

点涡动力系统的 Lyapunov 指数

朱 浩¹⁾ 程克明

(南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

摘要 平面上理想流体的三点涡系统是可积的 Hamilton 系统, 但其运动仍然相当复杂, 这给研究被动微粒在三点涡系统中运动带来了很大的困难. 着眼于点涡系统的被动微粒对初始小扰动的稳定性, 通过 Oseledec 定理定义被动微粒的 Lyapunov 指数, 给出了点涡系统中被动微粒稳定性的定量刻画. 同时, 由 Hamilton 系统的保体积性质得到的关于 Lyapunov 指数的简洁表达式, 避免了计算的繁琐. 利用这个定义, 点涡系的瞬时流场可以被划分成若干区域, 被动微粒的混沌运动只能在近涡的特定区域出现.

关键词 点涡系统, 被动微粒, 小扰动, Lyapunov 指数, 混沌

中图分类号: V211.3 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2009)05-0789-05

引 言

对于理想流体的二维点涡系统的研究始于 Kirchoff^[1]. Kirchoff 首先在无界平板得到了点涡运动相应的 Hamilton 动力学方程. 20 世纪 40 年代, Lin^[2] 在 Routh 工作的基础上研究了一个有界区域内涡的运动, Onsager^[3] 给出了容器中点涡系的统计力学框架. Aref 利用三线坐标系研究三点涡系统的运动^[4], 之后 Aref 和 Pomphrey^[5] 研究了无界理想流体中四点涡的运动, 结果表明四点涡运动对初值相当敏感. Hasimoto^[6] 在半圆平面域计算了两个点涡的运动, 证明在半圆边界条件下该运动不可积. Tavantzis 和 Ting 利用扰动理论研究了三点涡系的动力学稳定性^[7]. Babiano 等^[8] 通过数值方法完成了点涡系对流和二维湍流对流的对比, 指出了两种情况下对流模式的一般特点和区别. Kuznetsov 和 Zaslavsky 研究了三等强度点涡系中被动微粒的对流运动^[9]. Kidambi 和 Newton^[10] 利用球极映射的技巧获得了球面上具有边界条件的点涡运动方程的解. Aref^[11] 研究了点涡方程变换得到多点涡系统中点涡速度的新关系. Blackmore 等^[12] 在先前工作的基础上, 对某些受扰动的三点涡系统中 KAM 环面和周期轨道上拟周期流的存在性作了推广.

本文利用 Oseledec 复乘遍历定理定义了点涡系统被动微粒的 Lyapunov 指数, 就不可压缩流体的点涡系的动力学稳定性给出一个定量刻画. 利用这个

稳定性指标, 点涡系的瞬时流场可以划分成不同区域, 被动微粒的混沌运动只能在近涡的特定区域出现. Lyapunov 指数对于点涡构型的稳定性也同样适用. 在具体的数值计算上, 由 Hamilton 系统的保体积性质得到了 Lyapunov 指数的简洁表达式, 避免了计算的繁琐.

1 理想情况下的点涡动力系统

理想流体中, 如果不考虑流场的背景速度, 则 n 个点涡系中的每个点涡的速度由其他点涡诱导所致, 其运动方程可以用复数形式表示为

$$\frac{D\bar{Z}_m}{Dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n:n \neq m} \frac{\gamma_n}{Z_n - Z_m} \quad (1)$$

其中 $Z_m = x_m + iy_m$ 表示点第 m 涡在复平面上的坐标, γ_m 表示第 m 涡所具有的强度. 相应的, 若取该涡系的 Hamilton 函数如下

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{m \neq n} \gamma_m \gamma_n \ln R_{mn}$$

这里 $R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ 表示第 m 涡和第 n 涡之间的距离. 可以得到 Hamilton 方程

$$\gamma_m \dot{x}_m = \frac{\partial H}{\partial y_m}, \quad \gamma_m \dot{y}_m = -\frac{\partial H}{\partial x_m} \quad (2)$$

2008-07-25 收到第 1 稿, 2009-02-18 收到修改稿.

1) E-mail: rendong77@yahoo.com.cn

在点涡构成的 Hamilton 系统中, 包括 H 在内, 还有下列量满足守恒律

$$\begin{aligned}\sum_m \gamma_m x_m &= \text{const} \\ \sum_m \gamma_m y_m &= \text{const} \\ \sum_m \gamma_m (x_m^2 + y_m^2) &= \text{const}\end{aligned}$$

当点涡数为 3 时, 系统的运动由上述 3 个常运动描述, 它们关于 Poisson 括号满足对合关系, 因此三点涡系统在 Louville 和 Arnold 意义下是可积的, 但具有 4 个或 4 个以上点涡的系统一般是不可积的 [5].

三点涡系统中相对距离的演化受控于如下方程

$$\begin{aligned}R_{31} \dot{R}_{31} &= \frac{2A\gamma_2}{\pi} \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{23}} \right) \\ R_{12} \dot{R}_{12} &= \frac{2A\gamma_3}{\pi} \left(\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_{31}} \right) \\ R_{23} \dot{R}_{23} &= \frac{2A\gamma_1}{\pi} \left(\frac{1}{R_{31}} - \frac{1}{R_{12}} \right)\end{aligned}$$

这里 A 是三点涡构成的定向面积, 即以点涡 1,2,3 逆时针为正, 顺时针为负. Hamilton 函数 H 表征系统能量, 它的变化将会导致不同类型的涡运动的出现. 定向为正的三点涡系统若满足

$$\begin{aligned}\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_1 \gamma_2 R_{12} + \gamma_2 \gamma_3 R_{23} + \gamma_3 \gamma_1 R_{31} &= 0\end{aligned}$$

三点涡将有限时间坍缩为一点, 这个过程是个自相似过程. 其他的演化形式, 诸如: 交换、散射和平衡态等的详细讨论可以参阅文献 [4] 和 [13].

被动微粒在三点涡系统中的运动问题实际上可以视为受限制的四涡问题 (即认为被动微粒是个强度相当小的点涡), 其运动仍然满足方程 (1). 但是在某些参数和初值下, 被动微粒在相空间上的对流运动可能会出现混沌. 文献 [9] 通过 Poincare 截面展示了在具有相同强度三点涡系统下被动微粒的两种不同运动类型区域: 混沌运动区域 (称为随机海) 和稳定的拟周期运动区域 (称为岛).

2 点涡系的 Lyapunov 指数

在三涡系统中流场的复杂演化过程使得被动微粒的运动可能是不稳定的, 甚至出现混沌, 此时被动微粒对初值的扰动十分敏感. 为了定量刻画这种敏感性, 可以引入 Lyapunov 指数这一概念. 简单地说, 当微粒沿某一方向的 Lyapunov 指数大于零,

则表明微粒运动是不稳定的. 当沿某一方向的 Lyapunov 指数小于零时, 表明微粒运动在这个方向上对扰动是稳定的. 特别的, 当沿某一方向的 Lyapunov 指数等于零时意味着扰动在这个方向上是定常的.

如果平面上的被动微粒的运动方程满足

$$\frac{dX}{dt} = u(X) \quad (3)$$

那么具有初始扰动 δ 的被动微粒的运动可以由下面的方程加以刻画

$$\frac{d(X + \delta)}{dt} = u(X + \delta)$$

在上述方程的右边对 δ 作 Taylor 展开, 并略去 δ 高阶项, 可得扰动的演化方程

$$\frac{d\delta}{dt} = Du(X)\delta \quad (4)$$

于是作为连续系统的点涡系统中被动微粒的 Lyapunov 指数有如下表示

$$\eta(X_0, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\delta(t)v\|$$

这里 $\delta(t)$ 是方程 (4) 的解, $\|\cdot\|$ 表示 Riemann 度量. 任意矩阵 A 沿着 v_i 方向的 Ricmann 度量定义如下

$$\|A(v_i)\| = \sqrt{(A^T A v_i, v_i)} = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$$

这里 σ_i 是 A 的奇异值. 尽管连续系统的 Lyapunov 指数的定义相当简洁, 但是相应方程的解的获得并不容易, 这迫使我们寻求如下离散化办法. 对满足系统 (3) 的被动微粒的解曲线的任意有界片段进行离散化, 定义解曲线到自身迭代映射

$$F: X_n \rightarrow X_{n+1}$$

这里 X_n, X_{n+1} 是解曲线上相差 Δt 时间得到的观测点. F 关于 X 的可微性通过解曲线的可微性获得. 同时, 有界片段保证了紧性, 于是利用 Oseledec 乘积遍历定理可知 [14], 从 X_0 出发的被动微粒沿 v_i 方向的 Lyapunov 指数 η_i 可以表示成

$$\eta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\mathbf{D}F^n(X)(v_i)\| \quad (5)$$

这里 $\mathbf{D}F$ 是系统 (3) 的 Jacobi 矩阵, 并且

$$\mathbf{D}F^n(X_0) = \mathbf{D}F(X_n)\mathbf{D}F(X_{n-1}) \cdots \mathbf{D}F(X_0)$$

矩阵 $DF^n(X_0)$ 的顺序一般不可交换. 利用 Biot-Savart 定理求得三点涡对于被动微粒的诱导速度以后, 矩阵 DF 可以表示为

$$DF = \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_j}{\pi r_j} B_j \quad (6)$$

其中 r_j 是被动微粒到第 j 点涡的距离, 并且

$$B_j = \begin{pmatrix} \frac{(y-y_j)(x-x_j)}{\pi r_j^2} & \frac{(y-y_j)^2 - (x-x_j)^2}{2\pi r_j^2} \\ \frac{(y-y_j)^2 - (x-x_j)^2}{2\pi r_j^2} & -\frac{(y-y_j)(x-x_j)}{\pi r_j^2} \end{pmatrix}$$

由 Hamilton 系统的保体积性质容易知道

$$\text{trace}(DF) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

这里 λ_1, λ_2 是 DF 的特征根, 其绝对值就是矩阵 DF 的奇异值. 由此导出

$$(DF)^T(DF) = \lambda_1^2 E \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (5), 最终可得 Lyapunov 指数

$$\eta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \sigma_i(X_k) \quad (8)$$

由于矩阵 DF 的特征根总互为相反数, 所以被动微粒在两个彼此正交的特征方向上的 Lyapunov 指数相等. 对于式 (8) 可以理解为有限时间内被动微粒的 Lyapunov 指数, 或者称为局部 Lyapunov 指数. 在三点涡系统中由于非线性相互作用的存在, 小扰动量的演化不仅仅只是时间的函数, 也和空间位置 (例如初始点) 有关. 但是式 (8) 表明, 点涡系中被动微粒的 Lyapunov 指数满足叠加性质, 这使得我们可以对被动微粒轨迹的若干小片段实施式 (8), 然后将这些片段的 Lyapunov 指数拼接起来就可以得到沿着轨迹变化的 Lyapunov 指数. 这在研究三点涡系统的被动微粒动力学行为中更有实际意义. 值得注意的是扰动方程 (4) 作为忽略扰动的高阶项后得到的产物, 在某些奇异点附近这些高阶项的增长可能更为迅猛, 因此按照上述办法获得的 Lyapunov 指数并非扰动的真实增长速度.

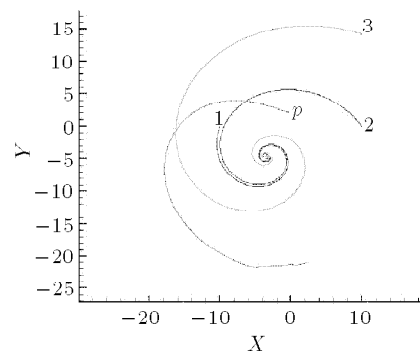
通过式 (6) 和式 (8) 可以得到: 被动微粒对初值扰动的稳定性取决于迹线的速度梯度, 除去三点涡系统中某些奇异点, 被动微粒距离点涡越远越稳定. 这使得我们可以通过被动微粒的 Lyapunov 指数对瞬时点涡场划分成 3 个区域: (1) 稳定层, 这一

层的质点到三点涡距离满足 $\|DF\| > 1$; (2) 不稳定层, 在这一层的质点到某个点涡的距离 $r_j \ll 1$; (3) 混合层, 介于这两者之间的一个层次. 这 3 个层次随着点涡的运动而变化调整. 当做有界运动的被动微粒的 Lyapunov 指数大于零并且无渐进周期, 那么这个运动是混沌的^[15] 由此可以断言混沌运动 (随机海) 只可能在混合层发生, 但拟周期运动 (岛) 则可能处于不稳定层或者混合层中, 这和文献 [9] 的结果是一致的.

如果被动微粒在三点涡系统中做周期 (拟周期) 运动, 那么它的轨道是一闭环. 在此情况下, 以闭环上任意点为初始点的被动微粒的 Lyapunov 指数都是相等的. 另外, 由 Pesin 定理可以知道, 该微粒的 Kolmogorov-Sinai 熵刚好等于所有正的 Lyapunov 指数之和^[15]. 不过像绕涡核旋转的拟周期运动, 由于处在不稳定层, 其轨道很容易被破坏.

3 关于数值计算的结果

图 1(a) 展示的三点涡构成坍缩流场中被动微粒的演化, 图中标签 1,2,3 为 3 个点涡的初始位置, p 为被动微粒初始位置. 其中三点涡的强度为 20, 20, -10, 初始位置为 $(-10,0), (10,0), (10,10\sqrt{2})$, 被动微粒初始位置为 $(0,2)$. 随着点涡的演化被动微粒被抛出, 在点涡坍缩的有限时间内, 计算获得被动微粒的 Lyapunov 指数为 -3.39. 图 1(b) 显示了点涡的局部 Lyapunov 指数在坍缩前的激增, 由于点涡的 Lyapunov 指数的定义是扰动方程 (4) 忽略扰动的高阶项后得到的产物, 因此实际值在坍缩前上升更为迅猛.

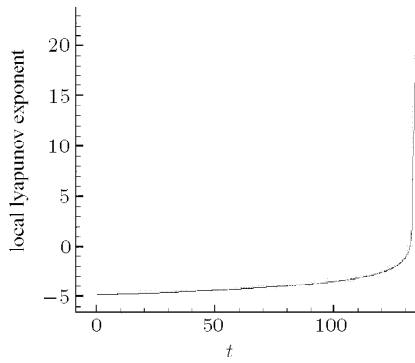


(a) 初始点为 $(0,2)$ 的被动微粒在点涡的坍缩过程中被抛出

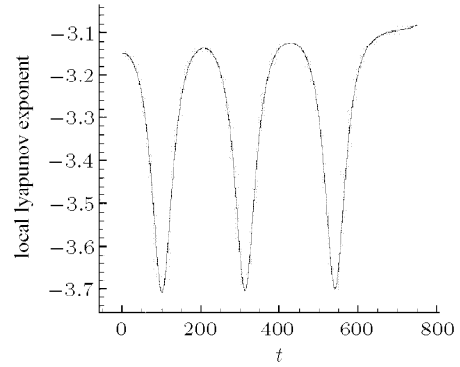
(a) Escape of passive particle located at $(0,2)$ in the collapse of point vortices

图 1 坍缩情形

Fig.1 The collapse case



(b) 初始点在 $(-10,0)$ 处的点涡的局部 Lyapunov 指数的演化
 (b) Local Lyapunov exponent of point vortex at $(-10,0)$

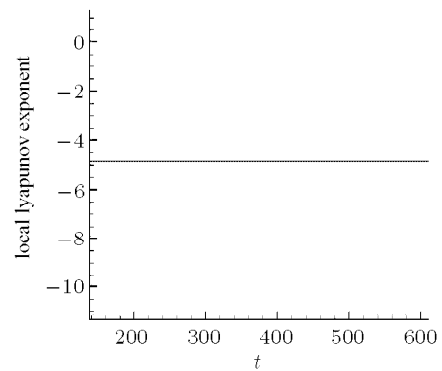


(b) 初始点在 $(0,2)$ 处的被动微粒的局部 Lyapunov 指数的演化
 (b) Local Lyapunov exponent of passive particle at $(0,2)$

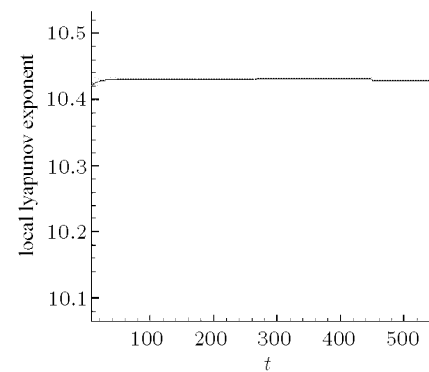
图 1 坍缩情形 (续)

Fig.1 The collapse case (continued)

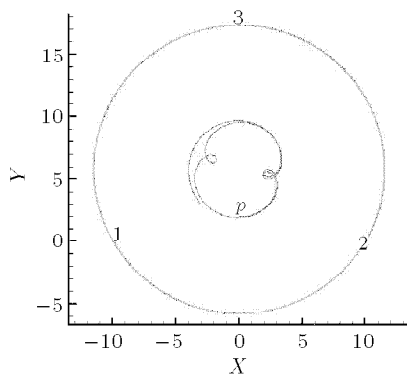
图 2(a) 展示的是 3 个等强度点涡的平衡态构型下初始点位于 $(0,2)$ 处的被动微粒的轨道, 图中标签 1,2,3 为 3 个点涡的初始位置, 此时 3 个点涡无相对运动, 轨迹为一同心圆. 点涡的初始坐标分别为 $(-10,0), (10,0), (0,10\sqrt{3})$, 点涡系统以及被动微粒的演化时间为 (0.05×15000) . 此时三点涡以相同角速度共旋并且保持等边三角形状态无相对运动, 故而点涡的轨迹是等边三角形的外接圆. 被动微粒的距离始终远离三点涡, 它对于小扰动是稳定的, 其局部 Lyapunov 指数如图 2(b) 所示, 横轴代表时间步长数, 时间步长为 0.05, 下同. 相应的, 初始点位于 $(10,0)$ 处的点涡的 Lyapunov 指数为 -4.82 见图 2(c), 由于这三点涡是完全相同的, 故而另外的两个点涡的 Lyapunov 指数也是 -4.82 . 因此可以断言该平衡态构型是稳定的. 图 2(d) 展示了处于点涡附



(c) 初始点在 $(10,0)$ 处的点涡的 Lyapunov 指数
 (c) Lyapunov exponent of point vortex at $(10,0)$



(d) 初值位于 $(10,0.01)$ 被动微粒的 Lyapunov 指数
 (d) Lyapunov exponent of passive particle at $(10,0.01)$



(a) 初始点在 $(0,2)$ 处的被动微粒在等强度点涡的平衡态情形的运动轨迹
 (a) Trajectory of passive particle at $(0,2)$ in the equilibrium of identical vortices

图 2 平衡态情形

Fig.2 The equilibrium case

近 $(10,0.01)$ 处被动微粒 Lyapunov 指数, 被动微粒到 $(10,0)$ 处点涡的距离远小于到其他点涡的距离, 它受到其他涡的影响可以忽略, 因此它绕 $(10,0)$ 处点涡旋转并参与构型的共旋. 此时被动微粒作拟周

期运动, 因此被动微粒的 Lyapunov 指数是常数. 这些数值结果都反映出被动微粒的 Lyapunov 指数的确包含了关于被动微粒的丰富的运动信息.

4 结 论

本文从点涡系统的被动微粒对初始小扰动的稳定性出发, 通过 Oseledec 定理定义被动微粒的 Lyapunov 指数, 给出了点涡系统中被动微粒稳定性的定量刻画. 点涡系统的 Hamilton 结构使得 Lyapunov 指数的计算得以简化. 进而, 利用这个物理量, 点涡系统的瞬时流场可以划分为 3 个层次: 稳定层, 不稳定层和混合层. 本文结果表明: 被动微粒的混沌运动只能在近涡的某些狭小区域 (不稳定层和混合层) 出现.

参 考 文 献

- 1 Kirchhoff GR. Vorlesugen Uber Matematische Physik, Vol 1. Leipzig: Teubner, 1876. 466
- 2 Lin CC. On the motion of vortices in the two dimensions— I. Existence of the Kirchhoff routh function. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1941, 27: 570~575
- 3 Onsager L. Staistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento*, 1949, 6: 279~287
- 4 Aref H. Motion of three vortices. *Phys Fluids*, 1979, 22: 393~400
- 5 Aref H, Pomphrey N. Integrable and chaotic motions of four vortices. I: The case of identical vortices. *Proc Roy Soc A*, 1982, 380: 359~387
- 6 Hasimoto H. Several aspects of the motton of vortex filaments in recent studies of turbulent pheomena. In: Recent studies of turbulent phenomena. Tatsum T, Takami II, eds. North-Holland, 1985
- 7 Tavantzis J, Ting L. The dynamics of three point vortices revisited. *Phys Fluids*, 1988, 31: 1392~1409
- 8 Babiano A, Boffetta G, Santangelo P, et al. Chaotic advection in point vortex models and in two-dimensional turbulence. *Phys Fluids*, 1994, 6: 2465~2474
- 9 Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system. *Phys Rev E*, 1998, 58: 7330~7349
- 10 Kidambi R, Newton PK. Point vortex motion on a sphere with solid boundaries. *Physics of Fluids*, 2000, 12: 581~588
- 11 Aref H. A transformation of the point vortex equations. *Phys Fluids*, 2002, 14: 2395~2401
- 12 Blackmore D, Ting L, Kuo O. Studies of perturbed three vortex dynamics. *Journal of Math Phy*, 2007, 48: 1~31
- 13 Newton PK. The n -Vortex Problem. New York: Springer, 2001
- 14 Jost J. Dynamics Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 153~155
- 15 Gaspard P, Chaos. Scattering and Statistical Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

(责任编辑: 张远晖)

THE LYAPUNOV EXPONENT OF VORTEX DYNAMICS

Zhu Hao¹⁾ Cheng Keming

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract Three-vortex system in an ideal fluid in the plane satisfies Hamiltonian form and the motion equations are integrable. However, the behavior of vertices are still complex so that it is difficult to study the passive particle in three point vertices system. Our focus is on the stability of passive particle with respect to an initial small perturbation, and Lyapunov exponent is introduced by employing Oseledec theory to describe the stability of passive particle quantitatively. In order to avoid fussy calculation, the simple expression of Lyapunov exponent is obtained by the conservation of volume in Hamiltonian system. Moreover, this definition leads to the partition of the instantaneous flow field in the point vortex system to show that the chaos motion of the passive particle only occurs in some especial regions.

Key words point vortex system, passive particle, small perturbation, Lyapunov exponent, chaos

Received 25 July 2008, revised 18 February 2009.

1) E-mail: rendong77@yahoo.com.cn