

基于线性互补模型的梯度塑性连续体无网格方法¹⁾

张俊波 李锡夔²⁾

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 对梯度塑性连续体提出了一个归结为线性互补问题的数值分析方法. 塑性乘子与位移均为主要未知变量, 并采用基于移动最小二乘的无网格方法分别在积分点与节点上插值. 联立弱形式下的平衡方程与积分点上逐点满足的非局部本构方程和屈服准则可以导出一个线性互补问题, 并通过 Lexico-Lemke 算法求解. 构造了一个基于 N-R 方法的迭代方案, 使得不需要形成一致性切线刚度矩阵而仍保持二阶收敛性. 一维和二维的数值算例证明了所提出的方法处理由应变软化引起的应变局部化问题的有效性.

关键词 梯度塑性, 无网格方法, 线性互补问题, 应变软化, 应变局部化

中图分类号: O242.2, O344.3, O344.7 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2009)06-0888-10

引 言

采用经典连续体理论模拟由应变软化引起的应变局部化现象时存在网格依赖性问题, 其根本性的补救措施是引入某种正则化机制以保持拟静力或动力问题控制方程的正确型态^[1~7]. 非经典(非局部)的连续体理论是一种行之有效的途径^[8~14], 梯度塑性理论^[12]属于非经典连续体理论中应用较为广泛的一种.

梯度塑性理论中屈服应力不仅依赖于等效塑性应变, 还依赖于等效塑性应变的空间导数. 不同于经典的弹塑性理论, 在梯度塑性连续体的数值求解中由于本构方程和屈服准则的非局部性, 塑性乘子通常需与位移一起作为独立未知变量进行空间离散, 并且由于在非局部本构方程和屈服准则中包含有塑性乘子的二阶导数项, 要求其插值函数必须满足 C^1 连续性. 在以往基于有限元分析的工作中通常采用的做法是对塑性乘子用 Hermitian 插值, 而位移用线性插值. 使用 Hermitian 插值函数的会增加额外的节点自由度, 而使用具有高阶连续性无网格方法的插值函数则可避免这一问题, Pamin 等^[15]采用基于移动最小二乘法 (moving least-square approximation, MLS) 的 element-free Galerkin(EFG) 方法^[16,17]取得了很好的结果; Manzari 和 Regueiro^[18]采用无网格方法和梯度塑性模型模拟岩土材料的应

变局部化现象, 以上两种方法中的屈服条件均在积分形式下满足, 即并不是逐个积分点上精确满足. 除梯度塑性模型外, Chen 等^[19]利用无网格方法自身的非局部特性来模拟应变局部化现象; Li 和 Liu^[20]采用无网格方法来分析强间断应变局部化问题, 并给出一个简单的自适应算法. 此外, 无网格方法还被大量应用到其他非线性问题, 例如 Zhang 等^[21]采用 MLPG 方法 (meshless local petrov-Galerkin) 方法处理超弹性和弹塑性大变形问题, 表明无网格方法与常规有限元相比在模拟大变形问题时具有更好的收敛性; Gu 等^[22]采用 Local Kriging(Lokriging)方法处理微电子设备中的几何非线性问题, 取得与实验结果非常吻合的数值模拟结果等等.

线性互补问题 (linear complementary problem, LCP) 的理论和算法已被成功地运用在很多工程数值分析领域. 对于梯度塑性连续体, Comi 和 Perego^[23]给出了一个广义的变分公式, 使得本构方程和平衡方程都在弱形式下满足, 提出一种预测-校正方案数值求解, 其中校正项归纳为线性互补问题. 在 Zhang 和 Schrefler^[24]的工作中基于参变量变分原理考虑了梯度塑性孔隙介质一维问题的数值求解, 塑性乘子作为参变量构造泛函但不参与变分, 本构关系作为不等式约束施加于整个变分过程, 最终形成一个线性互补问题进行求解.

本文提出了一个基于线性互补模型的梯度塑性

2008-06-16 收到第 1 稿, 2008-10-24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10672033, 90715011) 和国家 973 (2010CB731502) 资助项目.

2) E-mail: xikuili@dlut.edu.cn

连续体无网格数值方法. 与已有梯度塑性连续体模型的数值方法相比, 本文所提出的方法具有如下特点:

(1) 通过建立平衡方程的弱形式, 无需构造原问题的泛函, 结合在积分点上逐点满足 (而不是积分意义下满足) 的非局部本构方程和屈服条件, 导出相应的线性互补问题标准型, 并通过 Lexico-Lemke 算法求解^[25], 这也意味着平衡方程与本构方程的迭代求解过程同时进行.

(2) 发展了一个基于向后欧拉返回映射和 N-R 法的一致性迭代算法, 使得离散后的平衡方程和非局部本构方程和屈服准则同时满足, 并且在保证二阶收敛率的同时无需形成一致性切线刚度阵. 对于非关联流动连续体, 其刚度阵仍保持对称性.

(3) 塑性乘子作为一类独立未知变量和位移均采用基于 MLS 的无网格方法分别在积分点和节点上插值, 插值函数满足所需要的连续性条件, 不需要增加额外的节点自由度.

1 梯度塑性模型弹塑性问题的控制方程

梯度塑性模型准静力弹塑性问题的控制方程可以写成

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p] \quad (2)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p, \nabla^2 \bar{\varepsilon}^p) \leq 0 \quad (3)$$

式中 $\mathbf{L}$ 为微分算子矩阵, 上标 T 为矩阵转置符, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 分别表示应力、总应变和塑性应变, $\bar{\varepsilon}^p$ 为等效塑性应变, $\mathbf{b}$ 为体力, $\mathbf{D}_e$ 为弹性模量矩阵, F 为屈服函数

$$\mathbf{L} = \left\{ \begin{array}{ccc} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}^p \\ \varepsilon_{yy}^p \\ \varepsilon_{zz}^p \\ \gamma_{xy}^p \\ \gamma_{yz}^p \\ \gamma_{zx}^p \end{array} \right\} \quad (4)$$

在小应变假定下, 几何关系 (应变 - 位移关系) 可以用算子矩阵 $\mathbf{L}$ 表示成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{u}$ 为位移向量

$$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T \quad (6)$$

对于压力无关的 von-Mises 材料和压力相关的 Drucker-Prager 材料, 梯度塑性模型的屈服函数可以统一写成

$$F = \sqrt{3J_2} + A_\varphi I_1 - B_\varphi (c_0 + h_p \bar{\varepsilon}^p - c_g \nabla^2 \bar{\varepsilon}^p) \quad (7)$$

相应的塑性势函数定义为

$$G_p = \sqrt{3J_2} + A_\psi I_1 \quad (8)$$

式中 J_2 为第二偏应力不变量, I_1 为第一应力不变量, A_φ , A_ψ , B_φ 为依赖于材料的参数, c_0 为初始屈服极限 (von-Mises) 或初始黏性系数 (Drucker-Prager), h_p 为硬化 / 软化系数, c_g 为梯度塑性非局部化材料参数, J_2 和 I_1 可分别表示为

$$J_2 = \frac{1}{6} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{Q} \mathbf{s}, \quad I_1 = \mathbf{1}_m^T \boldsymbol{\sigma} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{s}$ 为应力偏量, $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{1}_m$ 分别为偏应力势矩阵和平均压力向量, $\mathbf{Q}$ 为对角线矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \text{Diag}[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2] \quad (10)$$

对于不同的材料, 参数 A_φ , A_ψ , B_φ 分别定义为

$$\left. \begin{array}{l} A_\varphi = 0, \quad A_\psi = 0, \quad B_\varphi = 1 \text{ (von-Mises)} \\ A_\varphi = \frac{2 \sin \varphi}{3(3 - \sin \varphi)}, \quad A_\psi = \frac{2 \sin \psi}{3(3 - \sin \psi)} \\ B_\varphi = \frac{2\sqrt{3} \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \text{ (Drucker - Prager)} \end{array} \right\} \quad (11)$$

其中参数 φ 和 ψ 分别表示 Drucker-Prager 材料中的摩擦角和塑性势角.

用向量 $\mathbf{n}_\varphi$ 和 $\mathbf{n}_\psi$ 分别表示屈服函数的梯度和塑性流动方向, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_\varphi &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}}{2\sqrt{3J_2}} + A_\varphi \mathbf{1}_m \\ \mathbf{n}_\psi &= \frac{\partial G_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}}{2\sqrt{3J_2}} + A_\psi \mathbf{1}_m \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

塑性应变率可由流动法则确定为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_p \mathbf{n}_\psi, \quad \dot{\lambda}_p \geq 0 \quad (13)$$

其中 $\dot{\lambda}_p$ 为塑性乘子率.

等效塑性应变率定义为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^T \mathbf{Q}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (14)$$

由式 (12)~(14) 可以推导出等价塑性应变率与塑性乘子率之间的关系为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \alpha_\psi \dot{\lambda}_p, \quad \alpha_\psi = \sqrt{1 + 2A_\psi^2} \quad (15)$$

由式 (15) 可知等价塑性应变和塑性乘子之间的关系可以表示成

$$\bar{\varepsilon}^p = \alpha_\psi \lambda_p \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (7) 中可将屈服函数改写成

$$F = \sqrt{3J_2} + A_\varphi I_1 - B_\varphi (c_0 + \alpha_\psi h_p \lambda_p - \alpha_\psi c_g \nabla^2 \lambda_p) \quad (17)$$

2 离散化

利用移动最小二乘法的插值函数^[15~17] 可将位移场 $\mathbf{u}$ 离散化为

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{a} \quad (18)$$

其中 $\mathbf{H}$ 为位移的插值函数矩阵, $\mathbf{a}$ 为节点位移向量.

将式 (18) 代入式 (5) 中可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{LH} \quad (20)$$

类似地可将塑性乘子场离散化为

$$\lambda_p = \mathbf{h}_\lambda^T \mathbf{A} \quad (21)$$

注意塑性乘子场是在积分点上离散, 而不是在节点上离散, $\mathbf{A}$ 为积分点塑性乘子向量, $\mathbf{h}_\lambda$ 为相应的

插值函数. 塑性乘子的 Laplacian 项 $\nabla^2 \lambda_p$ 可以离散为

$$\nabla^2 \lambda_p = \mathbf{h}_\nabla^T \mathbf{A} \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{h}_\nabla^T = \nabla^2 \mathbf{h}_\lambda^T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{h}_\lambda^T \quad (23)$$

利用式 (18) 和式 (19), 平衡方程 (1) 空间离散化后的弱形式可写成

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{f} - \int_\Omega \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{0} \quad (24)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 表示不平衡力, $\mathbf{f}$ 为等效节点外载向量

$$\mathbf{f} = \int_\Omega \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (25)$$

其中 Γ_t 为指定力的边界, $\bar{\mathbf{t}}$ 为面力向量.

采用向后欧拉时间积分方案, 由式 (2) 和式 (13) 可将第 $n+1$ 个载荷步的应力向量表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^E - \Delta \lambda_p \mathbf{D}_e \mathbf{n}_\psi^{n+1} \quad (26)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}^E$ 表示应力的弹性预测值

$$\boldsymbol{\sigma}^E = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{D}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}^n + \mathbf{D}_e \mathbf{B} \Delta \mathbf{a} \quad (27)$$

将式 (12) 代入式 (26) 并将两边同时乘矩阵 $\mathbf{P}$ 可得

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \beta \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}^E, \quad \beta = \frac{\sqrt{3J_2}}{\sqrt{3J_2} + 3\Delta \lambda_p G} \quad (28)$$

其中 G 为弹性剪切模量.

注意到应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应力偏量 $\mathbf{s}$ 存在如下关系

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} = 3\mathbf{Q}\mathbf{s} \quad (29)$$

由式 (9), (28) 和 (29) 可知应力偏量和第二偏应力不变量与其相应的预测值之间满足

$$\mathbf{s}^{n+1} = \beta \mathbf{s}^E, \quad J_2^{n+1} = \beta^2 J_2^E \quad (30)$$

将式 (28) 和式 (30) 代入式 (12) 可得

$$\mathbf{n}_\psi^{n+1} = \mathbf{n}_\psi^E \quad (31)$$

即当前载荷步的流动方向与弹性预测值的流动方向一致.

将式 (31) 代入式 (26) 可得

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^E - \Delta \lambda_p \mathbf{D}_e \mathbf{n}_\psi^E \quad (32)$$

将式 (21) 和 (27) 代入上式可得应力向量的离散表示形式

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + D_e(B\Delta a - n_\psi^E h_\lambda^T \Delta \mathbf{A}) \quad (33)$$

将式 (21) 和 (22) 代入式 (17) 可将屈服函数离散化为

$$F = F(\sigma, \mathbf{A}) = \sqrt{3J_2(\sigma)} + A_\varphi I_1 - B_\varphi [c_0 + \alpha_\psi (h_p h_\lambda^T - c_g h_\nabla^T) \mathbf{A}] \quad (34)$$

3 迭代求解方案

本节具体讨论基于 N-R 方法的迭代求解过程。

设第 n 个载荷步的所有物理量已知, 即 $\{\mathbf{a}^n, \mathbf{A}^n\}$ 已知, 需要求解第 $n+1$ 个载荷步的物理量 $\{\mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{A}^{n+1}\}$ 或者 $\{\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{A}\}$, 满足

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n + \Delta \mathbf{A} \quad (35)$$

为书写简洁起见, 下面的讨论中省略物理量中表示载荷步的上标 $n+1$ 。 $\{\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{A}\}$ 需要依赖于一个迭代过程求解。对于载荷增量步中由 i 至 $i+1$ 迭代次数的 Newton-Raphson 迭代步, 在所建议算法中需同时满足 3 个方程, 即全局平衡方程, 任一积分点处的应力更新方程和屈服条件。

3.1 迭代求解方案的基本方程

(1) 全局平衡方程

由式 (24) 可有

$$\Psi^{i+1} = \Psi^i + d\Psi = \Psi^i - \int_\Omega B^T d\sigma d\Omega = 0 \quad (36)$$

(2) 任一积分点处的应力更新方程

由式 (33) 可导出应力向量的微分形式

$$d\sigma = R_0^{-1} D_e [B d\mathbf{a} - n_\psi h_\lambda^T d\mathbf{A}] \quad (37)$$

因而有

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i + d\sigma = \sigma^i + R_0^{-1} D_e [B d\mathbf{a} - n_\psi h_\lambda^T d\mathbf{A}] \quad (38)$$

其中

$$R_0 = I + h_\lambda^T \Delta \mathbf{A} \frac{\partial n_\psi}{\partial \sigma} \quad (39)$$

(3) 任一积分点处的屈服条件

由屈服函数展开式 (34) 可导出它的微分形式

$$dF = n_\varphi^T d\sigma - \alpha_\psi B_\varphi (h_p h_\lambda^T - c_g h_\nabla^T) d\mathbf{A} \quad (40)$$

因而有屈服条件不等式

$$F^i + dF = F^i + n_\varphi^T d\sigma - \alpha_\psi B_\varphi (h_p h_\lambda^T - c_g h_\nabla^T) d\mathbf{A} \leq 0 \quad (41)$$

3.2 线性互补问题的迭代求解形式

由式 (37) 代入式 (36) 可解得用塑性乘子增量 $d\mathbf{A}$ 表示的节点位移增量 $d\mathbf{a}$

$$d\mathbf{a} = K_R^{-1} [\Phi d\mathbf{A} + \Psi^i] \quad (42)$$

其中

$$K_R = \int_\Omega B^T R_0^{-1} D_e B d\Omega \quad (43)$$

$$\Phi = \int_\Omega B^T R_0^{-1} D_e n_\psi h_\lambda^T d\Omega \quad (44)$$

将式 (42) 代入式 (37) 得到由塑性乘子增量 $d\mathbf{A}$ 表示的应力增量 $d\sigma$

$$d\sigma = T_A^\sigma d\mathbf{A} + \Psi_S^i \quad (45)$$

式中

$$T_A^\sigma = R_0^{-1} D_e [BK_R^{-1} \Phi - n_\psi h_\lambda^T] \quad (46)$$

$$\Psi_S^i = R_0^{-1} D_e BK_R^{-1} \Psi^i \quad (47)$$

最终将式 (45) 代入式 (41) 得到仅包含塑性乘子 $\Delta \mathbf{A}^{i+1}$ 为待求量的屈服条件

$$F^i + dF = -\bar{F}^i - h_A^T \Delta \mathbf{A}^{i+1} \leq 0 \quad (48)$$

其中

$$\bar{F}^i = -(F^i + n^T \Psi_S^i + h_A^T \Delta \mathbf{A}^i) \quad (49)$$

$$h_A^T = \alpha_\psi B_\varphi (h_p h_\lambda^T - c_g h_\nabla^T) - n_\varphi^T T_A^\sigma \quad (50)$$

$$\Delta \mathbf{A}^{i+1} = \Delta \mathbf{A}^i + d\mathbf{A} \quad (51)$$

联合所有积分点上的计算公式 (48), 可写成矩阵形式

$$\mathbf{F}^i + d\mathbf{F} = -\bar{\mathbf{F}}^i - \mathbf{H}_A \Delta \mathbf{A}^{i+1} \leq 0 \quad (52)$$

其中

$$\bar{\mathbf{F}}^i = [\bar{F}^i(x_1) \quad \bar{F}^i(x_2) \quad \cdots \quad \bar{F}^i(x_{ng})]^T \quad (53)$$

$$\mathbf{H}_A = [h_A(x_1) \quad h_A(x_2) \quad \cdots \quad h_A(x_{ng})]^T \quad (54)$$

其中 ng 为积分点个数。

由式 (52) 和塑性乘子的非负性可得出如下数学模型

$$\mathbf{H}_A \Delta \mathbf{A}^{i+1} + \bar{\mathbf{F}}^i \geq 0, \quad \Delta \mathbf{A}^{i+1} \geq 0 \quad (55)$$

上式即为标准型的线性互补问题 (LCP), 通常记做 $(\mathbf{H}_A, \bar{\mathbf{F}}^i)$. 目前已经有很多成熟的线性互补问题求解方法, 本文中采用 Lexico-Lemke 算法. 通过求解 $(\mathbf{H}_A, \bar{\mathbf{F}}^i)$ 即可得到 $\Delta \mathbf{A}^{i+1}$, 记为

$$\Delta \mathbf{A}^{i+1} = LCP(\mathbf{H}_A, \bar{\mathbf{F}}^i) \quad (56)$$

4 数值算例

第 1 个例题考虑软化材料一维杆件的单向拉伸问题, 杆件左端固定, 右端施加指定位移载荷, 中间阴影部分为材料缺陷区域, 如图 1 所示, 杆件长度 $L = 0.1 \text{ m}$, 右端最大指定位移 $\delta = 0.02 \text{ mm}$, 阴影区域位于杆件的正中, 宽度 $d = 0.01 \text{ m}$. 材料参数为: 杨氏模量 $E = 2 \times 10^7 \text{ kPa}$, 初始屈服极限 $c_0 = 2 \times 10^3 \text{ kPa}$, 软化系数 $h_p = -2 \times 10^6 \text{ kPa}$, 非局部化材料参数 $c_g = 50\alpha \text{ kN}$, α 为无量纲系数, 在数值计算中分别取值 1, 2 和 4, 代表不同的非局部化材料参数.

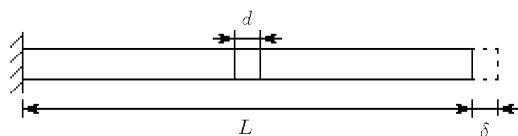


图 1 一维杆件的单向拉伸问题

Fig.1 One-dimensional bar in tension

无网格插值函数中使用线性基函数向量和四次样条权函数, 一维杆件等间距节点离散, 相邻两节点之间等间距地划分为 3 个积分区域, 每个积分区域选取一个积分点, 节点和积分点影响域的大小分别为相邻节点间距和相邻积分点间距的 2.1 和 2.0 倍. 图 2 给出了在不同情况下所得一维杆件的荷载 - 位移曲线. 从图 2 中可看出, 在选取相同非局部化材

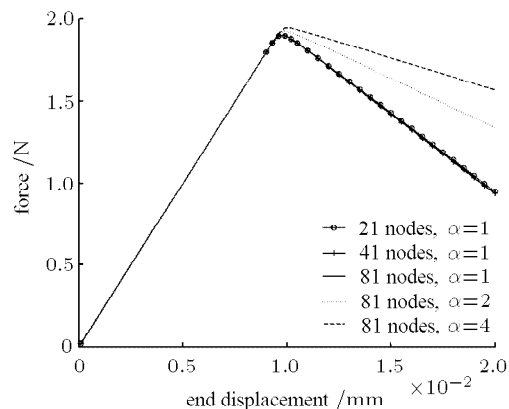
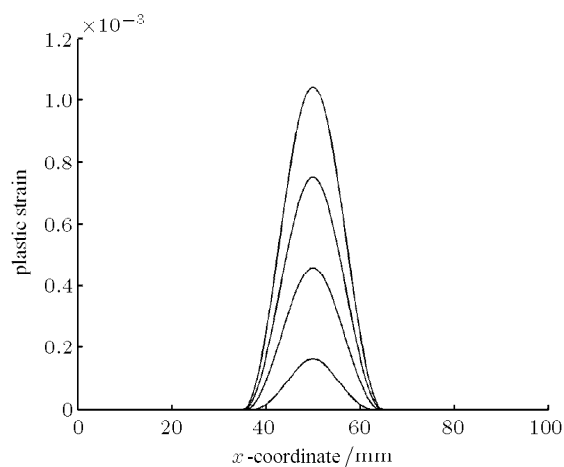


图 2 一维杆件的荷载 - 位移曲线

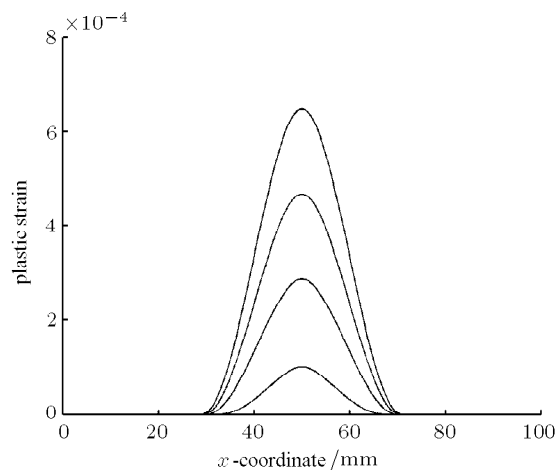
Fig.2 Comparison of load-displacement curves for one-dimensional bar

料参数 $\alpha = 1$ 并将杆件划分为 21, 41 和 81 个等分节点时所得的荷载 - 位移曲线完全吻合, 表明本文所提出的数值算法在计算应变局部化问题时不存在网格依赖性.

图 3 给出杆件离散为 81 个等分节点时分别采用不同的非局部化材料参数 $\alpha = 1, 2, 4$ 所得一维杆件的塑性应变演化曲线, 图中峰值由低至高的 4 条曲线分别相应于杆端指定位移 $\delta = 0.005 \text{ mm}, 0.01 \text{ mm}, 0.015 \text{ mm}, 0.02 \text{ mm}$. 从图 3 中可以看出不同非局部化材料参数会导致应变局部化宽度不同, 非局部化



(a) $\alpha = 1$



(b) $\alpha = 2$

图 3 不同非局部化参数下随加载过程沿一维杆轴塑性应变分布的演化

Fig.3 Evolutions of equivalent plastic strain distributions along the axis of the one-dimensional bar subjected to increasing prescribed loads with different non-local material parameters

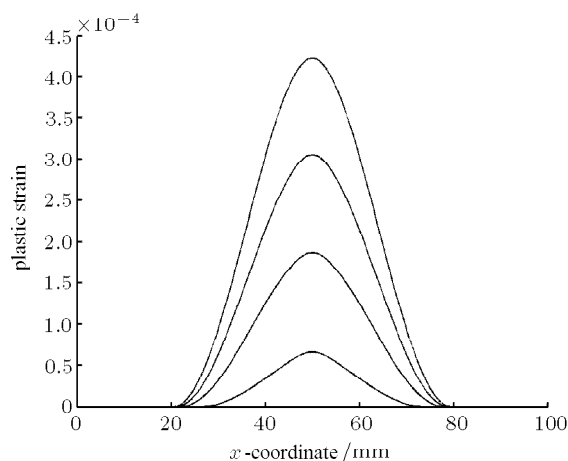
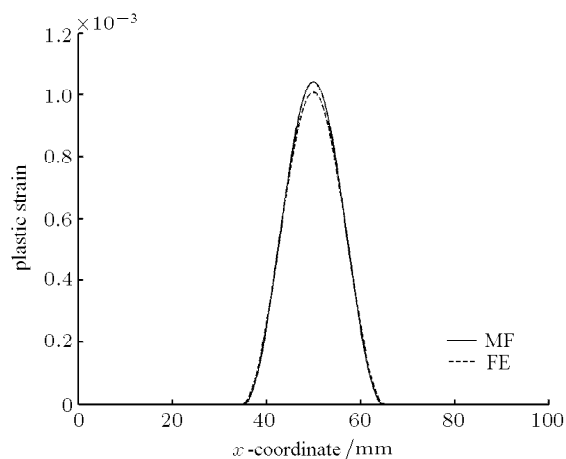
(c) $\alpha = 4$

图 3 不同非局部化参数下随加载过程沿一维杆轴塑性应变分布的演化 (续)

Fig.3 Evolutions of equivalent plastic strain distributions along the axis of the one-dimensional bar subjected to increasing prescribed loads with different non-local material parameters (continued)

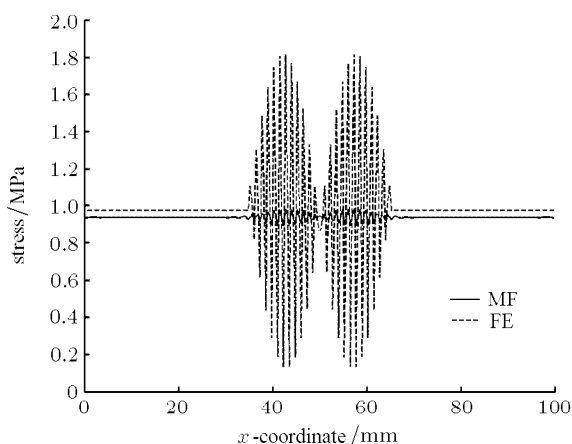
材料参数越大带宽越大, 这与应变局部化问题带宽的解析公式^[12]相符合.

图 4 给出分别采用无网格方法 (MF) 和有限元方法 (FE) 进行空间插值计算得到的载荷 - 位移曲线以及最大指定位移时杆件的塑性应变分布和应力分布, 非局部化材料参数 $\alpha = 1$. 图 4(a) 所示载荷 - 位移曲线和 4(b) 所示杆件塑性应变分布表明使用两种空间插值方法得到的计算结果基本一致, 图 4(c) 显示采用有限元插值函数时所得杆件在局部化区域的应力分布结果存在严重的虚假应力震荡现象, 说明采用无网格插值函数在模拟应变局部化问题时具有



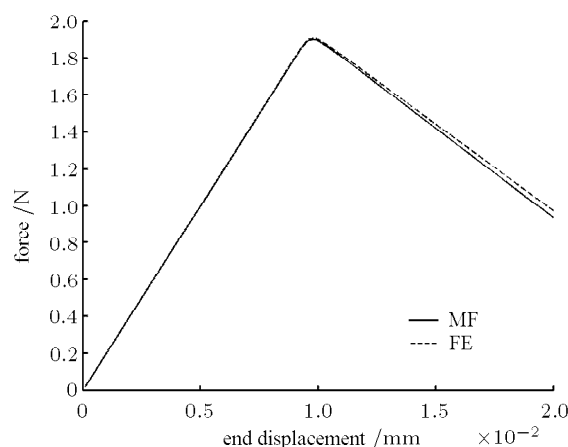
(b) 塑性应变分布

(b) Distributions of equivalent plastic strain



(c) 应力分布

(c) Distributions of the axial stress along the bar axis

图 4 无网格方法 (MF) 和有限元法 (FE) 结果比较 ($\alpha = 1$)Fig.4 Comparisons of the numerical results ($\alpha = 1$) given by mesh-free (MF) and finite element (FE) method

(a) 载荷 - 位移曲线

(a) Load-displacement curves

一定的优势.

第 2 个例题考虑平面应变条件下压力无关材料的均匀正方形 $20\text{ m} \times 20\text{ m}$ 样板, 在两刚性板之间承受由位移控制的垂直压力作用, 如图 5 所示. 由对称性条件, 仅取它的 $1/4$ 作为计算域. 两刚性板与样板之间的接触模拟为理想粘接, 即样板平面计算域的顶部边界上水平位移固定为零, 而其垂直位移在位移控制下具有相同的指定值. 同样, 由对称性条件, 计算域的底部边界上水平位移自由, 而垂直位移固定为零; 计算域的左边界上水平位移固定为零, 而垂直位移自由. 材料参数为: 杨氏模量 $E = 5 \times 10^4\text{ kPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 初始屈服极限 $c_0 = 15\text{ kPa}$, 软化系

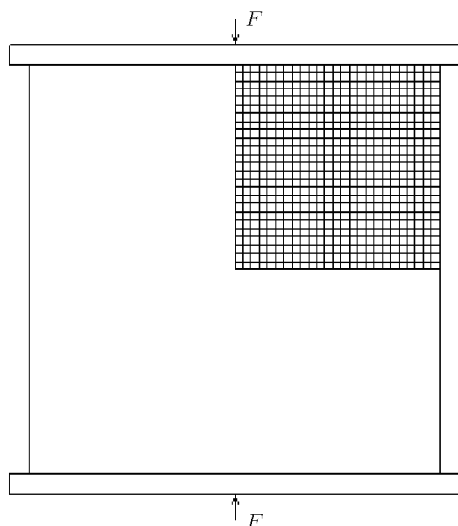


图 5 平面应变条件下的方板压缩问题

Fig.5 Compression problem of a square panel in the plane strain

数 $h_p = -150 \text{ kPa}$, 非局部化材料参数 $c_g = 10\alpha \text{ kN}$, α 为无量纲系数, 在数值计算中分别取值 1, 2 和 4, 代表不同的非局部化材料参数.

对域内位移变量和塑性乘子变量无网格插值近似分别采用二次和线性无网格插值基函数, 权函数均采用四次样条函数. 如图 5 所示, 方板离散为均匀的正方形四节点网格, 取网格的角点为节点, 每个正方形网格作为积分区域选取一个积分点 (正方形中点), 节点和积分点影响域的大小取为正方形网格边长的 2.5 倍.

图 6 和图 7 给出了在相同非局部化材料参数 $\alpha = 2$ 但采用不同空间离散密度 17×17 节点, 21×21 节点和 26×26 节点时, 方板在顶部受垂直指定位移 $\delta = 0.07 \text{ m}$ 的变形和等价塑性应变分布示意图. 计算结果显示本文提出的方法不存在网格依赖性.

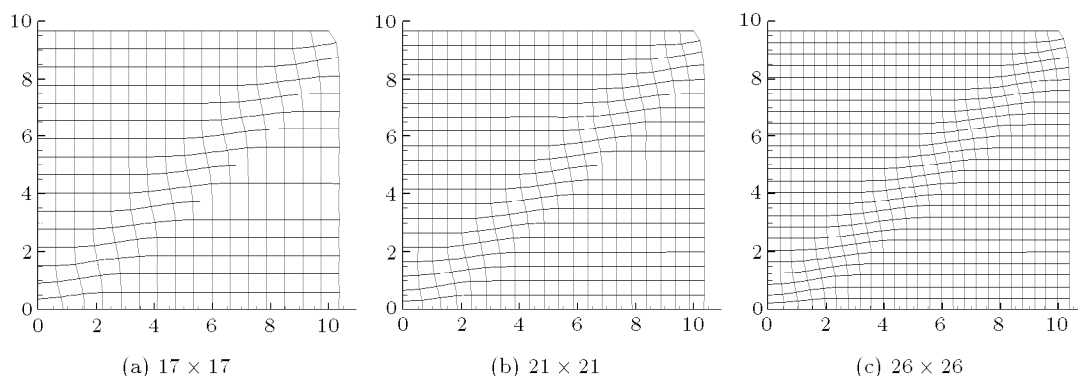
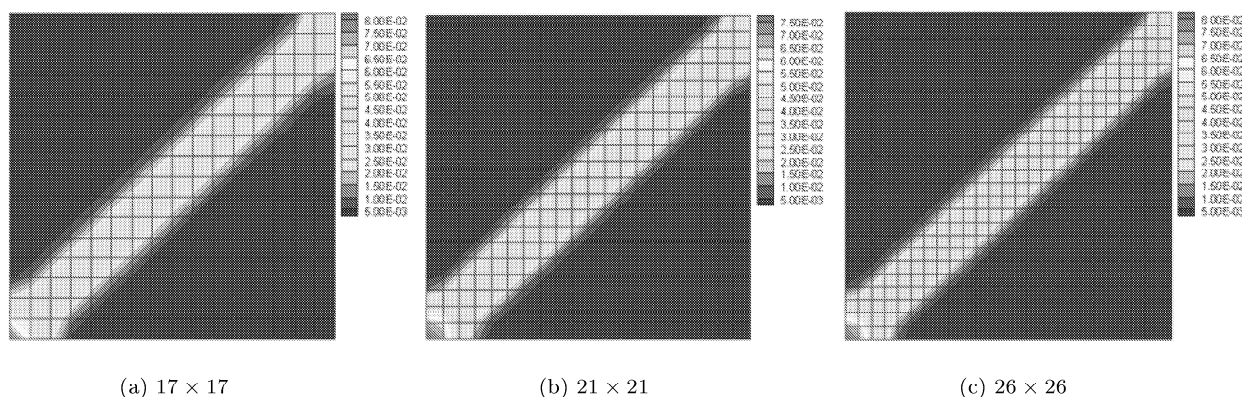
图 6 不同空间离散密度下方板在顶部受垂直指定位移 $\delta = 0.07 \text{ m}$ 时的变形图Fig.6 Deformed configurations of the square panel subjected to a prescribed vertical displacement $\delta = 0.07 \text{ m}$ at the top of the panel discretized with different density图 7 不同空间离散密度下方板在顶部受垂直指定位移 $\delta = 0.07 \text{ m}$ 时的等效塑性应变分布Fig.7 Equivalent plastic strain distributions in the square panel subjected to a prescribed vertical displacement $\delta = 0.07 \text{ m}$ at the top of the panel discretized with different density

图 8~ 图 10 给出了方板离散为 21×21 节点时采用不同非局部化参数 $\alpha = 1, 2, 4$ 所得载荷 - 位移曲线与顶部受垂直指定位移 $\delta = 0.07\text{m}$ 时的方板变

形和等价塑性应变分布示意图. 图 10 结果也显示了应变局部化宽度对非局部化材料参数的依赖性, 非局部化材料参数值越大带宽越大.

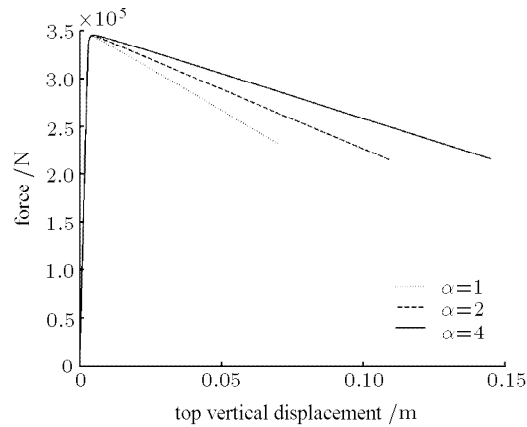


图 8 不同非局部化材料参数方板的载荷 - 位移曲线

Fig.8 Load-displacement curves for the square panel with different non-local material parameters

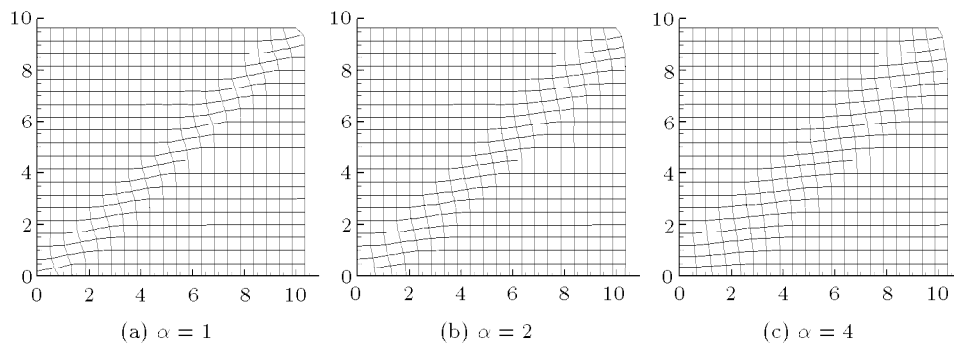


图 9 不同非局部化材料参数方板在顶部受垂直指定位移 $\delta = 0.07\text{m}$ 时的变形图

Fig.9 Deformed configurations of the square panel subjected to a prescribed vertical displacement $\delta = 0.07\text{m}$ at the top of the panel with different non-local material parameters

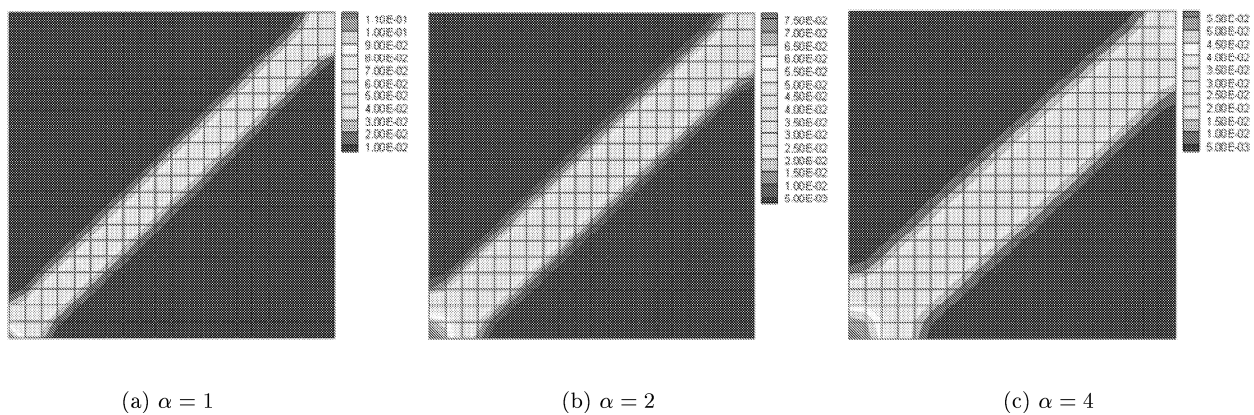


图 10 不同非局部化材料参数方板在顶部受垂直指定位移 $\delta = 0.07\text{m}$ 时的等价塑性应变图

Fig.10 Equivalent plastic strain distribution in the square panel subjected to a prescribed vertical displacement $\delta = 0.07\text{m}$ at the top of the panel with different non-local material parameters

5 结 论

本文利用梯度塑性模型作为正则化途径模拟应变局部化问题. 由于梯度塑性本构模型的非局部化性质, 很难得到类似于经典弹塑性中的一致性切线模量矩阵. 本文提出了一个基于线性互补模型的梯度塑性无网格方法, 这个算法在保证二阶收敛率的前提下无需形成一致性切线模量矩阵. 数值算例表明, 一方面通过引入梯度塑性模型保持了问题的稳定性, 数值结果不存在病态的网格依赖性; 另一方面所发展的一致性向后欧拉返回映射迭代算法避免了计算弹塑性切线模量矩阵, 仍保持数值求解过程的收敛效率.

参 考 文 献

- 1 Bazant ZP, Belytschko T, Chang TP. Continuum theory for strain softening. *J Engng Mech ASCE*, 1984, 110: 1666~1692
- 2 de Borst R. Numerical methods for bifurcation analysis in geomechanics. *Ing Arch*, 1989, 59: 160~174
- 3 Needleman A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1988, 67: 69~85
- 4 Eringen AC, Edelen DGB. On non-local elasticity. *Int J Engng Sci*, 1972, 10: 233~248
- 5 Mühlhaus HB. Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems. *Ing Arch*, 1989, 59: 124~137
- 6 de Borst R. Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engng Comput*, 1991, 8: 317~332
- 7 Fleck NA, Hutchinson JW. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41: 1825~1857
- 8 Lasry D, Belytschko T. Localization limiters in transient problems. *Int J Solids Struct*, 1988, 24: 581~597
- 9 Aifantis EC. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Trans ASME J Eng Mater Tech*, 1984, 106: 326~330
- 10 Aifantis E.C. The physics of plastic deformation. *Int J Plast*, 1987, 3: 211~247
- 11 Mühlhaus HB, Aifantis EC. A variational principle for gradient plasticity. *Int J Solids Struct*, 1991, 28: 845~857
- 12 de Borst R, Mühlhaus HB. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int J Numer Methods Engrg*, 1992, 35: 521~539
- 13 Sluys LJ, de Borst R, Mühlhaus HB. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. *Int J Solids Struct*, 1993, 30: 1153~1171
- 14 Li XK, Cescotto S. Finite element method for gradient plasticity at large strains. *Int J Numer Methods Engrg*, 1996, 39: 619~633
- 15 Pamin J, Askes H, de Borst R. Two gradient plasticity theories discretized with the element-free galerkin method. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, 192: 2377~2403
- 16 Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Engrg*, 1994, 37: 229~256
- 17 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139: 3~47
- 18 Manzari MT, Regueiro RA. Gradient plasticity modeling of geomaterials in a meshfree environment. Part I: Theory and variational formulation. *Mechanics Research Communications*, 2005, 32: 536~546
- 19 Chen JS, Wu CT, Belytschko T. Regularization of material instabilities by meshfree approximations with intrinsic length scales. *Int J Numer Methods Engrg*, 2000, 47: 1303~1322
- 20 Li S, Liu WK. Numerical simulations of strain localization in inelastic solids using mesh-free methods. *Int J Numer Methods Engrg*, 2000, 48: 1285~1309
- 21 Zhang X, Yao ZH, Zhang ZF. Application of MLPG in large deformation analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22: 331~340
- 22 Gu YT, Wang QX, Lam KY. A meshless local Kriging method for large deformation analyses. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2007, 196: 1673~1684
- 23 Comi C, Perego U. A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity. *Int J Numer Methods Engrg*, 1996, 39: 3731~3755
- 24 Zhang HW, Schrefler BA. Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media: one dimensional model. *Eur J Mech A/Solids*, 2000, 19: 503~524
- 25 Murty KG. Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming. Berlin: Helderman-Verlag, 1988

(责任编辑: 刘希国)

A MESH-FREE METHOD BASED ON LINEAR COMPLEMENTARY MODEL FOR GRADIENT PLASTICITY CONTINUUM¹⁾

Zhang Junbo Li Xikui²⁾

(The State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

Abstract A numerical method attributed to a solution procedure of linear complementary problem (LCP) for gradient plasticity continuum is proposed. With the mesh-free method based on moving least-square approximation (MLS) procedure, the displacements and plastic multiplier taken as primary field variables are interpolated in terms of their discretized counterparts defined at the nodal points and the integration points, respectively. The weak form of the equilibrium equation along with the non-local constitutive equation and the non-local yield criterion locally enforced at each integration point are combined to mathematically deduce a normal form of LCP solved by means of Lexico-Lemke algorithm. An iterative procedure based on the Newton-Raphson method is developed with no need of consistent tangent elasto-plastic modulus matrix to be derived while still retaining the second convergence rate for the solution of the boundary problem of gradient plasticity continuum. The numerical results for one and two dimensional examples demonstrate the validity of the proposed method in dealing with the numerical solution of the strain localization problem due to strain softening.

Key words gradient plasticity, mesh-free method, linear complementary problem, strain softening, strain localization

Received 16 June 2008, revised 24 October 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672033, 90715011) and the Special Funds for Major State Basic Research Project (2010CB731502).

2) E-mail: xikuili@dlut.edu.cn