

势问题的重构核粒子边界无单元法¹⁾

秦义校* 程玉民^{†,2)}

*(太原科技大学, 太原 030024)

[†](上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要 将重构核粒子法和势问题的边界积分方程方法结合, 提出了势问题的重构核粒子边界无单元法. 推导了势问题的重构核粒子边界无单元法的公式, 研究其数值积分方案, 建立了重构核粒子边界无单元法的离散化边界积分方程, 并推导了重构核粒子边界无单元法的内点位势的积分公式. 重构核粒子法形成的形函数具有重构核函数的光滑性, 且能再现多项式在插值点的精确值, 所以该方法具有更高的精度. 最后给出了数值算例, 验证了所提方法的有效性和正确性.

关键词 重构核粒子法, 形函数, 边界积分方程, 势问题, Poisson 方程, 边界无单元法

中图分类号: O34 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)06-0898-08

引 言

无网格方法构造节点形函数不依赖网格只依赖离散节点, 显得灵活方便. 目前, 无网格方法形成形函数的方法主要有光滑粒子法、移动最小二乘法、单位分解法、径向基函数法、重构核粒子法、复变量移动最小二乘法等. 类似有限元法, 无网格方法一般采用变分原理或加权残数法建立求解方程^[1~6]. 在求解域内配置节点的无网格方法的另一种形式是局部边界积分方程法, 其在每个离散节点为中心的子域构造无网格形函数, 在每个子域的边界建立边界积分方程, 从而建立求解域所有节点的未知量的方程组^[7,8]. 其中, Liu 等^[3]提出的重构核粒子法, 是在光滑粒子法中引入核函数修正项, 使理论上比较精确地重构有限域的近似函数成为可能. 无网格方法需反复计算由多个矩阵乘积以及逆阵运算形成的节点形函数与其导数, 运算量较大.

无网格边界积分方程方法是在求解域的边界配置节点, 然后采用边界积分方程形成以边界节点变量为基本未知量的求解方程. Mukherjee 等^[9]提出的边界点法是无网格边界积分方程方法的开端. 到目前为止, 其它无网格边界积分方程方法还有边界点插值法、杂交边界点法、边界云团法和边界无单元法等^[10~14]. 相对在问题求解域内配置节点的无

网格方法而言, 无网格边界积分方程方法在求解域边界配置的节点数一般会显著减少, 计算形函数及其导数的工作量和形成的基本未知量方程数都明显降低, 从而可节约求解时间. 无网格边界积分方程方法目前已成为无网格方法的重要分支.

Mukherjee 等提出的边界点法是将移动最小二乘法得到的逼近函数代入边界积分方程中, 由于采用节点变量的近似解为基本未知量, 所以对源点和场点的位移和面力均需应用移动最小二乘法的逼近公式, 还需设置“评估点”, 增加了求解和引入边界条件的复杂性. 边界法在形成的边界积分方程中均采用节点变量的近似解为基本未知量, 这样得到的解不是节点变量真实解的数值解, 而是节点变量近似解的数值解, 同时增加了引入边界条件的困难性. 边界点法可以说是无网格边界积分方程方法的间接解法.

与边界点法相比, 程玉民等提出的边界无单元法采用的边界积分方程为常见的较为规则的形式, 不需要在源点的邻域内设置 Gauss 点, 也不需选择“评估点”, 因而求解过程更简单. 边界无单元法在形成的边界积分方程中采用节点变量的真实解为未知量, 而边界点法采用节点变量的近似解为未知量. 边界无单元法不仅较为直观, 而且具有较高的精度, 还可方便地引入边界条件. 边界无单元法是无网格

2008-01-07 收到第 1 稿, 2008-06-27 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10871124)和山西省自然科学基金(20051061)资助项目.

2) E-mail: ymcheng@shu.edu.cn, ymcheng@sh163.net

边界积分方程方法的直接解法^[13,14]. 程玉民等^[15]还讨论了基于复变量移动最小二乘法的边界无单元法. 本文作者将重构核粒子法和边界无单元法相结合, 提出了弹性力学的重构核粒子边界无单元法^[16].

本文采用重构核粒子法构造形函数, 与势问题的边界积分方程方法结合, 形成了求解势问题的重构核粒子边界无单元法, 推导了势问题的重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程, 建立了其边界离散节点位势和位势梯度基本未知量求解方程组, 并给出了内点位势计算的离散化方程. 作为直接方法, 重构核粒子边界无单元法既具有半解析和降维优点, 又具有无网格方法的优点, 也可方便地施加边界条件. 采用的重构核粒子形函数能精确重构多项式在插值点的真值并且至少具有重构核函数的光滑性. 数值算例结果表明本文方法具有较高精度.

1 重构核粒子法的形函数

重构核粒子法把未知函数 $u(x)$ 的核近似 $u^a(x)$ 表示为^[3]

$$u^a(x) = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_a(x; x-s) u(s) ds \quad (1)$$

其中, 重构核粒子法核函数

$$\bar{\Phi}_a(x; x-s) = C(x; x-s) \Phi_a(x-s) \quad (2)$$

这里, $\bar{\Phi}_a(x; x-s)$ 也简称为重构核; $\Phi_a(x-s)$ 为权函数, 也称核函数, 对有限域问题一般写成

$$\Phi_a(x-s) = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{x-s}{a}\right) \quad (3)$$

原则上, 选择 $\Phi_a(x-x_I)$ 为正, 且在 $x = x_I$ 具有最大值. 当 $|x-x_I|$ 超越一个小的数值, $\Phi_a(x-x_I)$ 将迅速逼近于 0. 许多函数具有这样的特性, 例如指数函数、高斯函数和样条函数. $C(x; x-s)$ 称作修正函数, 且

$$C(x; x-s) = \sum_{i=0}^N b_i(x) (x-s)^i \equiv \mathbf{H}^T(x-s) \mathbf{b}(x) \quad (4)$$

这里

$$\mathbf{H}^T(x-s) = (1, x-s, (x-s)^2, \dots, (x-s)^N) \quad (5)$$

$$\mathbf{b}^T(x) = (b_0(x), b_1(x), \dots, b_N(x)) \quad (6)$$

其中 $b_i(x)$ 是满足重构条件的函数, 且

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{H}(0) \quad (7)$$

这里

$$\mathbf{H}^T(0) = (1, 0, \dots, 0) \quad (8)$$

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} m_0(x) & m_1(x) & \cdots & m_N(x) \\ m_1(x) & m_2(x) & \cdots & m_{N+1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_N(x) & m_{N+1}(x) & \cdots & m_{2N}(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中

$$m_n(x) = \int_{\Omega} (x-s)^n \bar{\Phi}_a(x-s) ds \quad \left. \begin{matrix} n = 1, 2, \dots, 2N \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

这里, 由于 $\bar{\Phi}_a$ 选为正函数, $1, x-s, (x-s)^2, \dots, (x-s)^N$ 线性无关, 因此力矩矩阵 $\mathbf{M}$ 是非奇异的. 矩阵 $\mathbf{M}$ 及其微分需用相同的积分规则进行积分计算, 为在离散意义上保证重构条件, 这个规则也用于重构方程 (1) 的离散化.

具有满足重构条件构成的改进核 $\bar{\Phi}_a$ 的重构方程式 (1) 采用梯形积分, 得

$$u^a(x) \cong \sum_{I=1}^{NP} \bar{\Phi}_a(x; x-x_I) u(x_I) \Delta x_I = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^a(x) u_I \quad (11)$$

其中 $s = x_I$ 是配置的标号为 I 的节点或粒子的坐标, $u_I = u(x_I)$, NP 是节点或粒子总数, 一般 $NP \geq N$, $\Psi_I^a(x)$ 即为形函数, 且

$$\begin{aligned} \Psi_I^a(x) &= \bar{\Phi}_a(x; x-x_I) \Delta x_I = \\ &= \Phi_a(x-x_I) \mathbf{H}^T(x-x_I) \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{H}(0) \Delta x_I \end{aligned} \quad (12)$$

Δx_I 为 1D 时的梯形积分计算长度, 且 $\Delta x_I = (x_{I+1} - x_{I-1})/2$. 可得形函数导数

$$\begin{aligned} \Psi_{I,i}^a(x) &= \mathbf{H}^T(0) [\mathbf{M}_{,i}^{-1}(x) \mathbf{H}(x-x_I) \Phi_a(x-x_I) + \\ &= \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{H}_{,i}(x-x_I) \Phi_a(x-x_I) + \\ &= \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{H}(x-x_I) \Phi_{a,i}(x-x_I)] \Delta x_I \end{aligned} \quad (13)$$

2 势问题的重构核粒子边界无单元法

工程和物理中的稳态热传导、静电势、渗流和固体扭转等问题都可归结为 Poisson 方程或 Laplace 方

程边值问题来求解. 当研究对象的形态或边值等呈复杂状态时, 往往不能用解析方法求得精确解. 目前发展成熟的有限元法和边界元法是解决这类问题的主要数值方法, 近年来各种无网格方法以其优势也对这类问题进行了研究^[2,9]. 下面从二维 Poisson 方程势问题边界积分方程出发, 推导一种新的求解势问题的数值方法——势问题的重构核粒子边界无单元法.

Poisson 方程边值问题, 由位势 u 与源函数 b 之间微分方程和已知边界条件组成

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= b, & \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ u &= \bar{u}, & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \\ q \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \bar{q}, & \text{在 } \Gamma_q \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

对平面势问题, Ω 表示研究对象的平面区域, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ 为平面区域 Ω 的边界, Γ_u 和 Γ_q 分别表示边界 Γ 上已知位势 $\bar{u}$ 和已知位势梯度 $\bar{q}$ 的部分, $\mathbf{n}$ 为边界的外法线方向矢量. 当 $b = 0$ 时, 上述问题即为 Laplace 方程边值问题, 于是本文将 Laplace 方程边值问题视为 Poisson 方程边值问题的特例.

对式 (14) 表示的 Poisson 方程边值问题, 引入其基本解 u^* 和 $q^* = \partial u^* / \partial \mathbf{n}$ 作检验函数, 在问题的全域形成积分弱形式控制方程, 并由此逐步推导出 Poisson 方程边值问题的边界积分方程

$$c_i u_i + \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega + \int_{\Gamma} u_j q_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q_j u_{ij}^* d\Gamma \quad (15)$$

其中包含需要将域内点源函数 $b(x_1, x_2)$ 的作用转换到边界源点的域内积分项, c_i 为自由项, i 为边界源点, j 和 k 分别为边界场点和任意域内点, u_{ik}^* , u_{ij}^* 和 q_{ij}^* 为基本解, 且

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (16)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} = n_1 \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \quad (17)$$

这里, n_1 和 n_2 是任意边界场点 $p(x_1, x_2)$ 的外法线的坐标方向余弦. 在平面直角坐标系里, 源点 $i(x_{i1}, x_{i2})$ 到任意场点 p 的距离

$$r = [(x_{i1} - x_1)^2 + (x_{i2} - x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

且

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\pi r^2} (x_{i1} - x_1) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\pi r^2} (x_{i2} - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式 (16) 和式 (17) 中, 当场点是 $j(x_{j1}, x_{j2})$ 时, 即得 u_{ij}^* 和 q_{ij}^* . 而对于式 (15) 中的 u_{ik}^* , 把域内点 $k(x_{k1}, x_{k2})$ 和边界源点 $i(x_{i1}, x_{i2})$ 的坐标代入式 (16) 进行计算即可.

当在边界表面 Γ 配置 N 个离散节点, 由重构核粒子法构造边界任意点 j 的位势和位势梯度函数

$$\left. \begin{aligned} u_j^a &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^a(\mathbf{x}_j) u_I \\ q_j^a &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^a(\mathbf{x}_j) q_I \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 u_I 和 q_I 是与点 $\mathbf{x}_j$ 相关的 NP 个边界节点中节点 x_I 的位势和位势梯度, $\Psi_I^a(\mathbf{x}_j)$ 是与点 $\mathbf{x}_j$ 相关的 NP 个边界离散节点中第 I 个节点的形函数, 简记 $\Psi_I(\mathbf{x}_j) = \Psi_I^a(\mathbf{x}_j)$.

若域内划分为 L 个积分子域, 则式 (15) 中全域源函数 b 的作用转换到任一边界源点 i 的积分项可采用高斯积分实现

$$B_i = \sum_{l=1}^L \left[\sum_{m=1}^r w_m (u_{im}^* b_m) \right] A_{\Omega_l} \quad (21)$$

其中 r 是第 l 个子域高斯积分点数, w_m 是第 m 个高斯积分点坐标对应积分权系数, A_{Ω_l} 是第 l 个子域 Ω_l 的面积, 且 $\sum_{l=1}^L A_{\Omega_l} = A_{\Omega}$, A_{Ω} 是 Ω 的总面积.

将式 (16)~(19) 代入式 (15) 得

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} q_{ij}^* \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) u_{D(j,I)} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) q_{D(j,I)} d\Gamma - B_i \quad (22)$$

其中 $D(j, I)$ 表示对 j 点有影响的 NP 个节点中第 I 节点在边界配置节点 $1 \sim N$ 中的编号.

把整体边界 Γ 离散化为 M 个积分子域, 于是, 由式 (22) 可得 Poisson 方程势问题的重构核粒子边

界无单元法的离散化边界积分方程

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} q_{ij}^* \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) u_{D(j,I)} d\Gamma = \\ \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) q_{D(j,I)} d\Gamma - B_i \end{aligned} \quad (23)$$

内点 i 的位势的边界积分方程为

$$u_i = \int_{\Gamma} q_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j q_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega \quad (24)$$

将式 (20) 代入上式, 并对其离散化, 即得重构核粒子边界无单元法的内点位势公式

$$\begin{aligned} u_i = \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) q_{D(j,I)} d\Gamma - \\ \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} q_{ij}^* \sum_{I=1}^{NP} \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) u_{D(j,I)} d\Gamma - B_i \end{aligned} \quad (25)$$

3 势问题的重构核粒子边界无单元法的数值实现

权函数 $\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 选用 3 次样条函数, 即

$$\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3, & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3, & \frac{1}{2} < d \leq 1 \\ 0, & d > 1 \end{cases} \quad (26)$$

其中 $d = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|}{a}$, $a > 0$ 是紧支域半径, a 的取值应保证点 $\mathbf{x}$ 的紧支域覆盖的节点数不少于基函数 $\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 的项数. 多维问题核函数 $\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 可以通过一维核函数的张量积扩展获得; 也可构造如上式形式, 此时 $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|/a$, 对二维问题, 用式 (26) 定义的核函数具有圆形紧支域, 其中心和半径分别为 $\mathbf{x}_I$ 和 a .

根据式 (9), 这里取

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} m_0(\mathbf{x}) & m_1(\mathbf{x}) \\ m_1(\mathbf{x}) & m_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

注意到式 (11) 对重构方程式 (1) 采用梯形积分, 这里同样对式 (10) 采用梯形积分, 有

$$\left. \begin{aligned} m_n(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)^n \Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Delta \mathbf{x}_I \\ n = 0, 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

应注意, 当 $\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 的紧支域粒子数为空, 即 $[\mathbf{x}_I - a, \mathbf{x}_I + a] \subset \Omega_x$, 并使用以上梯形规则积分时, $\int_{-a}^a z^n \Phi_a(z) dz$ 和 $\mathbf{M}$ 将退化为常数和常数矩阵.

取 $\mathbf{H}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = (1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$, $\mathbf{H}^T(0) = (1, 0)$, 与式 (27) 同时代入式 (12), 即形成以 $\mathbf{x}_I$ 为紧支域中心的形函数

$$\begin{aligned} \Psi_I(\mathbf{x}) = \Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\bar{m}_{11}(\mathbf{x}) + \\ \bar{m}_{21}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)] \Delta \mathbf{x}_I \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\bar{m}_{11}(\mathbf{x})$, $\bar{m}_{21}(\mathbf{x})$ 为力矩矩阵 $\mathbf{M}$ 的逆阵的元素

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11}(\mathbf{x}) & \bar{m}_{12}(\mathbf{x}) \\ \bar{m}_{21}(\mathbf{x}) & \bar{m}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (30)$$

形函数 $\Psi_I^a(\mathbf{x})$ 的光滑性极大地依赖于核函数 Φ_a 的光滑性, 若 $\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \in C^m(\Omega_x)$, 则至少 $\Psi_I^a(\mathbf{x}) \in C^m(\Omega_x)$. 形函数 $\Psi_a(\mathbf{x})$ 不具有 Kronecker Delta 特性.

由方程 (23) 可得

$$\begin{aligned} c_i u_i + \sum_{e=1}^M \sum_{I=1}^{NP} u_{D(j,I)} \int_{\Gamma_e} q_{ij}^* \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) d\Gamma = \\ \sum_{e=1}^M \sum_{I=1}^{NP} q_{D(j,I)} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \Psi_{D(j,I)}(\mathbf{x}_j) d\Gamma - B_i \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N$. 下面进一步将方程 (31) 改写为矩阵形式, 最终形成所有边界配置节点位势和位势梯度未知量的矩阵方程.

为程序处理方便并节省计算时间, NP 也可理解为所有边界配置节点, 这时就有相当多不覆盖积分点的紧支域, 其形函数在积分点值为 0. 边界节点总数为 N 时, 边界节点位势和位势梯度列阵 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别为

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \quad (32)$$

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T \quad (33)$$

方程 (31) 可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{U} + \sum_{e=1}^M \left[\left(\int_{\Gamma_e} q_{ij}^* \Psi d\Gamma \right) \mathbf{U} \right] = \\ \sum_{e=1}^M \left[\left(\int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \Psi d\Gamma \right) \mathbf{Q} \right] - B_i \end{aligned} \quad (34)$$

其中 C_i 为如下所示 1 行 N 列矩阵, 且除第 i 列元素外, 其余 $N-1$ 列元素都为 0, 即

$$C_i = (0, \dots, 0, c_i, 0, \dots, 0) \quad (35)$$

形函数矩阵

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) \quad (36)$$

对源点 i , 沿边界表面积分子域逐一完成积分运算后代数叠加, 可得

$$C_i U + \tilde{H}_i U = G_i Q - B_i \quad (37)$$

其中

$$\tilde{H}_i = (\tilde{h}_{i1}, \tilde{h}_{i2}, \dots, \tilde{h}_{iN}) \quad (38)$$

$$G_i = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{iN}) \quad (39)$$

方程 (37) 系数合并后, 得

$$H_i U = G_i Q - B_i \quad (40)$$

其中

$$H_i = \tilde{H}_i + C_i \quad (41)$$

依次将边界离散节点 $i = 1, 2, \dots, N$ 作为源点, 应用方程 (37), 于是得

$$HU = GQ - B \quad (42)$$

其中矩阵 H , G 和 B 可分别由 H_i , G_i 和 B_i 直接叠加或组装形成, G 和 H 形式一致, 且

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_N)^T \quad (44)$$

式 (42) 中, 设 Γ_u 与 Γ_q 无交集, 则当 U 中的第 i 行元素为未知, Q 中的第 i 行元素必为已知. 反之, 则当 U 中的第 i 行元素为已知, Q 中的第 i 行元素必为未知, 这时将这两个元素对换, 并相应地将 H 和 G 的第 i 列元素乘以 -1 , 然后也对换, 左端的列向量将全是边界配置节点未知量, 记为 X , 其系数矩阵记作 A , 右端的列向量相加后全是已知量, 记为列向量 D . 这样式 (42) 可化为如下形式的未知量线性方程组

$$AX = D \quad (45)$$

其中 A 为 $N \times N$ 阶方阵, 且是可逆阵. X 和 D 都是 $N \times 1$ 的列阵. 由方程 (45) 可确定所有未知的边界表面配置节点的位势和位势梯度.

上述推导过程中, 由于边界任意点的位势和位势梯度是通过形函数用边界配置节点的位势和位势梯度来表示的, 故可以直接施加边界条件. 此时应注意, 若已知边界点的位势梯度分量 q_1 和 q_2 , 则应以 $q = n_1 q_1 + n_2 q_2$ 代入.

由式 (25), 比照式 (37) 可得内点 i 位势的计算矩阵式为

$$u_i = G_i Q - \tilde{H}_i U - B_i \quad (46)$$

上式中系数 G_i 和 $\tilde{H}_i$ 计算类似式 (37), 但此时 i 为内点, B_i 计算当遇到内点与积分点重合时用对数积分, 否则仍采用二维高斯积分, Q 和 U 是由方程 (45) 和已知边界条件确定的所有边界表面配置节点的位势和位势梯度列阵.

计算平面势问题的重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程 (37) 的系数时, 由于基本解 u_{ij}^* 包含 $\ln \frac{1}{r}$ 项, q_{ij}^* 包含 $\frac{1}{r^2}$ 项, 如果边界源点 i 落在积分子域 Γ_e 上, 当遇到源点与积分点重合时, 基本解将导致积分奇异性, 此时采用对数积分或积分点与源点不重合的高斯积分. 多数情况下, 边界源点 i 不在积分子域 Γ_e 上, 积分无奇异性, 可直接采用高斯积分法得到足够准确的积分结果.

总之, 在对方程组 (45) 求解, 得到边界离散节点基本未知量基础上, 利用式 (20) 可求得边界任意点未知位势和位势梯度, 再由式 (46) 可求得各内点位势.

4 数值算例

为便于求解, 这里取相应方程 (14) 中 $b = 0$ 的算例对本文方法加以验证. 在第 1 个算例中, 将该方法数值解与精确解作了对比, 其它算例的边界条件相对复杂, 仅给出了数值方法的计算结果.

例 1 边长 $a = 6$ 的正方形横截面如图 1 所示. 边界条件: 左侧位势 $u(0, x_2) = 0$, 右侧位势 $u(6, x_2) = 200$, 上下面绝缘 $q_2(x_1, 0) = 0$, $q_2(x_1, 6) = 0$. 用本文方法求域内位势分布并与精确解比较. 已知精确解为 $u = 100/3 x_1$.

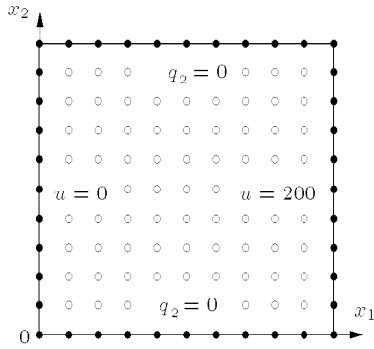


图 1 边界与域内节点的配置

Fig.1 Distribution of nodes at boundary and the domain

这里, 边界均匀配置 40 个节点, 域内再均匀布置 81 个内点. 用本文方法求得的势分布如图 2 所示, 与 x_1 轴平行的截面位势如图 3 所示. 由计算结果可知, 数值解与精确解吻合很好, 该方法具有较高的精度.

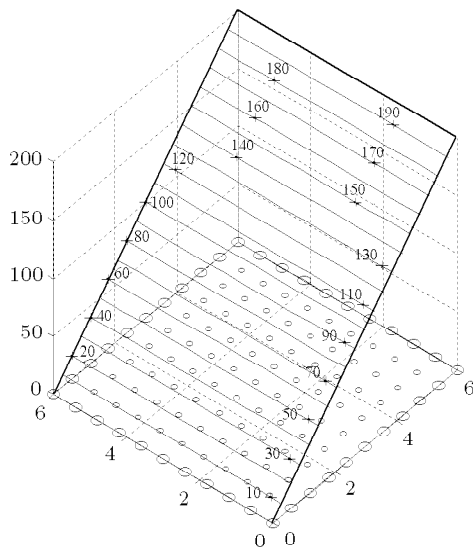
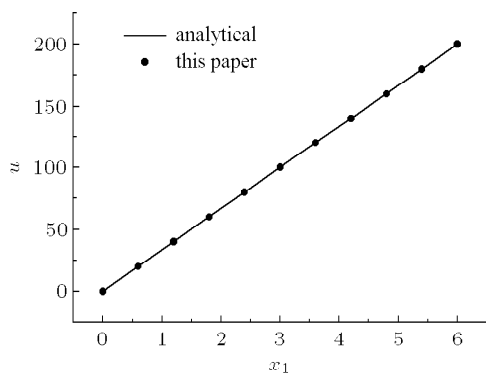


图 2 位势值分布三维图

Fig.2 Potential distribution

图 3 $x_2 = 3$ 直线上的位势值Fig.3 Potential at $x_2 = 3$

例 2 矩形平面长 $a = 2\text{m}$, 宽 $b = 1\text{m}$, 是一个纵向均匀延伸的电位场的横截面. 左右两对边的电位 $u(-1, x_2) = u(1, x_2) = 50\text{V}$, 上下两对边接地, 电位 $u(x_1, -0.5) = u(x_1, 0.5) = 0\text{V}$, 见图 4. 用本文方法求矩形横截面的电位分布 $u(x_1, x_2)$.

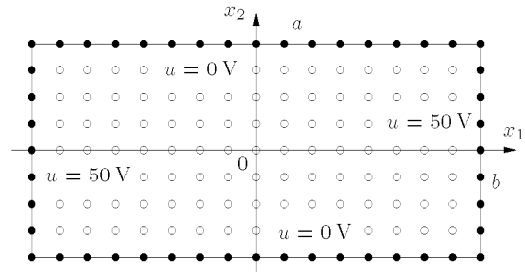


图 4 电场矩形横截面节点配置

Fig.4 Distribution of nodes at boundary and the rectangular cross section of the electric potential field

这里应注意, 上下面接地, 其电位梯度并不为 0. 用本文方法求解时, 边界均匀配置 48 个节点, 域内均匀布置 105 个内点. 求得电位等值线如图 5 所示, 考虑对称性, 图中只给出了一半矩形截面的电位分布情况. 图 6 是矩形截面电位分布的三维图. 由图可见, 本文数值解的等值线分布合理, 且基本满足已知边界条件.

例 3 矩形平面域的长 $a = 600\text{mm}$, 宽 $b = 300\text{mm}$, 为一个三面受不同温度作用、一面绝热的构筑物的柱的横截面, 边界条件纵向均匀延伸, 柱的材质均匀. 已知上表面温度 $T(x_1, 300) = 500^\circ\text{C}$,

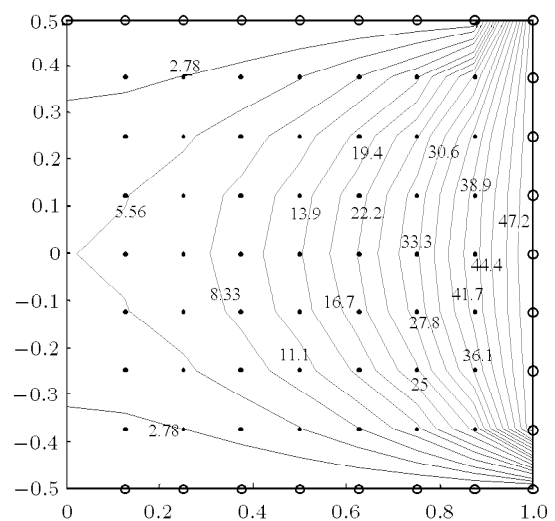


图 5 电位等值线

Fig.5 Electric potential isolines

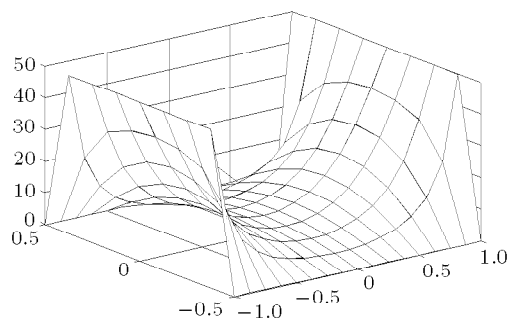


图 6 电位分布三维图

Fig.6 Electric potential distribution

左侧表面 $T(0, x_2) = 400^\circ\text{C}$, 下表面 $T(x_1, 0) = 100^\circ\text{C}$, 右侧表面 $q_1(600, x_2) = 0$. 求这个矩形截面的稳态温度场.

用本文方法求解时, 边界均匀配置 48 个节点, 域内均匀布置 105 个内点. 在先求得边界节点基本未知量后, 再求出各内点温度值, 从而得到矩形截面上温度分布等值线如图 7 所示, 温度场左侧边界与已知边界条件基本吻合, 其余三边完全吻合, 可见, 该方法数值解温度场分布合理.

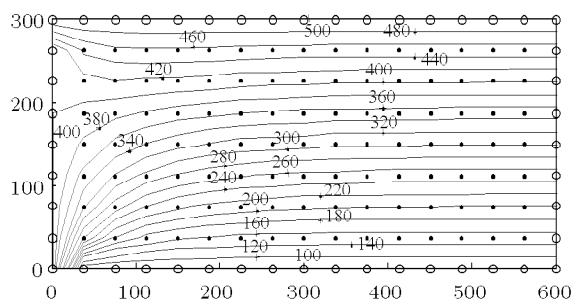


图 7 矩形横截面上温度等值线

Fig.7 Temperature isolines of the rectangular cross section

5 结 论

本文将重构核粒子法和势问题边界积分方程方法结合, 形成了势问题重构核粒子边界无单元法. 建立了势问题重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程, 并推导了势问题重构核粒子边界无单元法的内点位势离散化公式. 数值算例表明, 本文提出的势问题重构核粒子边界无单元法具有较高计算精度. 本文方法是边界积分方程无网格方法的直接解法, 可以方便地施加边界条件, 便于工程应用.

参 考 文 献

1 Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars.

- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181(2): 375~389
- 2 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 3~47
- 3 Liu WK, Jun S, Zhang YF. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 20: 1081~1106
- 4 Zhang X, Song KZ, Lu MW, et al. Meshless methods based on collocation with radial basis function. *Computational Mechanics*, 2000, 26(4): 333~343
- 5 程玉民, 李九红. 弹性力学的复变量无网格方法. *物理学报*, 2005, 54(10): 4463~4471 (Cheng Yumin, Li Jiuhong. A meshless method with complex variables for elasticity. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(10): 4463~4471 (in Chinese))
- 6 Li SC, Cheng YM, Wu YF. Numerical manifold method based on the method of weighted residuals. *Computational Mechanics*, 2005, 35(6): 470~480
- 7 Zhu T, Zhang JD, Atluri SN. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 1998, 21: 223~235
- 8 Atluri SN, Kim HG, Cho JY. A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, 1999, 24: 348~372
- 9 Mukherjee YX, Mukherjee S. The boundary node method for potential problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 797~815
- 10 Gu YT, Liu GR. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, 2002, 28: 47~54
- 11 Zhang JM, Yao ZH. Analysis of 2-D thin structures by the meshless regular hybrid boundary node method. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 15 (1): 36~44
- 12 Li G, Aluru NR. A boundary cloud method with a cloud-by-cloud polynomial basis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, 27: 57~71
- 13 程玉民, 陈美娟. 弹性力学的一种边界无单元法. *力学学报*, 2003, 35(2): 181~186 (Cheng Yumin, Chen Meijuan. A boundary element-free method for linear elasticity. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2): 181~186 (in Chinese))
- 14 Cheng Yumin, Peng Miaojuan. Boundary element-free method for elastodynamics. *Science in China, Ser. G Physics, Mechanics & Astronomy*, 2005, 48(6): 641~657
- 15 程玉民, 彭妙娟, 李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用. *力学学报*, 2005, 37(6): 719~723 (Cheng Yumin, Peng Miaojuan, Li Jiuhong. The moving least-square approximation and its application. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37(6): 719~723 (in Chinese))
- 16 秦义校, 程玉民. 弹性力学的重构核粒子边界无单元法. *物理学报*, 2006, 55(7): 3215~3222 (Qin Yixiao, Cheng Yumin. Reproducing kernel particle boundary element-free method for elasticity. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(7): 3215~3222 (in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

REPRODUCING KERNEL PARTICLE BOUNDARY ELEMENT-FREE METHOD FOR POTENTIAL PROBLEMS¹⁾

Qin Yixiao* Cheng Yumin^{†,2)}

**(Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)*

†(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract Reproducing kernel particle method (RKPM) is one of the important methods to obtain the shape functions in meshless (or mesh-free) methods. In this paper, combining the reproducing kernel particle method and boundary integral equations for two-dimensional potential problems, the reproducing kernel particle boundary element-free (RKP-BEF) method for two-dimensional potential problems is presented. The formulae of the RKP-BEF method for two-dimensional potential problems based on Poisson's equation are obtained. The discrete boundary integral equations of the RKP-BEF method are formed, and the corresponding numerical integral methods are discussed. The boundary integral equations of the RKP-BEF method for the potentials at interior points are obtained. The smoothness of the shape function of the RKPM is the same as that of the reproducing kernel function, and the values of polynomials at interpolating points can be exactly reconstructed, then the RKP-BEF method has higher precision. In comparison with other existing meshless boundary integral equation methods, such as boundary node method (BNM) and local boundary integral equation (LBIE) method, the RKP-BEF method is a direct numerical method, in which the basic unknown quantity is the real solution of the nodal variables, of meshless boundary integral equation methods. And the boundary conditions can be implemented directly. The numerical examples of 2-D potential problems are given for verifying the effectiveness and correctness of the method in this paper.

Key words reproducing kernel particle method, shape function, boundary integral equation, potential problems, Poisson's equation, boundary element-free method

Received 7 January 2008, revised 27 June 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10871124) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province of China (20051061).

2) E-mail: ymcheng@shu.edu.cn, ymcheng@sh163.net