, 得到求解方程 (6) 的迭代过程如图 3 所示. 图中: $\hat{\beta} = \frac{(1 - \alpha_m)}{h^2\beta(1 - \alpha_f)}$, $\hat{\gamma} = \frac{\gamma}{h\beta}$, 使得 $\frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{I}\hat{\beta}$, $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{I}\hat{\gamma}$ 成立, tol 为积分收敛精度, $\mathbf{J}$ 为 Jacobian 矩阵, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \lambda + \mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \\ \Phi(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}$. 由图中可以看出, 由于 Broyden 拟牛顿算法的引入, 在求解非线性代数方程时并不需要在每次迭代过程中通过使用 $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial [\mathbf{q} \ \lambda]^T}$ 来计算 Jacobian 矩阵 $\mathbf{J}$, 因此计算效率大大提高. 可以进一步得到 Jacobian 矩阵的具体表达式为

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial [\mathbf{q} \ \lambda]^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\hat{\beta} + (\Phi_q^T \lambda)_q + (\mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}))_q & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

图 3 广义 α 方法数值迭代流程Fig.3 The numerical iteration procedure for the generalized α method

由式 (17) 可见, 最繁琐的计算为计算弹性力对广义坐标的偏导数项, 即 $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$. 为提高计算效率, 针对这一问题 García-Vallejo 等^[28] 提出了不变矩阵方法. 按照这种方法, 弹性力可表达为

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)\mathbf{q} \quad (18)$$

式中 $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ 为系统非线性刚度矩阵, $\mathbf{K}_1$ 为一个常数刚度矩阵

$$\mathbf{K}_1 = (\lambda + \nu) \left(\int_{ve} \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} dV + \int_{ve} \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} dV \right) \quad (19)$$

同时 $\mathbf{K}_2$ 也可以表达为

$$[\mathbf{K}_2(\mathbf{q})]_{ij} = -\mathbf{q}^T \mathbf{C}_{K_2}^{ij} \mathbf{q} \quad (20)$$

式中, $\mathbf{C}_{K_2}^{ij}$ 为一个常数稀疏矩阵, 被称为不变矩阵. 经过推导得到弹性力对广义坐标的偏导数项可以表

达为

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{ik} = [\mathbf{K}_1]_{ik} - \sum_{j=1}^n (\mathbf{C}_{K_2}^{ij} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{C}_{K_2}^{ij} \mathbf{q}_j - \mathbf{q}^T \mathbf{C}_{K_2}^{ik} \mathbf{q}) \quad (21)$$

其中 $\mathbf{C}_{K_2}^{ij}$ 与 $\mathbf{C}_{K_2}^{ik}$ 分别代表不变矩阵 $\mathbf{C}_{K_2}^{ij}$ 的第 k 列与第 k 行, $\mathbf{q}_j$ 表示 $\mathbf{q}$ 的第 j 个元素. 采用不变矩阵方法计算弹性力对广义坐标的偏导数项也将大大提高计算效率^[29].

3 数值算例

算例 1 柔性单摆

如图 4 所示, 单摆长度为 1 m, 弹性模量 $E = 60$ MPa, 密度为 6000 kg/m^3 , 泊松比 ν 为 0.3. 杆截面为 $0.02 \times 0.02 \text{ m}$ 的正方形, 采用 5 个前文所述剪变梁单元离散, 弹簧的扭转刚度 $k = 10$, 阻尼比例常数 $c = 2$ (见式 (8)), 反作用扭矩施加在节点 O 处.

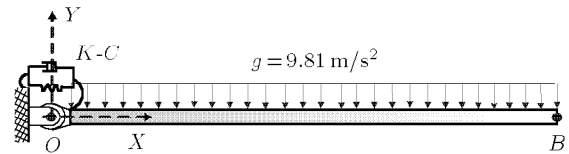


图 4 弹簧 - 阻尼 - 柔性单摆系统初始构形

Fig.4 The initial configuration of spring-damper single pendulum

为保证计算精度, 假设在 O 点处的截面为刚性, 不发生剪切变形. 假设 O 点所在单元的坐标矢量为 $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ \cdots \ e_{12}]^T$. 因此, 在节点 O 处, 除位置约束 ($e_1 = e_2 = 0$) 以外还需施加另一个约束条件, 即

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial y} \right)^T \frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

式 (1), (2) 两式同时考虑位置约束关系, 在 O 点有如下关系

$$\frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_3 & e_4 & \cdots & e_{12} \end{bmatrix}^T \Big|_{x=y=0} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_o}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_3 & e_4 & \cdots & e_{12} \end{bmatrix}^T \Big|_{x=y=0} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 4e_5 - e_9 \\ 4e_6 - e_{10} \end{bmatrix}$$

进一步推导得到

$$e_3(4e_5 - e_9) + e_4(4e_6 - e_{10}) = 0 \quad (23)$$

节点 O 点处的转角可将式 (4) 取反余弦计算. 由式 (8) 得到扭矩 T 后可按如下公式转换成系统的广义力带入式 (6), 采用广义 α 方法迭代求解

$$Q_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{Te_4}{e_4^2 + e_3^2} & \frac{-Te_3}{e_4^2 + e_3^2} & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

其中 n 为系统绝对坐标的总数. 本文采用 5 个单元, 因此 $n = 44$.

图 5~图 8 为无阻尼系统 (取 $\alpha = 0$) 仿真结果. 图 5 中 StraEng 表示柔性杆的应变能, KinEng 表示动能, GraEng 表示重力势能, SprEng 表示弹簧势能, TotEng 表示系统总能量. 由图中可以看出系统总能量基本保持不变. 图 6 表示算法参数 ρ 取值越小, 由算法本身耗散的能量越大.

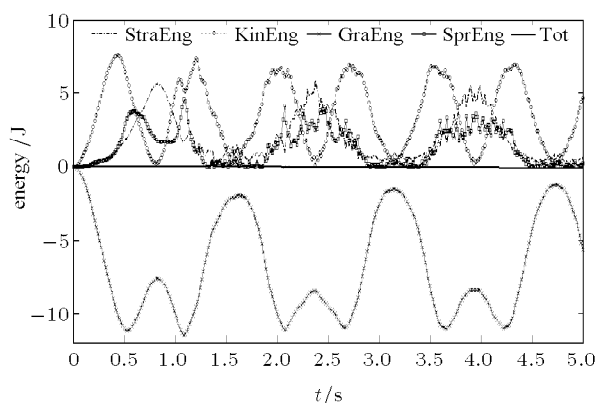


图 5 系统各种能量变化曲线 ($\rho = 0.9$)

Fig.5 Different kinds of energy variation ($\rho = 0.9$)

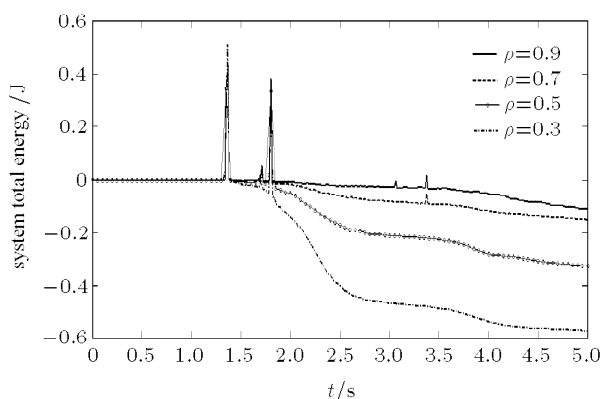


图 6 不同 ρ 值下系统总能量变化曲线

Fig.6 The system total energy variations under different ρ value

图 7 为不同算法参数 ρ 下单摆末端点 B 的 X 方向位移变化规律. 该图说明虽然算法本身耗散了能量但是并不影响计算结果的精度. 图 8 给出了单摆在不同时刻的空间构形, 及 B 点的轨迹.

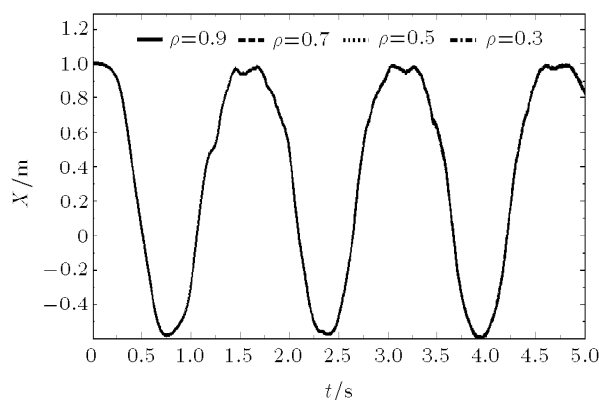


图 7 不同 ρ 值下 B 点 X 方向位移变化曲线

Fig.7 The B X -displacement variation under different ρ value

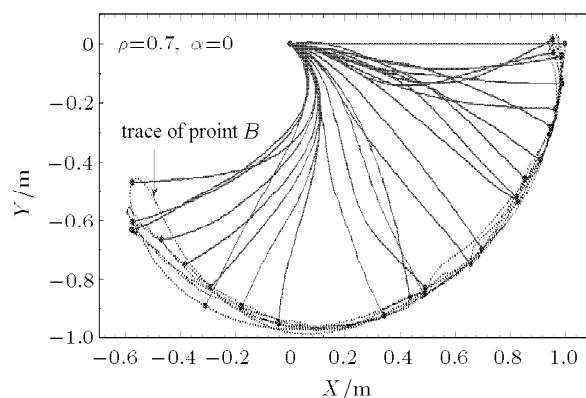


图 8 单摆不同时刻空间构形

Fig.8 The single pendulum configurations at different simulation time

图 9~图 12 为分数指数 α 取不同值的仿真结果. 显然随着 α 值的增大系统的阻尼越大, 当 $\alpha = 0$ 时便成为无阻尼系统. 图 10 中各种符号与图 5 一致, 可以看出系统总能量在不断地耗散. 图 12 表示 α 值越大, 系统能量耗散越大. 同样, 由图 12 知 α 值越大 B 点横向变形越小.

算例 2 柔性曲柄滑块机构

几何尺寸如图 13 所示的一柔性曲柄滑块机构, OA 杆 $E = 2.07 \times 10^5$ MPa, 密度为 7800 kg/m^3 , AB 杆弹性模量 $E = 700$ MPa, 密度为 6000 kg/m^3 , 泊松

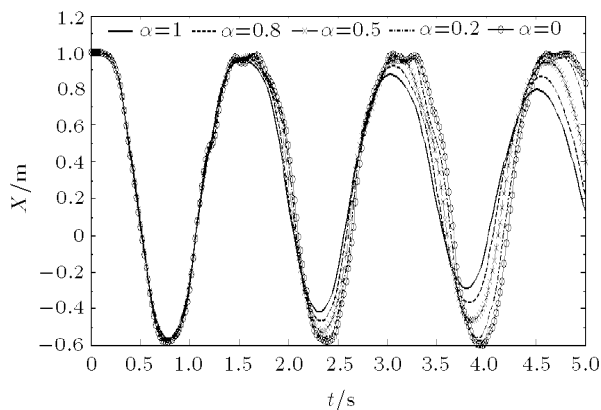
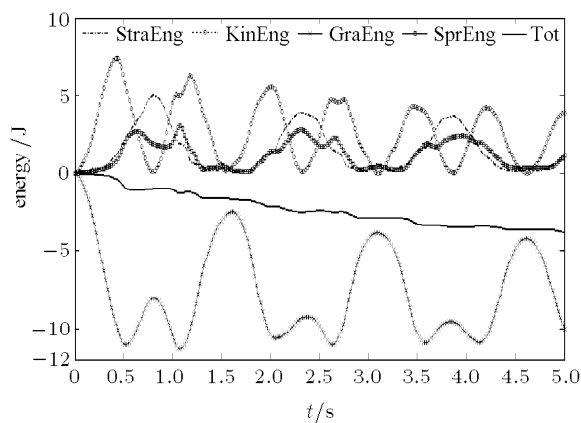
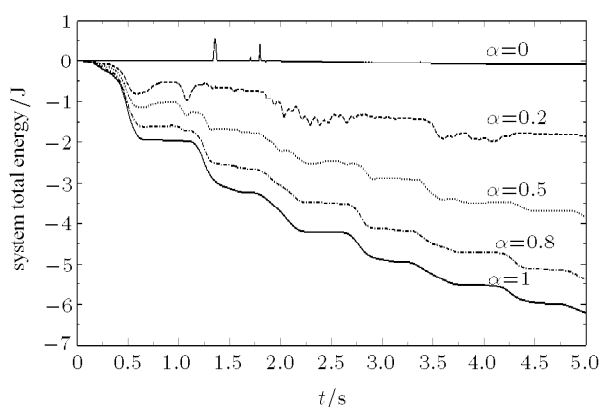
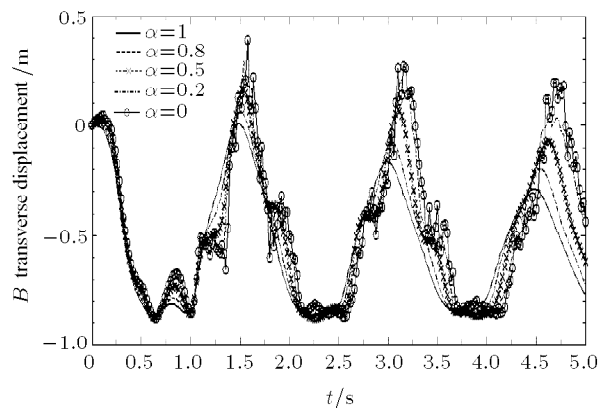
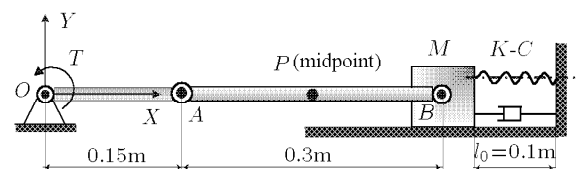
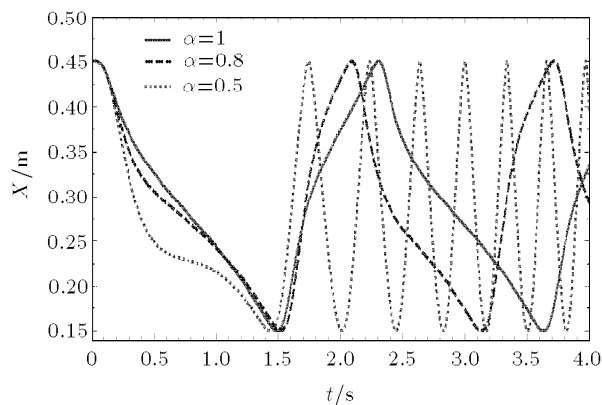
图 9 不同 α 值下 B 点 X 方向位移变化曲线Fig.9 The B X -displacement variation under different α value图 10 $\alpha = 0.5$ 时系统各种能量变化曲线Fig.10 Different kinds of energy variation ($\alpha = 0.5$)图 11 不同 α 值时系统总能量变化曲线Fig.11 The system total energy variations under different α value图 12 不同 α 值时 B 点横向变形变化曲线Fig.12 The B transverse deformation variations under different α value

图 13 柔性曲柄滑块机构初始构形

Fig.13 The initial configuration of the flexible crank-slider mechanism

比 ν 取 0.3. 取滑块质量 $M = 0.25 \text{ kg}$. 梁单元截面为 $0.02 \text{ m} \times 0.02 \text{ m}$ 的矩形, OA 划分 1 个单元, AB 划分 3 个单元. P 点为杆 AB 的中点. 在 O 处施加一常数驱动力矩 $T = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}$.

图 14 表明 α 值越大滑块在运动中所受阻尼越大, 在相同的仿真时间内 α 值越小运动周期越多. 图 15~ 图 17 说明了不同分数指数 α 时滑块速度与阻尼力的关系. 显然当 $\alpha = 1$ 时速度与阻尼力成线

图 14 不同 α 值时 B 点 X 方向位移变化曲线Fig.14 The B X -displacement variation under different α value

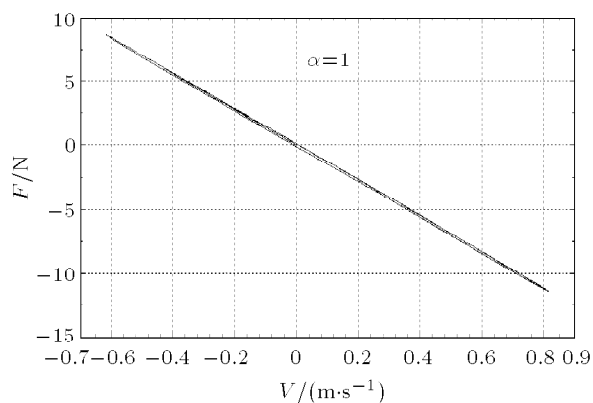
图 15 $\alpha = 1$ 时 B 点 X 方向速度 - 阻尼力变化曲线

Fig.15 The damping force variation with the B X-velocity

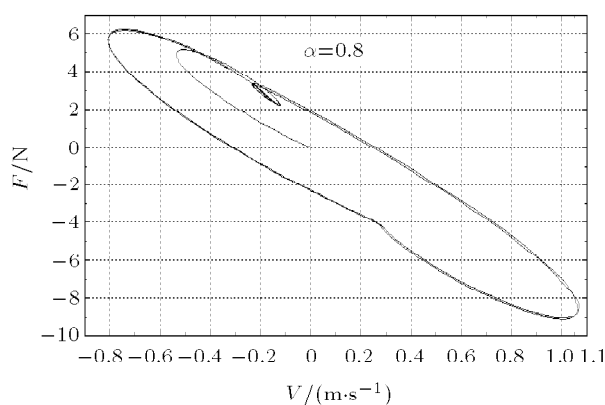
($\alpha = 1$)图 16 $\alpha = 0.8$ 时 B 点 X 方向速度 - 阻尼力变化曲线

Fig.16 The damping force variation with the B X-velocity

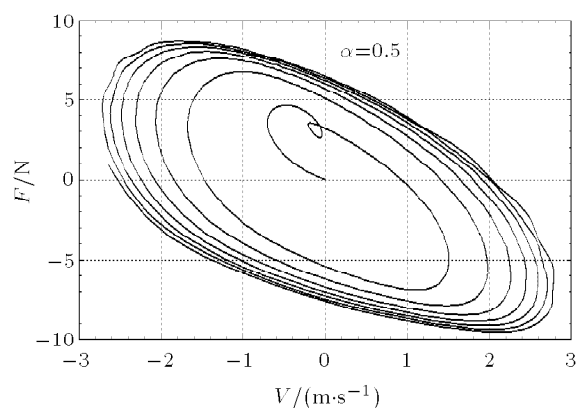
($\alpha = 0.8$)图 17 $\alpha = 0.5$ 时 B 点 X 方向速度 - 阻尼力变化曲线

Fig.17 The damping force variation with the B X-velocity

($\alpha = 0.5$)

性关系, 因为此时分数导数阻尼模型退化成为传统的 Kelvin-Voigt 模型, 图 17 和图 18 说明滑块速度

与阻尼力成非线性关系, 且图中的环数等于运动的周期数.

图 18 表示阻尼越大杆 AB 中点 P 的横向变形越小, 图 19 给出了 $\alpha = 0.5$ 时, 该机构在 3.5~4 s 时的空间构形及 A, P 点的轨迹.

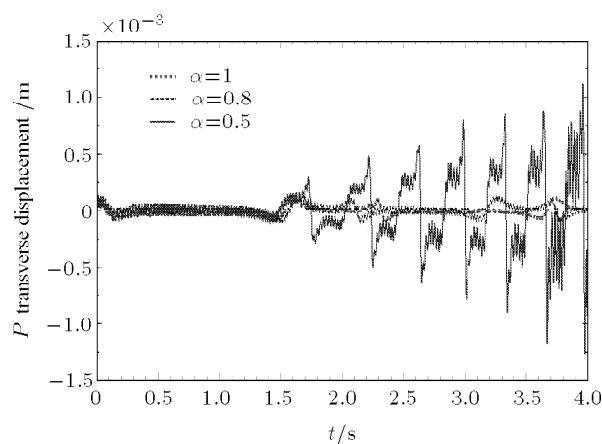
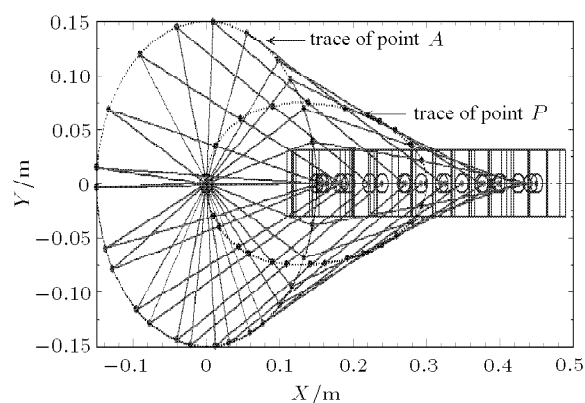
图 18 不同 α 值时 P 点横向变形变化曲线Fig.18 The P transverse deformation variations under different α value图 19 $\alpha = 0.5$ 曲柄滑块机构空间构形 ($t = 3.5 \sim 4$ s)

Fig.19 The configurations of the crank-slider mechanism

($\alpha = 0.5, t = 3.5 \sim 4$ s)

4 结 论

在绝对节点坐标体系下研究了具有分数导数阻尼特性元件的多体系统动力学建模、求解问题. 采用基于绝对坐标的三节点无闭锁效应剪变梁单元离散柔性构件, 推导得出了该单元截面保持刚性的约束条件, 建立了含常数质量矩阵的系统动力学方程. 将 Broyden 拟牛顿迭代引入数值耗散可控的广义 α 方法, 提高了求解效率. 采用不变矩阵法计算 Jacobian

矩阵中的系统弹性力对广义坐标的偏导数项使计算效率进一步提高. 数值算例表明广义 α 方法在求解本文所涉及的系统时仅会耗散系统的高频响应而不会影响求解精度. 采用 Grünwald 定义离散分数导数模型, 对比研究了不同分数指数对系统动力学响应的影响规律. 验证了分数导数阻尼模型可以退化成传统的 Kelvin-Voigt 模型. 本文方法可以进一步扩展到众多工程实际问题研究中.

致谢 作者在研究过程中得到了西班牙 D. García-Vallejo 教授, 奥地利 J. Gerstmayr 博士以及美国 Iowa 大学 CAD 中心的杨景周博士在绝对节点坐标理论研究上的提示与帮助, 在此表示感谢.

参 考 文 献

- 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1989 (Liu Yanzhu, Hong Jiazhen, Yang Haixing. Multi-Rigid Body System Dynamics. Beijing: High Education Press, 1989(in Chinese))
- 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of Multibody System. Beijing: High Education Press, 1999(in Chinese))
- 陈立平, 张云清, 任卫群等. 机械系统动力学分析及 ADAMS 应用教程. 北京: 清华大学出版社, 2005 (Chen Liping, Zhang Yunqing, Ren Weiqun, et al. Mechanical System Dynamics Analysis and ADAMS Application. Beijing: Tsinghua University Press, 2005(in Chinese))
- Shabana AA. Flexible multi-body dynamics review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics*, 1997, 1: 189~222
- Shabana AA. An absolute nodal coordinates formulation for the large rotation and deformation analysis of flexible bodies. Technical Report. No. MBS96-1-UIC, University of Illinois at Chicago, 1996
- Eberhard P, Schiehlen W. Computational dynamics of multibody systems history, formalisms, and applications. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2006, 1: 3~12
- Yoo WS, Dmitrochenko O, Yu D. Review of finite elements using absolute nodal coordinates for large-deformation problems and matching physical experiments. In: Proceedings of ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences. September 24~28, 2005, Long Beach, California, USA, DETC2005-84720
- Hwi S, Won K, Ho J, et al. Dynamic analysis of a pantograph-catenary system using absolute nodal coordinates. *Vehicle System Dynamics*, 2006, 44(8): 615~630
- Kerckanen KS, García-Vallejo D, Mikkola AM. Modeling of Belt-Drives using a large deformation finite element formulation. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 43: 239~256
- Gerstmayr J, Shabana AA. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal co-ordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 5: 109~130
- 李彬, 刘锦阳. 大变形柔性梁系统的绝对坐标方法. 上海交通大学学报, 2005, 39(5): 827~831 (Li Bin, Liu Jinyang. Application of absolute nodal coordination formulation in flexible beams with large deformation. *Chinese Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2005, 39(5): 827~831(in Chinese))
- Liu Jinyang, Lu Hao. Rigid-flexible coupling dynamics of three-dimensional hub-beams system. *Multibody System Dynamics*, 2007, 18(4): 487~510
- Liu Jinyang, Hong Jiazhen, Cui Lin. An exact nonlinear hybrid-coordinate formulation for flexible multibody systems. *Acta Mech Sin*, 2007, 23: 699~706
- Hughes TJR, Simo JC. Computational Inelasticity. New York: Springer, 1998
- Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006
- Bagley RL, Torvik PJ. On the fractional calculus model of viscoelastic behaviors. *Journal of Rheology*, 1986, 30(1): 133~155
- Zhang Yunqing, Tian Qiang, Chen Liping, et al. Simulation of a viscoelastic flexible multibody system using absolute nodal coordinate and fractional derivative methods. *Multibody System Dynamics*, 2009, 21(3): 281~303
- García-Vallejo D, Mikkola AM, Escalona JL. A new locking-free shear deformable finite element based on absolute nodal coordinates. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 50: 249~264
- Shabana AA. Computational Continuum Mechanics. New York: Cambridge University Press, 2008
- Shabana AA. Dynamics of Multibody Systems. 3rd ed. New York: Cambridge University Press, 2005
- Fung TC. Complex-time-step newmark methods with controllable numerical dissipation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41: 65~93
- Hussein B, Negrut D, Shabana AA. Implicit and explicit integration in the solution of the absolute nodal coordinate differential/algebraic equations. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 54: 283~296
- 张雄, 王天舒. 计算动力学. 北京: 清华大学出版社, 2007 (Zhang Xiong, Wang Tianshu. Computational Dynamics. Beijing: Tsinghua University Press, 2007(in Chinese))
- Newmark NM. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1959, 67~94
- Chung J, Hulbert G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. *ASME J Appl Mech*, 1993, 60: 371~375
- Erlicher S, Bonaventura L, Bursi OS. The analysis of the generalized- α method for non-linear dynamic problems. *Computational Mechanics*, 2002, 28: 83~104
- Arnold M, Brüls O. Convergence of the generalized- α scheme for constrained mechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 2007, 18(2): 185~202

- 28 Broyden CG. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, 1965, 19(92): 577~593
- 29 García-Vallejo D, Mayo J, Escalona JL. Efficient evalua-

tion of the elastic forces and the jacobian in the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 35: 313~329

(责任编辑: 何漫丽)

DYNAMICS RESEARCH ON THE MULTIBODY SYSTEM WITH FRACTIONAL-DERIVATIVE-DAMPER¹⁾

Tian Qiang²⁾ Zhang Yunqing Chen Liping Qin Gang
(CAD Center, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract Based on the absolute nodal coordinate (ANC) framework, the dynamics modeling and solution strategy for the multibody system with fractional derivative damper is investigated. The flexible parts are discretized by the ANC-based locking-free shear deformable beam element. The system equations of motion with constant mass matrix are also obtained and solved by the numerical dissipation controllable generalized- α method. The effects of the algorithm parameter and the fractional index on the dynamics responses are also studied by solving the numerical examples. The presented procedures can also be used to solve many other practical engineering problems.

Key words absolute nodal coordinate, fractional derivative, generalized- α method, numerical dissipation, multibody system

Received 3 September 2008, revised 22 October 2008.

1) The project supported by the Key National Natural Science Foundation of China (60736019) and the National Natural Science Foundation of China(60874064).

2) E-mail: tianqiang_hust@yahoo.com.cn